

О свойствах некоторых методов обращения преобразования Лапласа*

А. В. Лебедева, В. М. Рябов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Лебедева А. В., Рябов В. М. О свойствах некоторых методов обращения преобразования Лапласа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 36–46.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.104>

Рассматривается задача обращения интегрального преобразования Лапласа, относящаяся к классу некорректных задач. Интегральные уравнения сводятся к плохо обусловленным системам линейных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются либо коэффициенты разложения в ряд по специальным функциям, либо приближенные значения искомого оригинала в ряде точек. Описан метод обращения с помощью специальных квадратурных формул наивысшей степени точности и указаны характеристики точности и устойчивости этого метода. Построены квадратурные формулы обращения, приспособленные для обращения длительных и медленно протекающих процессов линейной вязкоупругости. Предложен метод деформации контура интегрирования в формуле обращения Римана — Меллина, приводящий задачу к вычислению определенных интегралов и позволяющий получить оценки погрешности. Описан метод определения возможных точек разрыва оригинала и вычисления величины скачка в этих точках.

Ключевые слова: преобразование Лапласа, обращение преобразования Лапласа, система линейных алгебраических уравнений, интегральные уравнения первого рода, квадратурные формулы, некорректные задачи, плохо обусловленные задачи, метод регуляризации.

1. Введение. Применение интегрального преобразования Лапласа приводит к более простому уравнению относительно изображения искомого оригинала. После нахождения изображения возникает задача обращения, т. е. нахождения оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p)$ из уравнения

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p). \quad (1)$$

Теория преобразования Лапласа и аналитические методы его обращения содержатся в классических работах [1, 2].

Формула обращения задается интегралом Римана — Меллина:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad c > \gamma, \quad (2)$$

*Статья подготовлена при поддержке гранта Санкт-Петербургского государственного университета «Мероприятие 3» (Pure ID 75207094).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

где γ — абсцисса сходимости интеграла Лапласа (1). Интеграл (2) понимается в смысле главного значения и на самом деле он доставляет значение $(f(t+0) + f(t-0))/2$.

К сожалению, формула (2) мало пригодна для вычислений, и потому возникает необходимость в разработке и использовании приближенных методов обращения.

Как правило, при решении задач операционными методами наиболее трудным этапом является процесс обращения, т. е. определение оригинала по его изображению. Существуют таблицы соответствия функций-оригиналов и их изображений, теоремы разложения, формула обращения Римана — Меллина, позволяющие теоретически точно находить оригинал. Но решение практических задач часто приводит к изображениям, к которым не могут быть применены эти классические приемы обращения. Следовательно, возникает необходимость разработки и применения приближенных методов.

Наиболее полно возможные подходы к задаче обращения и их реализация описаны в книге [2]. Обзор других способов обращения и их сравнение приведены в статье [3]. Теоретические основы операционного исчисления содержатся в классических работах [1, 4–6]. Вопросам приложения операционного исчисления к решению прикладных задач, среди прочих, посвящены фундаментальные труды [7, 8]. Среди недавних работ, содержащих обзор приближенных методов обращения, укажем книгу [9].

Не существует универсального метода обращения, дающего удовлетворительные результаты для произвольного изображения $F(p)$. Любой конкретный метод обращения должен учитывать специфику поведения изображения (или функции-оригинала), что прежде всего находит отражение в выборе подходящих систем функций в пространствах оригиналов и изображений, с которыми легко работать и с помощью которых могут быть хорошо приближены заданные образы и оригиналы. Выбор метода обращения существенно зависит от способа задания информации об изображении искомого оригинала. Перечислим типичные ситуации.

Предполагается, что читатель знаком с проблемой обращения преобразования Лапласа и теоретическими подходами к ее решению, изложенными, например, в книге [1].

