УДК 517.537 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1
MSC 30E10

Приближения полиномами от двоякопериодических функций Вейерштрасса*

К. А. Синцова[1], *Н. А. Широков*[1,2]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16
[2] Санкт-Петербургский государственный университет, Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Синцова К. А., Широков Н. А.* Приближения полиномами от двоякопериодических функций Вейерштрасса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 61–72. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.106

Проблема описания классов функций в терминах скорости приближения этих функций полиномами, рациональными функциями, сплайнами вошла в теорию аппроксимации более 100 лет назад и до сих пор сохраняет свою актуальность. Среди большого числа задач, относящихся к аппроксимации, рассматривалась задача о приближении полиномами от двух переменных функции, заданной на континууме эллиптической кривой в $\mathbb{C}^2$ и голоморфной в его внутренности. Постановка такого вопроса приводила к необходимости изучения приближения функции, непрерывной на континууме комплексной плоскости и аналитической в его внутренности, с помощью полиномов от двоякопериодических функций Вейерштрасса и их производных. Данная работа посвящена развитию этой темы.

Ключевые слова: аналитические функции, аппроксимация, двоякопериодические функции Вейерштрасса.

1. Введение. Пусть $E = (u, v) \in \mathbb{C}^2 : u^2 = 4v^3 - g_2 v - g_3$ — эллиптическая кривая в $\mathbb{C}^2$ [1, Гл. 1, 7], $\Lambda \subset E$ — континуум с непустой внутренностью $\mathring{\mathrm{L}}$, $H^\alpha(\Lambda), 0 < \alpha < 1$ — класс функций, голоморфных в $\mathring{\mathrm{L}}$ и удовлетворяющих в $\Lambda\alpha$ условию Гёльдера относительно метрики в $\mathbb{C}^2$. В [2] было показано, что любая функция $F \in H^\alpha(\Lambda)$ может быть приближена на границе $\partial\Lambda$ полиномами $\mathbf{P}_n(u, v), deg\mathbf{P}_n \le n$, с такой оценкой остатка, которая позволяет установить так называемую обратную теорему приближения при условии, что длина дуги на $\partial\Lambda$ соизмерима с длиной хорды, соединяющей концы дуги.

В доказательстве использовано взаимно однозначное соответствие $z \leftrightarrow (\mathfrak{P}'(z), \mathfrak{P}(z))$ между параллелограммом периодов функции Вейерштрасса $\mathfrak{P}(z)$ и эллиптической кривой E. Задача, таким образом, переформулируется в вопрос о приближении функции f, аналитической во внутренности $\mathring{\mathrm{D}}$ области D, связанной с континуумом Λ с помощью указанного выше отображения. Граница ∂D области D также удовлетворяет условию соизмеримости длины дуги и стягивающей ее хорды.

Для функции f и F имеем соотношение $f(z) = F(\mathfrak{P}'(z), \mathfrak{P}(z))$, функцию $f(z)$ нужно приближать функциями $\mathbf{P}_n(\mathfrak{P}'(z), \mathfrak{P}(z))$. Требование соизмеримости длины

*Работа Н. А. Широкова выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00209).

дуги и стягивающей хорды на границе области существенно для проблем полиномиального приближения функций, аналитических в этой области и непрерывных в ее замыкании. Нарушение указанного условия для некоторых областей приводит к несовпадению так называемых прямых и обратных теорем приближения в ряде классов функций и тем самым к отсутствию конструктивного приближения. Конструктивное описание классов Гёльдера в терминах полиномиальных приближений в областях, имеющих на границе внешние углы, равные π, сохраняется, если сходящиеся в таких точках дуги достаточно гладкие, например, если граница ∂D состоит из двух дуг, касающихся окружностей, соединенных затем кривой, длина дуги которой соизмерима с длиной стягивающей хорды.

В настоящей работе установлено, что для приближения выражениями вида $\mathbf{P}_n(\mathfrak{P}'(z), \mathfrak{P}(z))$ с получением оценок разности, позволяющей доказывать обратные теоремы приближения для функций, аналитических в областях D и принадлежащих в $\overline{D}$ классам, аналогичным гёльдеровским, достаточно требовать от обсуждаемых дуг гладкости порядка $\mathbb{C}^{1+\sigma}$.

Данная статья продолжает исследования, начатые в [2], и допускает у границы области ∂D внешние по отношению к D углы, равные 2π. В ней рассматривается приближение функций из классов $H^{r+\omega}$ (см. определение в разд. 2), частным случаем которых является α — гёльдеровский класс при $r = 0, \omega(t) = t^\alpha, 0 < \alpha < 1$. Статья построена следующим образом: в разделе 2 приведены определения рассматриваемых областей и классов функции, сформулирована основная теорема 1. В разделе 3 строится приближающий полином $\mathbf{P}_n(\mathfrak{P}'(z), \mathfrak{P}(z))$, для чего применяется псевдопродолжение функции f вне D, представление функции f с помощью этого псевдопродолжения и ставший уже рутинным метод постоения приближающего полинома. В разделе 4 проверяются оценки величин $\rho_{1/n}(z)$ в окрестностях точек заострения, которые имеют вид, позволяющий провести последующие оценки — формула (17), для чего с помощью последовательных отображений $r_{\alpha,\beta}$ «распрямляются» точки заострения, а затем применяется теорема Келлога в локальном варианте. В разделе 5 доказательство завершается, причем сначала оценка приближения получается в других терминах, которые переводятся в требуемые в теореме 1 с помощью леммы из [2].

2. Определения и формулировки. Далее Q — параллелограмм на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с вершинами $0,\ 2\omega_1, 2\omega_2,\ 2\omega_3 \overset{\text{def}}{=} 2(\omega_1+\omega_2), Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0, \mathfrak{P}$ — классическая функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$ [1, гл. 1]. Пусть $\mathring{\mathrm{Q}}$ — внутренность, Q, D — жорданова область, на границу которой ниже будут наложены некоторые условия, $\overline{D} \subset \mathring{\mathrm{Q}}\ \omega(t)$ — модуль непрерывности, удовлетворяющий соотношению

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t}dt + x\int_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt \le c\omega(x), x > 0. \tag{1}$$

Через $H^\omega(\overline{D})$ обозначим множество функций, аналитических в D, непрерывных в $\overline{D}$, для которых выполнено соотношение $|f(z_1) - f(z_2)| \le c_f\omega(|z_1 - z_2|)$, для любых $z_1, z_2 \in \overline{D}$, при $z \in \mathbb{N}$.

