

## МЕХАНИКА

УДК 531

MSC 74B20

**Разрывные отображения и предельная нагрузка  
в краевых задачах нелинейной упругости***И. А. Бригаднов*Санкт-Петербургский горный университет,  
Российская Федерация, 199106, Санкт-Петербург, 21-я линия В. О., 2

**Для цитирования:** Бригаднов И. А. Разрывные отображения и предельная нагрузка в краевых задачах нелинейной упругости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 86–98.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.108>

Рассматривается краевая задача нелинейной упругости для отображения (деформации) в двух слабых постановках: в форме вариационного уравнения равновесия и в форме минимизации многомерного интегрального функционала энергии. С математической точки зрения обе постановки относятся к задачам функционального анализа, на языке которого обсуждаются вопросы их математической корректности. Методами вариационного исчисления на примере двух простых задач доказывается, что для некоторых нелинейно упругих моделей в соответствующих краевых задачах могут существовать отображения, имеющие разрывы типа проскальзывания, а также предельная нагрузка — такое конечное значение внешних сил, выше которого краевая задача вообще не имеет никакого решения. К таким моделям относятся упругие потенциалы линейного роста по модулю градиента отображения, например широко известная статистическая модель Бартенева — Хазановича и феноменологическая модель Трелора. Обсуждается взаимосвязь этих эффектов, а также отмечается, что полученные результаты необходимо учитывать при практическом использовании упругих потенциалов линейного роста по модулю градиента отображения. На примере задачи об осесимметричном кручении или растяжении круглого цилиндра аналитически строятся оценки снизу для предельной нагрузки методами вариационного исчисления и теории оптимизации. Анализ полученных соотношений показывает, что для упругих потенциалов степенного роста с показателем  $p$  характерно степенное упрочнение с показателем  $p - 1$ . При линейном росте удельной энергии деформации по модулю градиента деформации наблюдается эффект насыщения, что отвечает предельной нагрузке. Указанное поведение характерно для краевых задач деформационной теории

пластичности, где также существует предельная нагрузка при нулевом упрочнении, т. е. для идеальной упругопластичности.

*Ключевые слова:* нелинейная упругость, вариационные постановки, разрывные отображения, предельная нагрузка.

**1. Введение.** Решение краевых задач нелинейной упругости представляет большой интерес как для теории, так и для практики. В настоящее время существует множество моделей нелинейной упругости [1–4]. Адекватность и область применения каждой модели должны основываться на строгой корреляции экспериментальных данных и решений соответствующих краевых задач. Поэтому так важен анализ математической корректности краевых задач нелинейной упругости и разработка адекватных численных методов для их практического решения.

Традиционно краевая задача нелинейной упругости формулируется для отображения (деформации) в слабой (вариационной) форме фундаментального уравнения равновесия [1, 3], соответствующего принципу возможных отображений, или как вариационная задача минимизации потенциальной энергии деформации для гиперупругих материалов [2, 3, 5]. Обе постановки относятся к задачам функционального анализа, в частности вариационного исчисления для многомерных интегральных функционалов. Поэтому соответствующий аппарат является наиболее адекватным для исследования математической корректности краевых задач нелинейной упругости.

Существуют модели нелинейной упругости, для которых краевая задача в форме минимизационной вариационной проблемы соответствует классу хорошо исследованных задач вариационного исчисления для многомерных интегральных функционалов линейного роста [6, 7]. К таким моделям относятся упругие потенциалы линейного роста по модулю градиента отображения, например широко известная статистическая модель Бартенева — Хазановича [8] (см. Приложение) и феноменологическая модель Трелоара [1, 4]. На примере двух простых краевых задач нелинейной упругости для упругого потенциала Бартенева — Хазановича методами вариационного исчисления показывается, что может существовать предельная нагрузка, а также отображение, имеющее сильный разрыв типа проскальзывания без нарушения сплошности, т. е. без появления новой свободной поверхности. Подробно обсуждается взаимосвязь этих эффектов и указывается, что полученные результаты необходимо учитывать при практическом применении упругих потенциалов линейного роста по модулю градиента отображения.

Для обобщенной модели Трелоара аналитически исследована краевая задача осесимметричного деформирования круглого цилиндра, ранее рассмотренная в работе [11] при больших кручениях. Установлено, что для упругих потенциалов степенного роста с показателем  $p$  характерно степенное упрочнение с показателем  $p - 1$ . Для показателя  $p = 1$ , т. е. при линейном росте упругого потенциала по модулю градиента отображения, наблюдается эффект насыщения, что отвечает предельной нагрузке. Указанное поведение характерно для краевых задач деформационной теории пластичности Генки, где также существует предельная нагрузка и разрывы типа проскальзывания при нулевом упрочнении, т. е. для идеальной упруго-пластичности [9, 10, 12].