Методам обращения посвящены книги [2, 10]. Выбор метода обращения определяется той априорной информацией об оригинале и его образе, которой мы располагаем. Известно, что образ $F(p)$ как функция комплексной переменной p регулярен в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > \gamma$, так что мы можем при построении метода обращения использовать значения образа либо в окрестности начала координат, либо в окрестности бесконечно удаленной точки, либо на вещественной оси, либо во всей полуплоскости регулярности и т. д.

Рассмотрим некоторые методы обращения и укажем их основные свойства, в том числе и ранее неизвестные.

2. Квадратурные формулы наивысшей степени точности (КФНСТ). Пусть $s > 0$ и функция $\varphi_s(p) = p^s F(p)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > 0$. Перепишем интеграл Римана — Меллина (2) в виде

$$f(t) = t^{s-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \varphi_s(p/t) dp$$

и для его вычисления построим квадратурную формулу (КФ) вида

$$f(t) \approx t^{s-1} \sum_{k=1}^n A_k \varphi_s(p_k/t), \quad s > 0, \quad (3)$$

в которой узлы p_k принадлежат полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > 0$. Потребуем, чтобы формула (3) имела наивысшую степень точности, т.е. была точна для функций $\varphi_s(p) = p^{-j}$, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$ (или для функций $f_j(t) = t^{s-1+j}$). Этим требованием узлы и коэффициенты формулы (3) определяются однозначно, ее узлы p_k попарно различны, расположены в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > 0$ и являются корнями специальных ортогональных многочленов [10], обладающих теми же свойствами, что и классические ортогональные многочлены [11]. Таблицы узлов и коэффициентов таких формул для различных значений n, s приведены в книге [12]. Скорость сходимости формул (3) такая же, как у классических формул Гаусса, и характеризуется величиной [10]

$$B_{2n} = O\left(n^{1-s} \left(\frac{3.764}{n^2}\right)^n\right).$$

Существенное отличие формулы (3) от классических квадратур типа Гаусса состоит в характеристике ее устойчивости относительно погрешности в интегрируемой функции $\varphi_s(p)$: допущенная ошибка может возрасти в $M_n = \sum_{k=1}^n |A_k|$ раз. В работе [10] доказано, что $M_n = O(n^{1-s} 3.764^n)$. Следовательно, вычислительный процесс по формуле (3) с ростом n становится неустойчивым.

Отметим, что задача обращения преобразования Лапласа, рассматриваемая как решение интегрального уравнения первого рода (1), некорректна, что, в частности, проявляется в указанной неустойчивости вычислительного процесса, а также в том, что правая часть в формуле (3) есть гладкая функция, а левая — даже может иметь разрывы.

Как правило, любой приближенный метод обращения приводит к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) либо относительно значений оригинала в некоторых точках (т.е. каркаса приближенного решения), либо коэффициентов разложения оригинала в ряд по некоторой системе функций. Из-за некорректности задачи обращения получаемая СЛАУ плохо обусловлена.

Общая теория решения некорректных и плохо обусловленных уравнений и вопросы реализации общей теории применительно к конкретным прикладным задачам изложены в книгах [13, 14].

Применение методов регуляризации к задаче обращения преобразования Лапласа изучалось нами в работах [15, 16].

3. Обобщенные квадратурные формулы наивысшей степени точности.

Напомним, что КФНСТ по построению точна для оригиналов вида $t^{s-1} Q_{2n-1}(t)$, где Q_{2n-1} — любой многочлен степени не выше $2n-1$. В предположении существования значений $f(+0), f(+\infty)$ и ограниченности оригинала следует полагать $s = 1$, тогда КФНСТ при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ приводит к точному результату, так как сумма коэффициентов КФНСТ равна единице. Заметим, что предельные значения оригинала $f(+0), f(+\infty)$, если они существуют, могут быть вычислены по формулам

$$f(+0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p), \quad f(+\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p).$$

К сожалению, КФНСТ плохо приспособлены для обращения изображений, соответствующих медленно протекающим длительным процессам. Так, в задачах линейной вязкоупругости [17], описывающих напряженное состояние на основе определяющего соотношения Больцмана — Вольтерра (пространственные координаты ниже для простоты опущены), деформации ε и напряжения σ связаны соотношением (обобщенный закон Гука)