Пусть $H^{\omega+r}(\bar{\mathrm{D}})$ — множество функций, аналитических в D и таких, что $f^{(r)} \in H^\omega(\overline{D})$; $H^{\omega+0}(\overline{D}) \overset{\text{def}}{=} H^\omega(\overline{D})$.

Предполагаем, что жорданова область D обладает следующими свойствами:

1) если имеется конечное число точек $z_1, \ldots, z_m \in \Gamma \overset{\mathrm{def}}{=} \partial D, m \geq 1$ и их окрестностей $\Omega_1, \ldots, \Omega_m, z_j \in \Omega_j$, таких, что $\overline{\Omega}_k \cap \overline{\Omega}_l = \emptyset$, $k \neq l$;

2) дуги $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ лежат на $\Gamma, \Gamma_j \subset \Gamma \setminus \bigcup_{r=1}^{m} \Omega_r$, $\Gamma_k \bigcap \Gamma_l = \emptyset, k \neq l$, $\bigcup_{j=1}^{m} \Gamma_j = \Gamma \setminus \bigcup_{r=1}^{m} \Omega_r$, и концы Γ_j — точки z_{2j-1}^0 и z_{2j}^0, причем если $z_{2j-1}^0, z_j, z_{2j}^0, z_{j+1}$ следуют в порядке положительного обхода Γ, то существует $b > 0$, такая, что для любых ξ_1, ξ_2 на дуге Γ с концами z_j, z_{2j-2}^0 или z_j, z_{2j+1}^0 выполняется соотношение

$$|\Gamma(\xi_1, \xi_2)| \leq b|\xi_2 - \xi_1|. \tag{2}$$

В неравенстве (2) $\Gamma(\xi_1, \xi_2) \subset \Gamma$ — дуга с концами ξ_1, ξ_2, которая в первом случае не содержит точку z_{2j}^0, а во втором — не содержит $z_{2j-1}^0, j \geq 2, |\Gamma(\ldots)|$ — длина $\Gamma(\ldots)$. Полагаем при этом $z_{m+1} \overset{\mathrm{def}}{=} z_1, z_{2m+1}^0 \overset{\mathrm{def}}{=} z_1^0, z_{2m+2}^0 \overset{\mathrm{def}}{=} z_2^0$.

Дуги $\Gamma^0(z_{2j-1}^0, z_j) \subset \Omega_j$, $\Gamma(z_j, z_{2j}^0) \subset \Omega$ обладают следующим свойством: если $\Theta(\xi)$ — угол наклона ориентированной касательной к Γ в положительном направлении вещественной оси, то с некоторыми $b_1 > 0, \sigma > 0$ имеется соотношение

$$|\Theta(\xi_2) - \Theta(\xi_1)| \leq b_1 |\xi_2 - \xi_1|^{\sigma} \tag{3}$$

в случае, когда $\Gamma(\xi_1, \xi_2) \subset \Gamma(z_{2j-1}^0, z_j)$ или $\Gamma(\xi_1, \xi_2) \subset \Gamma(z_j, z_{2j}^0)$.

Внешний по отношению к D угол η^* между касательными к дугам $\Gamma(z_{2j-1}^0, z_j)$ и $\Gamma(z_j, z_{2j}^0)$ в точке z_j

$$\eta^* = 2\pi, j = 1 \ldots m. \tag{4}$$

Обозначим через $\varphi(z)$ функцию, которая конформно отображает $\mathbb{C} \setminus D$ на внешность единичного круга $\mathbb{D}$ так, что $\varphi(\infty) = \infty$, $\varphi'(\infty) > 0, z = \Psi(\xi)$ — обратное отображение. Для $t > 0$ положим $\Gamma_{1+t} \overset{\mathrm{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : z = \Psi(\xi), |\xi| = 1 + t\}$, для $z \in \Gamma$ полагаем $\rho_t(z) \overset{\mathrm{def}}{=} dist(z, \Gamma_{1+t})$.

Основной результат статьи состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть D удовлетворяет указанным выше условиям, модуль непрерывности ω удовлетворяет соотношению (1), $f \in H^{\omega+r}(\overline{D})$, $r \geq 0$. Тогда существует постоянная $c = c(f)$, такая, что при n = 1,2... найдется полином $\mathbf{P}_n(u, v)$ от двух переменных, $deg \mathbf{P}_n \leq n$, такой, что справедливо соотношение*

$$|f(z) - \mathbf{P}(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \leq c \rho_{\frac{1}{n}}^{r}(z) \omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z)), \quad z \in \Gamma. \tag{5}$$

3. Построение приближающего полинома. Найдем $\mathbf{t}, 0 < \mathbf{t} < 1$, такое, что для параллелограмма $Q_{\mathbf{t}} \overset{\mathrm{def}}{=} \omega_3 + \mathbf{t}(Q - \omega_3)$ выполнено условие $\overline{D} \subset Q_t$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 ([2, лемма 5]). *Для выбранного $\mathbf{t}$ существует полином Q_{m_0} степени m_0, зависящей от $\mathbf{t}$, такой, что функция $S(z) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathfrak{P}'(z) Q_{m_0}(\mathfrak{P}(z))$ будет однолистной в $\overline{Q}_t$.*

Нам понадобится псевдопродолжение E функции f на параллелограмм Q. $\square$

Лемма 2 ([3–5]). *Существует функция f_0 со следующими свойствами:*
1. $f_0 \in C(\mathbb{C}), f_0(z) = 0$, если $z \notin \overline{Q}_{\mathbf{t}}$, $f_0|_{\overline{D}} = f$.
2. $f_0 \in C^1(\mathbb{C} \setminus D), |(f_0)'_{\bar{z}}| \leq c_f dist^{r-1}(z, \overline{D}) \omega(dist(z, \overline{D}))$.