В заключение отмечается, что в краевых задачах нелинейной упругости с потенциалами линейного роста по модулю градиента отображения конечно-элементная

аппроксимация неизбежно приведет к плохообусловленной конечномерной проблеме, для численного решения которой требуются специальные алгоритмы регуляризации.

**2. Краевая задача нелинейной упругости.** Пусть деформируемое твердое тело в отсчетной (недеформированной) конфигурации занимает ограниченную Липшицеву область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Актуальная (деформированная) конфигурация описывается отображением (деформацией)  $\mathbf{x} = \{x_i\} \mapsto \mathbf{X} = \{X^\alpha\} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  с градиентом  $\nabla \mathbf{X} = \mathbf{F}^T = \{F_i^\alpha\} : \Omega \rightarrow \mathbb{M}_+^3$ , где  $\nabla$  — дифференциальный вектор-оператор Гамильтона в отсчетной конфигурации, верхний индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования, а множество  $\mathbb{M}_+^3 = \{\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \det(\mathbf{F}) > 0\}$  матриц  $3 \times 3$  с положительным определителем описывает отображения, сохраняющие ориентацию и локальную обратимость [1–4]. Здесь и далее нижние римские и верхние греческие индексы отвечают представлению векторов и тензоров в отсчетном и актуальном ортонормированных базисах соответственно. Актуальный базис повернут относительно отсчетного базиса тензором поворота из мультипликативного разложения градиента отображения (см. Приложение).

Конечная деформация описывается энергетической парой  $(\mathbf{F}, \Sigma)$ , где  $\Sigma = \{\Sigma_i^\alpha\}$  — первый несимметричный тензор номинальных напряжений Пиолы — Кирхгофа. Хорошо известно, что симметричный тензор истинных напряжений Коши в актуальной конфигурации имеет вид  $\sigma = \{\sigma^{\alpha\beta}\} = \det(\mathbf{F})^{-1} \Sigma \cdot \mathbf{F}$  [1–4]. Здесь точка обозначает одинарное скалярное произведение тензоров в отсчетном базисе.

В самом общем случае в стационарных процессах изотропный и однородный материал описываются тензор-функцией реакции (определяющим соотношением)  $\Sigma = \Sigma(\mathbf{F})$ , удовлетворяющей следующим ограничениям для любого  $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$ :

$$a + b|\mathbf{F}|^{p-1} \leq |\Sigma(\mathbf{F})| \leq c(1 + |\mathbf{F}|^{p-1}), \quad (1)$$

где  $|\mathbf{A}| = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})^{1/2}$  — модуль (интенсивность или норма) тензора второго ранга  $\mathbf{A}$ ,  $c \geq b > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 1$ . Здесь и далее две последовательные точки отвечают двойному скалярному произведению (свертке) тензоров второго ранга в соответствующих базисах. Для несжимаемых материалов  $\det(\mathbf{F}) = 1$ , а для сжимаемых — требуется выполнение естественного условия: для аннигиляции объема необходима бесконечная сила  $|\Sigma(\mathbf{F})| \rightarrow \infty$  при  $\det(\mathbf{F}) \rightarrow +0$  [1–4]. Также предполагается, что в отсчетной конфигурации материал находится в натуральном состоянии, т. е.  $\Sigma(\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ , где  $\mathbf{I}$  — единичный, а  $\mathbf{0}$  — нулевой тензоры второго ранга [1–4]. Необходимо отметить, что параметр  $p=1$  отвечает специальным материалам, описываемым, например, статистической моделью Бартенева — Хазановича (см. приложение).

Пусть тело подвергается следующим внешним воздействиям: в объеме действует «мертвая» сила  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , на части границы приложена «мертвая» поверхностная сила  $\mathbf{g} : \Gamma^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , а также задано отображение части границы  $\mathbf{X}^\gamma : \Gamma^0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , где  $\text{area}(\Gamma^0) > 0$ ,  $\Gamma^0 \cup \Gamma^1 = \partial\Omega$  и  $\Gamma^0 \cap \Gamma^1 = \emptyset$ . При самых общих ограничениях на область  $\Omega$  существует отображение  $\mathbf{X}^0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  такое, что  $\mathbf{X}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^\gamma(\mathbf{x})$  для  $\mathbf{x} \in \Gamma^0$  [2, 3].