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left(\sigma(t) + \lambda \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right). \quad (4)$$

Первое слагаемое справа в (4) соответствует мгновенной деформации, а второе — наследственной деформации. Как правило, из эксперимента определяется функция ползучести материала — значение правой части (4) при $\sigma = \text{const}$, т. е.

$$\varepsilon(t) = \frac{c}{E} \left(1 + \lambda \int_0^t K(\tau) d\tau \right). \quad (5)$$

Важнейшей задачей становится выбор подходящего ядра K , определяющего функцию ползучести (5). Ядро K должно иметь интегрируемую особенность в точке $t = 0$. Чаще всего в качестве такового берут дробно-экспоненциальную функцию Работнова [17] (резольвента ядра Абеля):

$$\Theta_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta t^{1+\alpha})^k}{\Gamma((1+\alpha)(1+k))}, \quad -1 < \alpha \leq 0. \quad (6)$$

Способ определения параметров дробно-экспоненциальной функции по измеренной функции ползучести описан в работе [18].

Интеграл от этого ядра по полуоси $t \geq 0$ должен быть конечным, для чего необходимо $\beta < 0$. Не умаляя общности, далее считаем, что выполняется условие $\beta = -1$, и пусть символ $\Theta_\alpha(t)$ означает $\Theta_\alpha(-1, t)$.

В наследственной механике твердого тела наряду с функцией (6) широко используется и интеграл от нее с переменным верхним пределом. Для облегчения использования этих величин составлены таблицы функций [17]:

$$F_1(\alpha, x) = t^{-\alpha} \Theta_\alpha(x), \quad F_2(\alpha, x) = t^{-\alpha-1} \int_0^t \Theta_\alpha(\tau) d\tau, \quad x = t^{\alpha+1}.$$

Заметим, что $F_1(\alpha, x) = E_{1/\alpha}(-x, a)$, $a = \alpha + 1$, где

$$E_\rho(z, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})}$$

есть функция Миттаг — Леффлера.

Однако при решении конкретных задач необходимо вводить в память вычислительной машины части этих таблиц, соответствующие найденным параметрам Θ_α — функций, которые заранее неизвестны и определяются в процессе решения задачи (и в итоге в таблице их может не оказаться). При изменении параметров приходится эту работу проделывать заново, что неудобно и сопряжено с внесением ошибок.

Применяя преобразование Лапласа к уравнению (4), получаем

$$\bar{\varepsilon}(p) = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{\lambda}{p^{\alpha+1} - \beta} \right) \bar{\sigma}(p). \quad (7)$$

В частности, изображение функции ползучести

$$\bar{\varepsilon}(p) = \frac{c}{pE} \left(1 + \frac{\lambda}{p^{\alpha+1} - \beta} \right).$$

Применяя преобразование Лапласа к уравнению движения среды, получим второе соотношение между $\bar{\varepsilon}(p)$ и $\bar{\sigma}(p)$, а затем, используя (7), найдем $\bar{\varepsilon}(p)$ и $\bar{\sigma}(p)$. Если искомые функции $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ ограничены, то можно положить $s = 1$ и в качестве $\varphi_s(p)$ рассматривать функции $p\bar{\varepsilon}(p)$ и $p\bar{\sigma}(p)$. Они зависят фактически от p^a , $a = \alpha + 1$. Заметим, что для реальных процессов деформирования значение s можно увеличить: так, изображение по Лапласу второго слагаемого в (4), определяющего наследственную деформацию, равно $\lambda/(p(p^a - \beta))$, и можно положить $s = 1 + a$. Искомые решения $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ на конечном по t отрезке времени допускают хорошие приближения вида $t^{s-1}Q(t^a)$ при $0 < a \leq 1$, где $Q(t)$ — некоторый многочлен, и при уменьшении a скорость их изменения уменьшается.