Лемма 3. *Для $z \in D$ справедливо соотношение*

$$f(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\overline{Q}_t\setminus\overline{D}} \frac{f'_{0\overline{\xi}}(\xi)s'(\xi)}{s(\xi)-s(z)}dA(\xi), \tag{6}$$

где dA — двумерная мера Лебега.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$, пусть R_ε — двусвязная область, ограниченная ∂Q_t и $\Gamma_{1+\varepsilon}$. При фиксированном $z \in D$ положим $\psi(\xi) = f_0(\xi)s'(\xi)/(s(\xi)-s(z))$.

Учитывая свойство 1 функции f_0, по формуле Грина получаем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \psi(\xi)dA(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{R_\xi} \psi'_{\overline{\xi}}(\xi)dA(\xi). \tag{7}$$

При этом в (7) кривая $\Gamma_{1+\varepsilon}$ проходится в положительном направлении. Из свойства 1 и непрерывности функции ψ в $\overline{Q}_t\setminus\overline{D}$ следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{1+\varepsilon}} \psi(\xi)\,dA(\xi) \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \psi(\xi)\,dA(\xi). \tag{8}$$

Далее, $\psi'_{\overline{\xi}}(\xi) = f'_{0\overline{\xi}}(\xi)s'(\xi)/(s(\xi)-s(z))$ при $\xi \in \overline{Q}_t\setminus\overline{D}$, тогда свойство 2 функции f_0 в силу условий на границу области D и свойства (1) модуля непрерывности ω, как это проверялось в [2], влечет соотношение

$$-\frac{1}{\pi}\int_{R_\varepsilon} \psi'_{\overline{\xi}}(\xi)\,dA(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{\overline{Q}_t\setminus\overline{D}} \psi'_{\overline{\xi}}\,dA(\xi) + \frac{1}{\pi}\int_{(\overline{Q}_t\setminus\overline{D})\setminus R_\xi} \psi'_{\overline{\xi}}\,dA(\xi) \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{}$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{\overline{Q}_t\setminus\overline{D}} \psi'_{\overline{\xi}}\,dA(\xi). \tag{9}$$

Теперь (8), (9) и формула Коши влекут

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\overline{Q}_t\setminus\overline{D}} \frac{f'_{0\overline{\xi}}(\xi)s'(\xi)}{s(\xi)-s(z)}\,dA(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)s'(\xi)}{s(\xi)-s(z)}\,d\xi = f(z),$$

что требуется в (6). □

Положим $G = s(D)$, функция Φ конформно отображает $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ на $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, ψ — обратное к Φ отображение.

Для $t \in \overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G}, \Theta \in [0;2\pi], R > 1$ положим

$$t_{R,\Theta} \overset{\mathrm{def}}{=} \psi(Re^{-i\Theta}\Phi(t), t_R \overset{\mathrm{def}}{=} t_{R,0} = t_R(t). \tag{10}$$

Положим $k \geq 2$, и пусть $q = 8k+2, C_{n,q}$ выбрано из условия:

$$C_{n,q}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q d\Theta = 1.$$

Для $w \in \overline{G}, t \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}$ полагаем $R = 1 + \frac{1}{n}$ и $K_n(w,t,R,\Theta) \overset{\mathrm{def}}{=} \displaystyle\sum_{\nu=1}^{k} \frac{(t_{R,\Theta}-t)^{\nu-1}}{(t_{R,\Theta}-w)^{\nu}}$,

$$\Pi_n(w,t) = C_{n,q}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q K(w,t,R,\Theta)\,d\Theta,$$

$$\mathbf{P}_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)) = -\frac{1}{\pi} \int_{\overline{Q}_t \setminus \overline{D}} f'_{0\overline{\xi}}(\xi) s'(\xi) \Pi_n(s(z), s(\xi))\, dA(\xi). \tag{11}$$

4. Оценка приближения. Пусть $U_j = s(\Omega), t_j = s(z_j), j = 1\ldots m, L = s(T)$. Внешние по отношению к G углы в точках t_j равны 2π, угол наклона ориентированной касательной к L по отношению к положительному направлению вещественной оси удовлетворяет условию, аналогичному (3) с той же σ и некоторым $b_2 > 0$ на дугах L с концами в точках t_j, попадающих в окрестности $V_j, 1 \le j \le m$.

Выберем $\tau_j \in U_j$ и соединим точки τ_j и t_j кривой $l_j \subset U_j \cap G$, для которой выполнено условие (3) с тем же τ и постоянной $b_3 > 0$.

Условие (3), наложенное на дуги $\Gamma(z^0_{2j-1}, z_j)$ и $\Gamma(z_j, z, 0_2 j)$ и, как было отмечено выше, справедливое для дуг $s(\Gamma(z^0_{2j-1}, z_j)), s(\Gamma(z_j, z^0_{2j}))$, позволяет определить такую кривую l_j. Для $\alpha \ne \beta$ и кривой l, соединяющей α и β, положим

$$r_{\alpha,\beta}(t) = \frac{2t}{\beta-\alpha} - \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} + \sqrt{\left(\frac{2t}{\beta-\alpha} - \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 - 1}. \tag{12}$$

В формуле (12) $t \notin l$, при $t \to \infty$, $r_{\alpha,\beta}(t) = \frac{4t}{\beta-\alpha} + O(1)$. Теперь при $m \ge 2$ пусть $t'_2 = r_{\tau_1,t_1}(t_2), \tau'_2 = r_{\tau_1,t_1}(\tau_2), l'_2 = r_{\tau_1,t_1}(l_2)$.

В случае $m = 1$ полагаем $G'_1 \stackrel{\text{def}}{=} r_{\tau_1,t_1}(G)$. Если $m = 2$, то $G'_2 \stackrel{\text{def}}{=} r_{\tau_2,t_2}(G'_1)$. Если $m > 2$, то при $k \le m-1$

$$\tau'_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} r'_{\tau'_k,t'_k}(r_{\tau'_{k-1},t'_{k-1}}(\ldots(r_{\tau_1,t_1}(\tau_{k+1}))), \tag{13}$$

$$t'_{k+1} \stackrel{\text{def}}{=} r'_{\tau'_k,t'_k}(r_{\tau'_{k-1},t'_{k-1}}(\ldots(r_{\tau_1,t_1}(t_{k+1}))), \tag{14}$$

$$G'_k = r'_{\tau'_k,t'_k}(G'_{k-1}), l'_k = r_{\tau'_k,t'_k}(l_k), k \le m. \tag{15}$$

Для построенных областей $G'_1 \ldots G'_m$ количество точек, в которых внешний по отношению к области угол на границе равен 2π, при переходе от G'_k к G'_{k+1} уменьшается на единицу, в области G'_m нет внешних по отношению к ней углов, равных 2π. Формула (12) при ее последовательном применении в (13), (14) показывает, что на дугах ∂G_{m_k} с концами в точках, получаемых из точек $t^0_{2k-1} \stackrel{\text{def}}{=} s(z^0_{2k-1})$, путем применения формул (13) и (14) и содержащими образы точек t_k, выполнено условие (3) с той же σ и некоторой постоянной b_4.

Однолистность функции s в параллелограмме Q_t и свойства функции $r_{\alpha,\beta}(t)$ показывают, что вся граница $\partial G'_m$ области G'_m удовлетворяет условию (2) с некоторым $b_5 > 0$. Пусть функция Φ_m конформно отображает область $\mathbb{C} \setminus \overline{G}'_m$ на $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, так что $\Phi_m(\infty) = \infty$, $\Phi'_m(\infty) > 0$, Ψ_m — обратное отображение. Пусть $\tilde{t} = \tau_{\tau'_m,t'_m}(\ldots(\tau_{\tau_1,t_1}(t_k))\ldots), 1 \le k \le m$. Анализ действия отображений $\tau_{\tau'_k}, t'_k$ показывает, что в некоторых окрестностях V_k точек t_k с постоянной $b_5 > 0$ и σ из соотношения (3) выполнено свойство

$$|\Theta(T_2) - \Theta(T_1)| \le b_5 |T_2 - T_1|^\sigma, T_1, T_2 \in \partial G'_m \partial V_k,$$

где $\Theta(T)$ — угол между ориентированной касательной к $\partial G'_m$ в точке T к положительным направлениям вещественной оси. Тогда локальный вариант теоремы Келлога (глобальный вариант см. в [6, гл. 10; 7, гл. 3]) является следствием глобального и влечет соотношение

$$|\Phi'_m(T_2) - \Phi'_m(T_1)| \le b_6 |T_2 - T_1|^\sigma, T_1, T_2 \in (\mathbb{C} \setminus \overline{G}'_m) \cap V_k. \tag{16}$$

Из [16], как показано в [11], следует, что для $t \in S(\Gamma(z_{2j-1}^0, z_j)) \cup S(\Gamma(z_j, z_{2j}^0)$ при $R = 1+h$, при $0 < h < h_0$ выполнено

$$|z - t_R| \asymp h(\sqrt{|t - t_j|} + h), \tag{17}$$

где $a \asymp b$ означает $c'a \le b \le c''a$ с некоторыми постоянными c', c''. Из (17) находим, что для T_1 и $T_2 \in S(\Gamma(z_{2j-1}^0, z_j)) \cup S(\Gamma(z_j, z_{2j})$ с некоторой постоянной b_7 выполняется условие

$$|t_R(T_2) - T_2| \le b_7 |t_R(T_1) - T_1|^{1/2} (|T_2 - T_1| + |t_R(T_1) - T_1|)^{1/2}, R = 1+h, 0 < h < h_0. \tag{18}$$

Свойство (2), справедливое для области G', влечет существование $\varkappa, 0 < \varkappa < 1$, такого, что для $T_1, T_2 \in \partial G'_m$ с некоторой $b_8 > 0$

$$|\Psi_m(R\Phi_m(T_2)) - T_2| \le b_8 |\Psi_m(R\Phi_m(T_1)) - T_1|^{\varkappa} (|T_2 - T_1| + |\Psi(R\Phi_m(T_1)) - T_1|^{1-\varkappa}. \tag{19}$$

При уменьшении $\varkappa$ соотношение (19) остается верным, возможно, с увеличением постоянной b_8, поэтому, не уменьшая общности, считаем, что $0 < \varkappa \le \frac{1}{2}$. Для $t^* \in \partial G \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_j$ в силу свойств функции $r_{\alpha,\beta}$ при $j < R \le 2$ справедливо соотношение

$$|t_R^* - t^*| \asymp |\Psi_m(R\Phi_m(T^*)) - T^*|, \tag{20}$$

где

$$T^* = r_{\tau'_m, t'_m}(r_{\tau'_{m-1}, t'_{m-1}}(\ldots (r_{\tau_1, t}(t^*)) \ldots) \tag{21}$$

и при $t'_1, t'_2 \subset \partial G \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_j$, для T_1^*, T_2^*, получаемых из t_1^*, t_2^* по формуле (21), выполнено:

$$|t_1^* - t_2^*| \asymp |T_2^* - T_1^*|. \tag{22}$$

В таком случае (19), (20), (22) для $t'_1, t'_2 \in \partial G \setminus \bigcup_{i=1}^{m} U_j$ дают оценку

$$|t_{2,R}^* - t_2^*| \le b_9 |t_{1,R}^* - t_1^*|^{\varkappa} (|t_2^* - t_1^*| + |t_{1,R}^* - t_1^*|)^{1-\varkappa}. \tag{23}$$

Учитывая (18), (23) и предположение $0 < \varkappa \le \frac{1}{2}$, получаем, что оценка (23) справедлива при любых $t_1^*, t_2^* \in \partial G$.

Нам понадобятся следующие результаты [8, 9; 10, гл. 9].

Лемма 4. *Существует абсолютная постоянная $c > 1$ такая, что для $R = 1 + \frac{1}{n}$, $n \ge 1, |\Theta| \le \pi$ при $t \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}$, $r \in G$ справедливы оценки*

$$c^{-1}(n|\Theta| + 1)^{-4} |t_R - \tau| \le |t_{R,\Theta} - \tau| \le c(n|\Theta| + 1)^4 |t_R - \tau|. \tag{24}$$

Лемма 5. [10, гл. 9; 11, гл. 2]. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — жорданова область $z_0 \in \partial\Omega$, f аналитична в Ω, непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет условию*

$$|f(z)| \le M \left(1 + \frac{|z - z_0|}{\rho}\right)^A \tag{25}$$

при $A > 0$ и $z \in \partial\Omega$. Тогда при $z \in \overline{\Omega}, |z - z_0| \le \rho$ справедливо соотношение

$$|f(z)| \le C_0^A M, \tag{26}$$

где C_0 — абсолютная постоянная.