В таком случае целесообразно вместо КФНСТ построить и использовать обобщенные квадратурные формулы наивысшей степени точности (ОКФНСТ), точные для функций $\varphi(p) = p^{-aj}$, $j = \overline{0, 2n-1}$, или для оригиналов вида $t^{s-1}Q_{2n-1}(t^a)$ (Q_{2n-1} — произвольный многочлен), где a — любое положительное число (наибольший интерес представляет случай $a \in (0, 1]$).

Рассмотрим квадратурную формулу:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \varphi(p) dp \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi(p_k) \quad (8)$$

с узлами в правой полуплоскости, в которой $\varphi(p)$ регулярна. Потребуем, чтобы формула (8) была точна для функций $\varphi(p) = p^{-am}$, $m = 0, 1, \dots, n-1$ (т.е. обладала $(n-1)$ -свойством), где a — некоторое фиксированное положительное число. Это требование равносильно условиям

$$\sum_{k=1}^n A_k p_k^{-am} = \frac{1}{\Gamma(s+am)}, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (9)$$

которые будем называть условиями интерполяционности, а саму формулу (8) интерполяционной. Условия (9) эквивалентны формулам

$$A_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \frac{\omega_n(p^{-a})}{(p^{-a} - p_k^{-a}) \omega'_n(p_k^{-a})} dp, \quad (10)$$

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^n (x - p_k^{-a}). \quad (11)$$

Как и в случае КФНСТ, естественно поставить задачу построения формул наивысшей степени точности за счет выбора узлов. Справедлива следующая теорема.

Теорема ([10]). Для того чтобы формула (8) обладала $(2n - 1)$ -свойством, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) формула (8) интерполяционная, т. е. ее коэффициенты вычисляются по формуле (10);

2) построенный по узлам формулы многочлен (11) удовлетворяет условиям ортогональности

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^p p^{-s} \omega_n(p^{-a}) p^{-am} dp = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (12)$$

Эта теорема сводит вопрос о существовании квадратурной формулы (8) с $(2n - 1)$ -свойством к существованию многочлена $\omega_n(x)$ вида (11), удовлетворяющего условию (12). Такие многочлены существуют и определяются однозначно, а их узлы расположены в правой полуплоскости [10]. Очевидно, они попарно различны, так как в случае кратных узлов их общее число в КФ было бы меньше n и ее степень точности была бы меньше $2n - 1$, что противоречит теореме.

Итак, построенные ОКФНСТ приспособлены для решения задач линейной наследственности (вязкоупругости), для которых характерна длительность процессов деформации и их относительно малая скорость. В настоящее время вязкоупругие материалы применяются в различных отраслях техники. Отметим, что процесс создания элементов конструкций из них неотделим от процесса создания материала, из которого они изготавливаются. Поэтому, прежде всего в силу дороговизны натурального эксперимента, важную роль играют математические модели названных процессов. Как было отмечено, важную роль играет выбор ядра ползучести или релаксации, ибо ядро должно априорно учитывать специфические особенности процесса деформации, например, искомая функция должна быть непрерывна, но ее первая производная уже не принадлежит классу непрерывных функций, хотя обладает некоторой производной дробного порядка (например, таковой является интеграл от ядра Работнова). Фактически определяющее соотношение Больцмана — Вольтерра является уравнением с дробными производными. В настоящее время тематика дробных производных заняла прочное место в описании различных прикладных задач, в том числе и механики деформируемого твердого тела [19].

Изображения по Лапласу функции $\Theta_\alpha(t)$ и интеграла от нее $\int_0^t \Theta_\alpha(\tau) d\tau$ равны, соответственно,

$$\frac{1}{p^\alpha + 1}, \quad \frac{1}{p(p^\alpha + 1)}, \quad a = 1 + \alpha.$$

Естественным обобщением дробно-экспоненциальных функций и ядер Гаврильяка — Негами [18] являются ядра, изображения которых имеют вид

$$N_{\alpha,\beta,\gamma}(A, p) = C[(p^{\alpha+1} + \beta)^\gamma + A]^{-1}.$$

В частных случаях отсюда получаем целую экспоненту ($\alpha = A = 0, \gamma = 1$), ядро Абеля ($\beta = A = 0, \gamma = 1$), ядро Работнова ($A = 0, \gamma = 1$), ядро Гаврильяка — Негами ($A = 0$).