Применим вначале лемму 5. Выберем $\widetilde{t} \in G$, пусть Ω — область, получаемая из области $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ отображением $z = \frac{1}{t-\widetilde{t}}$. Определим функции

$$F(t) = \frac{t_R - t}{\Phi(t)}, t \in \mathbb{C} \setminus \overline{G}, R = 1 + \frac{1}{n}. \tag{27}$$

Имеем соотношение

$$\frac{\Phi(t)}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} \Phi'(\infty), \frac{\psi(\xi)}{\xi} \xrightarrow[\xi\to\infty]{} \psi'(\infty) = \frac{1}{\Phi'(\infty)},$$

$$\frac{t_R}{t} = \frac{\psi(R\Phi(t))}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{} R, F(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{R-1}{\Phi'(\infty)}.$$

Поэтому функция F аналитична в $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ и непрерывна в $\mathbb{C} \setminus G$.

Пусть $t_0 \in \mathbb{C}\setminus\overline{G}$, $t_0^* \in \partial G$, t_0^* — ближайшая к t_0 точка на границе ∂G. Для любых точек $t_1^*, t_2^* \in \partial G$ справедливо неравенство (23). При $z \in \overline{\Omega}$ положим $g(z) = F(\frac{1}{z} + \widetilde{t})$, тогда g аналитична в Ω и непрерывна в $\overline{\Omega}$. Поскольку при $t_1^*, t_2^* \in \partial G$ имеем

$$|\frac{1}{t_2^* - \widetilde{t}} - \frac{1}{t_1^* - \widetilde{t}}| \asymp |t_2^* - t_1^*| \quad \text{и} \quad |\Phi(t)| = 1,$$

при $t \in \partial G$, то (23) можно переписать в виде

$$\left|\frac{t_{2,R}^* - t_2^*}{\Phi(t_2^*)}\right| \le b_9 \left|\frac{t_{1,R}^* - t_1^*}{\Phi(t_1^*)}\right|^{\varkappa} \left(|t_2^* - t_1^*| + |\frac{t_{1,R}^* - t_1^*}{\Phi(t_1^*)}|\right)^{1-\varkappa}.$$

Отсюда находим соотношение:

$$|g(z_2^*)| \le b_{10}|g(z_1^*)|^{\varkappa}(|z_2^* - z_1^*| + |g(z_1^*)|)^{1-\varkappa}, \tag{28}$$

где $z_j^* = \frac{1}{t_j^* - \widetilde{t}}, j = 1, 2, z_1^*, z_2^* \in \partial\Omega$.

Положим:

$$z_0 = \frac{1}{t_0 - \widetilde{t}}, z_0^* = \frac{1}{t_0^* - \widetilde{t}}, \rho = |z_0 - z_0^*|.$$

Тогда $\rho \asymp |t_0 - t_0^*|$.

Пусть $M = b_{10}|g(z_0^*)|^{\varkappa}(\rho + |g(z_0^*)|)^{1-\varkappa}$. Из (28) следует, что при $z_2^* \in \partial\Omega, |z_2^* - z_0^*| \le \rho$ имеем оценку $|g(z_2^*)| \le M$. Если $|z_2^* - z_0^*| > \rho$, то (28) влечет

$$|g(z_2^*)| \le b_{10}|g(z_0^*)|^{\varkappa}(|z_2^* - z_0^*| + |g(z_0^*)|)^{1-\varkappa} = b_{10}|g(z_0^*)|^{\varkappa} \times$$

$$\times(\rho + |g(z_0^*)|)^{1-\varkappa} \cdot \left(\frac{|z_2^* - z_0^*| + |g(z_0^*)|}{\rho + |g(z_0^*)|}\right)^{1-\varkappa} \le M(1 + \frac{|z_2^* - z_0^*}{\rho})^{1-\varkappa}. \tag{29}$$

Из (28) следует, что к функции g и точкам z_0^* и z_0 можно применить лемму 5, тогда (26) влечет

$$|g(z_0| \le C_0^{1-\varkappa} M = C_0^{1-\varkappa} b_{10}|g(z_0^*)|^{\varkappa}(\rho + |g(z_0^*)|)^{1-\varkappa}. \tag{30}$$

Предположим, что $|t_0 - t_0^*| \le b_{11}$, тогда для функции Φ выполнена оценка $|\Phi(t_0)| \le b_{12}$. Теперь из (27) и (30) находим соотношение

$$|t_{0R} - t_0| = |\Phi(t_0)| \cdot |F(t_0)| \le b_{12}|g(z_0)|^{\varkappa}(|t_0^* - t_0| + |t_{0R}^* - t_0^*|)^{1-\varkappa} \le$$

$$\le b_{14}|F(t_0^*)|^{\varkappa}(|t_0^* - t_0| + F(t_0^*)|)^{1-\varkappa} = b_{14}|t_{0R}^* - t_0^*|^{\varkappa}(|t_0^* - t_0| + |t_{0R}^* - t_0^*|)^{1-\varkappa}. \quad (31)$$

Пусть $t_2 \in \partial G, t_2^* \ne t_0^*$.

Если $|t_2^* - t_0^*| \le 2max(|t_{2R}^* - t_2^*|, |t_{0R}^* - t_0^*|)$, то применение (23) к t^* и t_0^* дает соотношение $|t_{2R}^* - t_2| \asymp |t_{0R}^* - t_0^*|$. Тогда (31) влечет

$$|t_{0R} - t_0| \le b_{15}|t_{2R}^* - t_2^*|^{\varkappa}(|t_2^* - t_0| + |t_{2R}^* - t_2^*|)^{1-\varkappa}. \quad (32)$$

Если же $|t_2^* - t_0| > 2max(|t_{2R}^* - t_2|, |t_{0R}^* - t_0^*|)$, то (23) и (31) дают соотношения

$$|t_{0R}^* - t_0^*| \le b_9'|t_{2R}^* - t_2^*|^{\varkappa}(|t_0^* - t_2|)^{1-\varkappa},$$

$$|t_{0R} - t_0| \le b_{14}'|t_{2R}^* - t_2^*|^{\varkappa}(|t_0^* - t_2|^{1-\varkappa})^{\varkappa}(|t_2^* - t_0| + (|t_{0R}^* - t_0^*|)^{1-\varkappa} \le$$

$$\le b_{16}'|t_{2R}^* - t_2^*|^{\varkappa^2} \le b_{16}'|t_{2R}^* - t_2^*|^{\varkappa^2}(|t_2 - t_0| + |t_{2R}^* - t_2^*|))^{1-\varkappa^2}. \quad (33)$$

В соотношениях (33) предполагалось, что $|t_0^* - t_0| \ge |t_{0R}^* - t_0^*|$. Если $|t_0^* - t_0| \le |t_{0R}^* - t_0^*|$, то (31) влечет $|t_{0R} - t_0| \le b_{14}^{''}|t_{0R}^* - t_0^*|$.

Объединяя (32) и (33), получим, что для любых $t_2^* \in \partial G$ выполнена оценка (33) с некоторой постоянной b_{16}.

Выберем теперь $k : k \in \mathbb{N}, k > \frac{r+1}{\varkappa^2}$, например $k = [\frac{r+1}{\varkappa^2}] + 1$.

5. Окончание доказательства. Воспользуемся формулами (6) и (11), тогда при $z \in \partial D$ получим равенство

$$f(z) - P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)) = -\frac{1}{\pi}\int_{Q\setminus D} f_{0\overline{\xi}}'(\xi)s'(\xi)\left(\frac{1}{s(\xi) - s(z)} - C_{n,q}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q \times\right.$$

$$\left.\times\sum_{r=1}^{k}\frac{(t_{R,\Theta} - t)^{r-1}}{(t_{R,\Theta} - s(z))^r}\,d\Theta\right) dA(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{Q\setminus\overline{D}} f_{0\overline{\xi}}'(\xi)S'(\xi)\left(C_{n,q}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{s(\xi) - s(z)} - \sum_{r=1}^{k}\frac{(t_{R,\Theta} - t)^{r-1}}{(t_{R,\Theta} - s(z))^r}\right) d\Theta\right) dA(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_{Q\setminus\overline{D}} f_{0\overline{\xi}}'(\xi)s'(\xi)\times$$

$$\times\left(C_{n,q}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta})^q\left(\frac{(t_{R,\Theta} - t)^k}{(s(\xi) - s(z))(t_{R,\Theta} - s(z))}\right)^k d\Theta\right) dA(\xi). \quad (34)$$

В (34) для краткости полагаем $t = s(\xi)$, функции $t_{R,\Theta}$ определены в (10), там же определена функция $t_R, R = 1 + \frac{1}{n}$.

Применяя лемму 4, получаем оценку

$$C_{n,q}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q \cdot \left|\frac{(t_{R,\Theta} - t)^k}{(s(\xi) - s(z))(t_{R,\Theta} - s(z)})^k\right| d\Theta \le C^2 \cdot C_{n,q}\frac{1}{|s(\xi) - s(z)|}$$

$$\left|\left(\frac{t_R - t}{t_R - s(z)}\right)^k\right|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q (n|\Theta| + 1)^8\,d\Theta \le b_{17}\frac{1}{|s(\xi) - s(z)|}\left|\frac{t_R - t}{t_R - s(z)}\right|^k. \quad (35)$$

Из (34) и (35) находим, что

$$|f(z)-\mathbf{P}_n(\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z))|\le b_{17}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\overline{\Theta_r}\setminus\overline{D}}|f'_{0\xi}(\xi)||s'(\xi)|\frac{1}{|s(\xi)-s(z)|}\left|\frac{t_R-t}{t_R-s(z)}\right|^k dA(\xi). \tag{36}$$

Положим $s(z)=t_0^*\in\partial G$, $\rho=|t_{0R}^*-t_0^*|$ и пусть $\xi=\lambda(t)$ — обратное к $s(z)$ отображение. Заметим, что $|s'(\xi)|\asymp 1, \xi\in\overline{Q}_t$, тогда $|P'(t)|\asymp 1, t\in s(\overline{Q}_t)$. Применяя лемму 5, получим соотношение при t $\in s(\overline{Q}_t\setminus\overline{D})$:

$$\left|\frac{t_R-t}{t_R-s(z)}\right|^k\le b_{18}|t_{0R}^*-t_0^*|^{k\varkappa^2}(|t-t_0^*|+|t_{0R}^*-t_0^*|)^{(1-\varkappa^2)k}\cdot\left(\frac{1}{|t_R-t|+|t-t_0^*|}\right)^k. \tag{37}$$

Учтем, что $s'(\xi)\cdot|\lambda'(\tau)|^2=|\lambda'(\tau)|$ при $\tau=s(\xi)$, и пусть $M(\tau)=|f'_{0\overline{\xi}}(\lambda(\tau)|\cdot|\lambda'(\tau)|,\tau\in\overline{Q}_t$, тогда из (36) и (37) находим, что

$$|f(z)-\mathbf{P}_n(\mathfrak{P}(z),\mathfrak{P}'(z))|\le b_{19}\int_{s(\overline{Q}_t\setminus\overline{D})}M(\tau)\times$$

$$\times\frac{|t_{0R}^*-t_0^*|^{k\varkappa^2}}{|t-t_0^*|}\frac{(|t-t_0^*|+|t_{0R}^*-t_0^*|)^{(1-\varkappa^2)k}}{(|t_R-t|+|t-t_0^*|)^k}\,dA(t), \tag{38}$$

где $dA(\tau)$ — двумерная мера Лебега.

Для функции $M(\tau)$ по лемме 1 и однолистности функции s в $\overline{\Theta}_t$ выполнено условие

$$0\le M(\tau)\le C_f|\lambda(\tau)|dist^{r-1}(\lambda(\tau),\partial D))\omega(dist(\lambda(\tau),\partial D))\le$$
$$\le b_{20}dist^{r-1}(\tau,\partial G)\omega(dist(\tau,\partial G)),\tau\in s(\overline{Q}_t\setminus\overline{D}). \tag{39}$$

При оценке интеграла в (38) будем использовать следующий результат [3–5], поскольку граница области G и функция $\omega(s)$ удовлетворяют условиям, требующимся в этих работах. Положим $B_{\rho_0}(t)\stackrel{\text{def}}{=}\{\{\tau\in\mathbb{C}:|\tau-t|<\rho_0\}$.