Применение многопараметрических функций $N_{\alpha,\beta,\gamma}(A, p)$ позволяет существенно расширить область применения соответствующих им наследственных слабо сингулярных ядер за счет более точного описания с их помощью экспериментальных данных. Поскольку составление таблиц таких ядер, аналогичных таблицам дробно-

экспоненциальных функций, нецелесообразно ввиду большого количества входных параметров, практическое использование этих ядер для аппроксимации экспериментальных данных и при решении краевых задач вязкоупругости возможно лишь при разработке достаточно точных и эффективных методов вычисления этих функций и определяемых ими искомым решений. Мы исходим из того, что ядра задаются их преобразованиями по Лапласу (это сравнительно просто, как показывают приведенные выше примеры) и что нам известны образы искомым оригиналов. На следующем шаге возникает задача обращения — определения искомого оригинала по его изображению. В данном разделе рассматриваются методы обращения преобразования Лапласа в предположении, что заданное изображение $F(p)$ искомым функции-оригинала фактически зависит от p^a , где a — произвольное положительное число из интервала $(0,1)$ (в частности, изображение может иметь вид (1)). В случае $a = 1$ получаются известные методы [2], в противном случае — новые формулы, обладающие большей точностью по сравнению с известными для определенного класса изображений и имеющие большое прикладное значение.

4. Деформация контура интегрирования. С целью уменьшения осцилляций и ограничения скорости роста функции $\exp(pt)$ заменим линию интегрирования в (2) эквивалентным контуром L , начинающимся и заканчивающимся в левой полуплоскости так, что $\operatorname{Re}(z) \rightarrow -\infty$ на обоих его концах, внутри которого содержатся все особенности изображения $F(z)$.

Предположим, что изображение $F(z)$ удовлетворяет лемме Жордана [1].

Если все особые точки изображения расположены в левой полуплоскости, то в формуле обращения (2) можно положить $c = 0$. В противном случае вместо $F(z)$ будем работать с функцией $F(z + a)$, $a > 0$ (соответствующей функции-оригиналу $f(t)\exp(-at)$), с особыми точками в левой полуплоскости.

Итак, считаем, что в формуле обращения (12) $c = 0$.

В качестве контуров L в формуле (2) возьмем приведенные на рис. 1, 2 кривые, состоящие из прямолинейных участков L_1, L_2, L_3 .

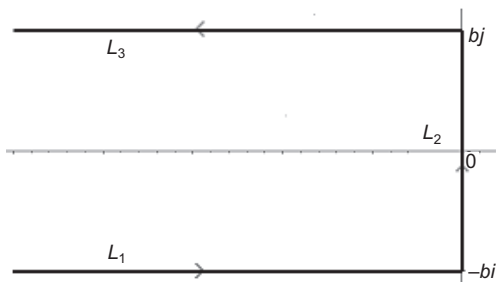


Рис. 1. Первый контур.

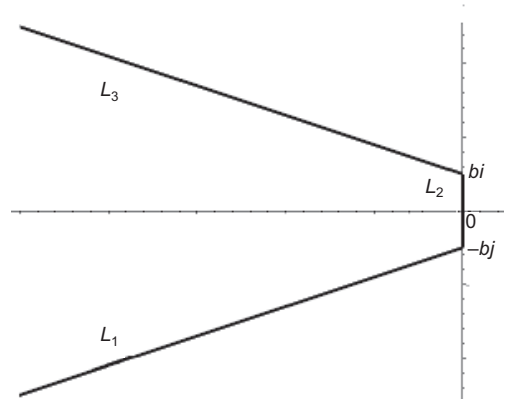


Рис. 2. Второй контур.