Лемма 6. *Для любой функции M, заданной на множестве $\mathbb{C}\setminus\overline{G}$ и удовлетворяющей условиям (39), при $t_0^*\in\partial G$ и $\rho_0>0$ справедлива оценка*

$$\int_{B_{\rho_0}(t_0)}\frac{M(\tau)}{|\tau-t_0^*|}\,dA(\tau)\le C_M\rho_0^r\omega(\rho_0). \tag{40}$$

Положим $\rho=|t_{0R}^*-t_0^*|$. Применение леммы 5 к функциям t_R-t и $\frac{1}{t_R-t}$ показывает, что для $t\in\overline{B}_\rho(t_0^*)\setminus\overline{G}$ имеется соотношение $|t_R-t|\asymp\rho$, поэтому получается

$$\frac{|t-t_0^*|+|t_{0R}^*-t_0^*|}{|t-t_0^*|+|t_R-t|}\asymp 1, t\in\overline{B}_\rho(t_0^*)\setminus G. \tag{41}$$

Если $t\in\overline{B_{2^\nu\rho}(t_0^*)}\setminus\overline{B_{2^{\nu-1}\rho}}(t_0^*),\nu\ge 1$, то

$$\frac{|t-t_0^*|+|t_{0R}^*-t_0^*|}{|t-t_0^*|+|t_R-t|}\le 2,\frac{1}{|t-t_0^*|+|t_R-t|}\le\frac{1}{2^{\nu-1}\rho},$$

$$\frac{(|t-t_0^*|+|t_{0R}^*-t|)^{(1-\varkappa^2)k}}{(|t-t_0^*|+|t_R-t|)^k}\le 2^{(1-\varkappa^2)k}\cdot\frac{1}{(2^{\nu-1}\rho)^{\varkappa^2k}}. \tag{42}$$

Теперь

$$\int_{s(Q_t\setminus\overline{D})} M(t)\frac{|t_{0R}^*-t_0^*|^{k\varkappa^2}}{|t-t_0^*|}\frac{(|t-t_0^*|+|t_{0R}^*-t_0^*|)^{(1-\varkappa^2)k}}{|t-t_0^*|+|t_R-t|)^k}\,dA(t)=$$

$$=\int_{\ldots\cap\overline{B}_\rho(t_0^*)}\ldots+\sum_{\nu=1}^{\infty}\int_{\ldots\cap\overline{B}_{2^\nu\rho}(t_0^*)\setminus B_{2^{\nu-1}\rho}}\stackrel{\text{def}}{=}I_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}I_\nu. \tag{43}$$

Применяя оценки (40)–(42), получаем следующие неравенства:

$$I_0=\int_{S(\overline{Q}_t\setminus\overline{D})\cap\overline{B}_\rho(t_0^*)} M(t)\frac{|t_{0R}^*-t_0^*|^{k\varkappa^2}}{|t-t_0^*|}\frac{1}{|t-t_0^*|+|t_R-t|)^{\varkappa^2 k}}\times$$

$$\times\left(\frac{|t-t_0^*|+|t_{0R}^*-t_0^*|}{|t-t_0^*|+|t_R-t|}\right)^{(1-\varkappa^2)k}\cdot dA(t)\le b_{20}'\rho^{k\varkappa^2}\cdot\frac{1}{\rho^{k\varkappa^2}}\times$$

$$\times\int_{S(\overline{Q_t}\setminus\overline{D})\cap\overline{B}_{\rho_o}(t_0^*)} M(t)\cdot\frac{dA(t)}{|t-t_0^*|}\le b_{21}\rho^r\omega(\rho), \tag{44}$$

$$I_\nu=\int_{S(\overline{Q_t}\setminus\overline{D})\cap(\overline{B}_{2^\nu\rho}\setminus\overline{B}_{2^{\nu-1}\rho}\rho)} M(t)\frac{|t_{0R}^*-t_0^*|^{k\varkappa^2}}{|t-t_0^*|}\frac{1}{|t-t_0^*|+|t_R-t|)^{\varkappa^2 k}}\times$$

$$\times\left(\frac{|t-t_0^*|+|t_{0R}^*-t_0^*|}{|t-t_0^*|+|t_R-t|}\right)^{(1-\varkappa^2)k} dA(t)\le b_{22}'\rho^{k\varkappa^2}\cdot\frac{1}{(2^{\nu-1}\rho)^{k\varkappa^2}}\int_{S(\overline{Q_t}\setminus\overline{D})\cap(\overline{B}_{2^\nu}\setminus\overline{B}_{2^{\nu-1}}\rho)}\times$$

$$\times M(t)\frac{dA(t)}{|t-t_0^*|}\le b_{22}'\frac{1}{2^{\nu\varkappa^2}}\cdot(2^\nu\rho)^r\omega(2^\nu\rho)\le b_{22}\rho^r\omega(\rho)\cdot\frac{1}{2^{\nu(k\varkappa^2-r-1)}}. \tag{45}$$

В (45) мы воспользовались свойством любого модуля непрерывности: при $x_2>x_1>0$ имеем $\omega(x_2)\le 2\frac{x_2}{x_1}\omega(x_1)$. Из (43)–(45) заключаем, что

$$\int_{S(\overline{\Theta}_t\setminus\overline{D})} M(t)\frac{|t_{0R}^*-t_0^*|^{k\varkappa^2}}{|t-t_0^*|}\frac{(|t-t_0^*|+|t_{0R}^*-t_0^*|)^{(1-\varkappa^2)k}}{(|t-t_0^*|+|t_R-t|)^k}\,dA(t)\le$$

$$\le c'\sum_{\nu=1}^{\infty}\rho^r\omega(\rho)\cdot 2^{-\nu(k\varkappa^2-r-1)}\le c'\rho^r\omega(\rho), \tag{46}$$

поскольку $k\varkappa^2-r-1>0$.

Напомним, что $L=\partial G$. Положим $L_R=\{t\in\mathbb{C}: t=\Psi(R\Phi(\tau)),\tau\in L\}$.

Для области G, удовлетворяющей, как было отмечено в разделе 3, условиям, аналогичным условиям (2), (3) для области D и для $t_0^*\in L$, справедливо соотношение [8, 9]:

$$|t_{0R}^*-t_0^*|\asymp dist(t_0^*,L_R), 0<R\le 1. \tag{47}$$

Из (47) следует, что правую часть оценки (46) можно заменить на

$$c_1'dist^r(t_0^*,L_R)\cdot\omega(dist(t_0^*,L_R)),$$

где $R=1+\frac{1}{n}$.