Очевидно, первый контур является частным случаем второго (если углы наклона участков L_1, L_3 второго контура равны нулю), тем не менее целесообразно его рассмотреть отдельно.

В статье [20] показано, что значения интегралов от сильно осциллирующих функций на вертикальных участках L_2 могут быть вычислены с гарантированной оценкой погрешности. Интегралы на участках L_1, L_3 вычисляются с помощью составных квадратурных формул Гаусса с требуемой точностью.

5. Нахождение точек разрыва оригинала и величины скачка оригинала. В книге [10] доказана формула вычисления величины скачка оригинала в точке t по его изображению:

$$f(t+0) - f(t-0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{mn}(t), \quad (13)$$

где

$$\Phi_{mn}(t) = \sqrt{2\pi n} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \varphi\left(\frac{n}{t}(1 - re_m(j))\right) (re_m(j))^{-n}, \quad \varphi(p) = pF(p). \quad (14)$$

Точка скачка t может быть найдена следующим образом. Пусть, например, известны значения величины (14), вычисленные для некоторых n_1, m_1 и n_2, m_2 . Запишем вытекающее из равенства (13) приближенное уравнение

$$\Phi_{n_1 m_1}(t) - \Phi_{n_2 m_2}(t) = 0. \quad (15)$$

Точка скачка оригинала близка к решению этого уравнения. Если их несколько, то построим аналогичное уравнение для других пар чисел n_1, m_1 и n_2, m_2 и определим точку скачка как общий корень этих уравнений.

При проведении вычислений следует выбирать значение m превосходящим n .

Пример. Дан разрывный оригинал

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t \leq 1, \\ \cos t, & t > 1. \end{cases}$$

Его изображение для простоты не выписываем.

Для определения точки скачка оригинала были выбраны два набора номеров (m_j, n_j) (подробнее см. [10]) и построен график функции (рис. 3), стоящей в левой части уравнения (15).

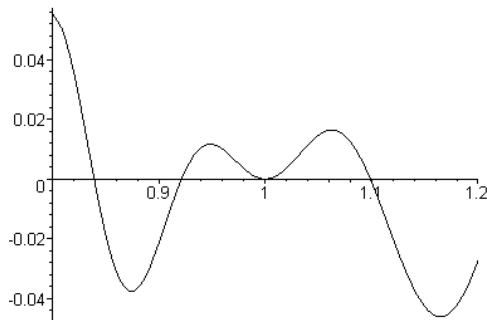


Рис. 3. График левой части уравнения (15).

Очевидно, что точка $t = 1$ — точка скачка оригинала, ибо в ней стоящие в левой части (15) слагаемые достигают максимума и приближенно равны друг другу, в то время как в других точках, где график пересекает ось абсцисс, а не касается ее, как в точке максимума, просто случайно совпадают меньшие значения этих двух слагаемых.

По изображению были вычислены значения $\Phi_{m,n}(1)$ по формуле (14) для $n = 1000, 1500, 2000$: $\Phi_{1000}(1) \approx -0.418103$, $\Phi_{1500}(1) \approx -0.425097$, $\Phi_{2000}(1) \approx -0.42901$. Затем по этим значениям была вычислена ускоряющая линейная комбинация (см. [10]):

$$\sum_{j=1}^3 c_j \Phi_{n_j}(1) \approx -0.459506.$$

Точное значение скачка оригинала равно $\cos 1 - 1 \approx -0.459697$. Как видим, способ ускорения весьма эффективен.

Замечание.

1. Аналогичную процедуру можно построить для вычисления скачков производных искомого оригинала.

2. Случай двух точек разрыва оригинала изучен в работе [21].

3. Способ нахождения точек разрыва и величины скачка оригинала в них с помощью квадратурных формул наивысшей степени точности обращения преобразования Лапласа описан в работе [22].

Литература

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Лань (2002).
2. Крылов В. И., Скобля Н. С. *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа*. Москва, Наука (1974).
3. Davies B., Martin V. Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods. *J. comput. phys.* **33** (1), 1–32 (1979).
4. Диткин В. А., Прудников А. П. *Операционное исчисление*. Москва, Высшая школа (1975).
5. Widder D. V. *The Laplace transform*. Princeton (1946).
6. Дёч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования*. Москва, Наука (1971).
7. Лурье А. И. *Операционное исчисление и его приложение к задачам механики*. Москва; Ленинград, ГТТЛ (1951).
8. Слепян Л. И., Яковлев Ю. С. *Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики*. Ленинград, Судостроение (1980).
9. Cohen A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion*. New York, Springer (2007).
10. Рябов В. М. Численное обращение преобразования Лапласа. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петербург. ун-та (2013).
11. Суегин П. К. *Классические ортогональные многочлены*. Москва, Наука (1976).
12. Крылов В. И., Скобля Н. С. *Справочная книга по численному обращению преобразования Лапласа*. Минск, Наука и техника (1968).
13. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач*. Москва, Наука (1979).
14. Кабанихин С. И. *Обратные и некорректные задачи*. Новосибирск, Сибирское научное издательство (2009).
15. Лебедева А. В., Рябов В. М. О регуляризации решения интегральных уравнений первого рода с помощью квадратурных формул. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 4, 593–599 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.404>

16. Лебедева А. В., Рябов В. М. Метод моментов в задаче обращения преобразования Лапласа и его регуляризации. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 1, 46–52 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.105>
17. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва, Наука (1977).
18. Екельчик В. С., Рябов В. М. Об использовании одного класса наследственных ядер в линейных уравнениях вязкоупругости. *Механика композитных материалов* **3**, 393–404 (1981).
19. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. *Introduction to mathematical models* (2010). <https://doi.org/10.1142/p614>
20. Лебедева А. В., Рябов В. М. О деформировании контура интегрирования в формуле обращения преобразования Лапласа. *Журнал вычислительной математики и математической физики* **55** (7), 1118–1124 (2015). <https://doi.org/10.7868/S0044466915050142>
21. Матвеева Т. А. *Некоторые методы обращения преобразования Лапласа и их приложения*. дис. . . канд. физ.-мат. наук. Санкт-Петербургский государственный университет (2003).
22. Рябов В. М. Вычисление скачков оригинала по его изображению с помощью квадратурных формул. *Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Математика*. Вып. 1. С. 36–39 (1998).

Статья поступила в редакцию 4 августа 2022 г.;
доработана 22 августа 2022 г.;
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Лебедева Анастасия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.v.lebedeva@spbu.ru
Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.gyabov@spbu.ru

On the properties of some inversion methods of the Laplace transform*

A. V. Lebedeva, V. M. Ryabov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Lebedeva A. V., Ryabov V. M. On the properties of some inversion methods of the Laplace transform. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 36–46. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.104> (In Russian)

The problem of inversion of the integral Laplace transform, which belongs to the class of ill-posed problems, is considered. Integral equations are reduced to ill-conditioned systems of linear algebraic equations, in which the unknowns are either the coefficients of the series expansion in terms of special functions, or the approximate values of the desired original at a number of points. Described method of inversion using special quadrature formulas of the highest degree of accuracy and the characteristics of the accuracy and stability of this method are indicated. Quadrature inversion formulas are constructed, which are adapted for the inversion of long-term and slow processes of linear viscoelasticity. A method of deformation of the integration contour in the Riemann — Mellin inversion formula is proposed, which leads the problem to the calculation of certain integrals and allows obtaining error estimates. A method is described for determining the possible breakpoints of the original and calculating the magnitude of the jump at these points.

Keywords: Laplace transform, Laplace transform inversion, system of linear algebraic equations, integral equations of the first kind, quadrature formulas, ill-posed problems, ill-conditioned problems, regularization method.