По лемме 4 из [2] заключаем, что

$$\rho_{\frac{1}{n}}(z)\stackrel{\text{def}}{=}dist(z,\Gamma_{1+\frac{1}{n}})\asymp dist(s(z),L_{1+\frac{1}{n}}), z\in\Gamma. \tag{48}$$

Из (48), (47) и предыдущего рассуждения следует, что правую часть в (46) можно заменить на $c\rho^r_{\frac{1}{n}}(z)\omega(\rho_{\frac{1}{n}}(z))$ при $z \in \Gamma$. Тогда (38) и (46) доказывают теорему.

Литература

1. Ахиезер Н. И. *Элементы теории эллиптических функций.* Москва, Наука (1970).

2. Хаустов А. В., Широков Н. А. Полиномиальные приближения на замкнутых подмножествах эллиптических кривых. *Записки научных семинаров ПОМИ* **302**, 178–187 (2003).

3. Дынькин Е. М. Оценки аналитических функций в жордановых областях. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **73**, 70–90 (1977).

4. Dynkin E. M. The rate of polynomial approximation in the complex domain. *Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag* **864**, 90–142 (1981).

5. Dynkin E. M. The pseudoanalytic extension. *Journal d'Analyse Mathematique* **60**, 45–70 (1993).

6. Голузин Г. М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* Москва, Наука (1966).

7. Pommerenke Ch. Boundary Behavior of Conformal Maps. In: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **299** (1992).

8. Белый В. И., Миклюков В. М. Некоторые свойства конформных и квазиконформных отображений и прямые теоремы конструктивной теории функций. *Известия АН СССР. Серия математическая* **38** (6), 1343–1361 (1974). https://doi.org/10.1070%2FIM1974v008n06ABEH002150

9. Белый В. И. Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей. *Математический сборник* **102** (144), №3, 331–361 (1977). https://doi.org/10.1070/SM1977v031n03ABEH002304

10. Дзядык В. К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* Москва, Наука (1977).

11. Тамразов П. М. *Гладкие и полиномиальные приближения.* Киев, Наукова думка (1975).

12. Лебедев Н. А., Широков Н. А. О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами. *Известия АН Арм. ССР* **8** (4), 311–341 (1971).

Статья поступила в редакцию 30 мая 2022 г.;
доработана 20 августа 2022 г.;
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Синцова Ксения Анатольевна — аспирант; kseniasintlead@gmail.com
Широков Николай Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; nikolai.shirokov@gmail.com

Approximation by polynomials composed of Weierstrass doubly periodic functions*

K. A. Sintsova[1], *N. A. Shirokov*[1,2]

[1] HSE University, 16, ul. Soyuza Pechatnikov, St Petersburg, 190121, Russian Federation
[2] St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Sintsova K. A., Shirokov N. A. Approximation by polynomials composed of Weierstrass doubly periodic functions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 61–72.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.106 (In Russian)

The problem of describing classes of functions in terms of the rate of approximation of these functions by polynomials, rational functions, splines entered in the theory of approximation more than 100 years ago and still retains its relevance. Among a large number of problems

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00209).

related to approximation, we considered the problem of polynomial approximation in two variables of a function defined on the continuum of an elliptic curve in C^2 and holomorphic in its interior. The formulation of such a question led to the need to study the approximation of a function that is continuous on the continuum of the complex plane and analytic in its interior, using polynomials in doubly periodic Weierstrass functions and their derivatives. This work is devoted to the development of this topic.
Keywords: analytic functions, approximation, doubly periodic Weierstrass functions.

References

1. Ahiezer N. I. *Elements of the theory of elliptic functions*. Moscow, Nauka Publ. (1970). (In Russian)

2. Haustov A. V., Shirokov N. A. Polynomial approximation on closed subsets of elliptic curves. *Zapiski Nauchnyh Seminarov POMI* **302**, 178–187 (2003). (In Russian)

3. Dynkin E. M. Estimates of analytic functions in Jordan domains. *Zapiski Nauchnyh Seminarov LOMI* **73**, 70–90 (1977). (In Russian)

4. Dynkin E. M., The rate of polynomial approximation in the complex domain. *Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag* **864**, 90–142 (1981). (In Russian)

5. Dynkin E. M. The pseudoanalytic extension. *Journal d'Analyse Mathematique* **60**, 45–70 (1993).

6. Goluzin G. M. *Geometric theory of functions of complex variable*. Moscow, Nauka Publ. (1966). (In Russian)

7. Pommerenke Ch. Boundary Behavior of Conformal Maps. In: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **299** (1992).

8. Belyi V. I., Mikliukov V. M. Some properties of conformal and quasiconformal mappings and direct theorems of the constructive theory of functions. *Izvestia AN SSSR. Seria Mathemat.* **38** (6), 1343–1361 (1974). (In Russian) [Engl. transl.: *Isvestiya: Mathematics* **8** (6), 1323–1341 (1974). https://doi.org/10.1070%2FIM1974v008n06ABEH002150].

9. Belyi V. I. Conformal mapping and approximation of analytic functions in the domains with a quasiconformal boundary. *Mathemat. Sbornik* **102** (144), № 3, 331–361 (1977). (In Russian) [Engl. transl.: *Mathematics Sbornik* **31** (3), 289–317 (1977). https://doi.org/10.1070/SM1977v031n03ABEH002304].

10. Dziadyk V. K. *Introduction in the theory of uniform polynomial approximation of functions.* Moscow, Nauka Publ. (1977). (In Russian)

11. Tamrazov P. M. *Smoothness and polynomial approximation*. Kiev, Naukova dumka Publ. (1975).

12. Lebedev N. A., Shirokov N. A. Uniform approximation of functions on closed sets with a finite number of corner points with non-zero outer angles. *Izvestia AN Arm. SSR* **8** (4), 311–341 (1971).

Received: May 30, 2022
Revised: August 20, 2022
Accepted: September 8, 2022

Authors' information:

Ksenia A. Sintsova — kseniasintlead@gmail.com
Nikolay A. Shirokov — nikolai.shirokov@gmail.com