*This paper was prepared with the support by a grant from St Petersburg State University “Event 3” (Pure ID 75207094).

References

1. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Methods of the theory of functions of a complex variable*. Moscow, Lan' Publ. (2002). (In Russian)
2. Krylov V. I., Skoblya N. S. *Methods of the approximate Fourier transform and the inversion of the Laplace transform*. Moscow, Nauka Publ. (1974). (In Russian)
3. Davies B., Martin B. Numerical inversion of the Laplace transform: a survey and comparison of methods. *J. comput. phys.* **33** (1), 1–32 (1979).
4. Ditkin V. A., Prudnikov A. P. *Operational calculus*. Moscow, Vysshaya shkola Publ. (1975). (In Russian)
5. Widder D. V. *The Laplace transform*. Princeton (1946).
6. Doetsch G. *A guide to the practical application of the Laplace transform and Z-transforms*. Moscow, Nauka Publ. (1971). (In Russian)
7. Lurie A. I. *Operational calculus and its application to problems in mechanics*. Moscow; Leningrad, GTTL Publ. (1951). (In Russian)
8. Slepyan L. I., Yakovlev Yu. S. *Integral transformations in nonstationary problems of mechanics*. Leningrad, Sudostr. Publ (1980). (In Russian)
9. Cohen A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion*. New York, Springer (2007).
10. Ryabov V. M. *Numerical inversion of the Laplace transform*. St Petersburg, St Petersburg University Press (2013). (In Russian)
11. Suetin P. K. *Classical orthogonal polynomials*. Moscow, Nauka Publ. (1976) (In Russian)
12. Krylov V. I., Skoblya N. S. *Reference book on the numerical inversion of the Laplace transform*. Minsk, Nauka i tekhnika Publ. (1968). (In Russian)
13. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Solutions of Ill-Posed Problems*. New York, Halsted Press (1977).
14. Kabanikhin S. I. *Inverse and ill-posed problem*. Novosibirsk, Sibirskoe nauchnoe izdatel'stvo Publ. (2009). (In Russian)
15. Lebedeva A. V., Ryabov V. M. On the regularization of the solution of integral equations of the first kind using quadrature formulas. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics, Mechanics, Astronomy* **8** (66), iss. 4, 593–599 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.404> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 4, 361–365 (2021) <https://doi.org/10.1134/S1063454121040129>].
16. Lebedeva A. V., Ryabov V. M. Method of Moments in the Problem of Inversion of the Laplace Transform and Its Regularization. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 1, 46–52 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.105> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 1, 34–38 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1063454122010071>].
17. Rabotnov Yu. N. *Elements of Heredity Solid Mechanics*. Moscow, Mir Publ. (1977).
18. Ekelchik V. S., Ryabov V. M. On the use of one class of hereditary kernels in linear equations of viscoelasticity. *Mechanics of Composite Materials* **3**, 393–404 (1981). (In Russian)
19. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. *Introduction to mathematical models*. (2010). <https://doi.org/10.1142/p614>
20. Lebedeva A. V., Ryabov V. M. On Integration Contour Deformation in a Laplace Transform inversion Formula. *Computational Mathematics and Mathematical Physics* **55** (7), 1103–1109 (2015). <https://doi.org/10.7868/S0044466915050142> (In Russian)
21. Matveeva T. A. *Some methods for inverting the Laplace transform and their applications: Dis. ... PhD in Physics and Mathematics*, St Petersburg State University (2003). (In Russian)
22. Ryabov V. M. Calculation of original jumps from its image using quadrature formulas. *Vestnik St Petersburg University. Ser. 1. Mathematics* **1**, 36–39 (1998). (In Russian)

Received: August 4, 2022

Revised: August 22, 2022

Accepted: September 8, 2022

Authors' information:

Anastasia V. Lebedeva — a.v.lebedeva@spbu.ru

Victor M. Ryabov — v.ryabov@spbu.ru