Краевая задача нелинейной упругости может быть поставлена в слабой форме, а именно, для любого  $\mathbf{v} \in V^0$  искомое отображение  $\mathbf{X} \in V^0 + \mathbf{X}^0$  удовлетворяет основному вариационному уравнению равновесия:

$$\int_{\Omega} \Sigma(\nabla \mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{v}) \, d\Omega = L(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{v}), \quad (2)$$

$$L(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} A(\mathbf{f}, \mathbf{v}) d\Omega + \int_{\Gamma^1} A(\mathbf{g}, \mathbf{v}) d\gamma, \quad A(\mathbf{q}, \mathbf{v}) = \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{v}} \mathbf{q} \cdot d\mathbf{v},$$

где  $V^0 = \{\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \mathbf{x} \in \Gamma^0\}$  — множество допустимых вариаций отображения;  $A(\mathbf{q}, \mathbf{v})$  — удельная работа внешней силы  $\mathbf{q}$  на  $\mathbf{v}$  ( $\mathbf{q} = \mathbf{f}, \mathbf{g}$ ). Здесь точка обозначает скалярное произведение векторов. Вариационное уравнение (2) полностью соответствует принципу возможных перемещений в теоретической механике [13].

Для гиперупругих материалов существует скалярная функция удельной энергии деформации (упругий потенциал)  $W : \mathbb{M}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$  такая, что  $\Sigma_i^\alpha(\mathbf{F}) = \partial W(\mathbf{F}) / \partial F_i^\alpha$  для любого  $\mathbf{F} \in \mathbb{M}_+^3$  и  $W(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty$  при  $\det(\mathbf{F}) \rightarrow +0$ , т. е. для аннигиляции объема необходима бесконечная энергия [1–4]. В этом случае краевая задача нелинейной упругости ставится в форме следующей вариационной проблемы [2, 3]:

$$\mathbf{X}^* = \arg \inf \{I(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in V^0 + \mathbf{X}^0\}, \quad (3)$$

$$I(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} W(\nabla \mathbf{X}) d\Omega - L(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{X}).$$

**3. О математической корректности краевых задач нелинейной упругости.** Основной проблемой нелинейной упругости является неединственность решения обеих краевых задач (2) и (3). Может существовать несколько устойчивых и неустойчивых решений вариационного уравнения (2). В задаче (3) может существовать несколько локальных минимумов, но может отсутствовать глобальный минимум, что будет показано далее. Неединственность решения краевой задачи нелинейной упругости и, как следствие, эффект бифуркации решения являются фундаментальными эффектами, наблюдаемыми в натурных экспериментах [1].

Математическая корректность задач (2) и (3) обсуждается во многих работах. Однако в настоящее время не существует системного подхода к существованию слабых решений в краевых задачах нелинейной упругости, корректных с физической точки зрения.

Теорема о неявной функции [3] является основой для анализа проблемы (2) в локальном случае для краевой задачи в перемещениях. Однако надо помнить, что теорема о неявной функции не работает в функциональных пространствах типа  $W^{1,p}$ , подходящих для слабых решений, поскольку дифференцируемость нелинейного отображения является проблемой. Для применения этой теоремы необходимо потребовать принадлежность отображения более узкому пространству  $W^{2,p}$  с  $p > 3$ . Более того, известно существование глобальных континуумов решений. Но эти результаты основаны на топологических методах, которые не позволяют решить проблему существования решения задачи (2), выходящей за рамки теоремы о неявной функции.

Поиск отображения, на котором достигается глобальный минимум энергии в задаче (3), также сталкивается с чисто математическими проблемами. Дело в том, что никто не знает, как построить первую вариацию функционала в задаче (3), иначе бы все свелось к тому, что глобальный минимизатор был бы слабым решением основного уравнения равновесия (2). А причина здесь состоит в том, что прямой метод вариационного исчисления допускает глобальный минимизатор с нулевым определителем градиента отображения на множестве меры ноль. Соответственно, удельная энергия деформации может быть бесконечной на множестве меры ноль [3].

Для вариационной задачи (3) доказана классическая теорема существования в работе Дж. Болла [2] для поливыпуклых упругих потенциалов, имеющих рост по модулю градиента отображения не ниже квадратичного, т. е. для параметра  $p \geq 2$  в условиях (1). Введенное понятие поливыпуклости для функций тензорного аргумента является чисто математическим и не связано с каким-либо физическим законом. Однако именно это свойство обеспечивает неединственность решения краевой задачи нелинейной упругости, наблюдаемую в натуральных экспериментах.

На практике широко используются потенциалы линейного роста по  $|\mathbf{F}|$ . Например, статистически построенный потенциал Бартенева — Хазановича [8] описывает каучукоподобные сшитые полимеры, работающие в воде или масле (см. Приложение). Для потенциалов линейного роста в задаче (3) может существовать предельная нагрузка или отображение с разрывами типа проскальзывания, что легко доказывается методами вариационного исчисления на следующих двух примерах.

**Пример 1.** Пусть в твердом теле имеется круглое сквозное отверстие длины  $l$  и радиуса  $b$  ( $l \gg b$ ). В это отверстие соосно вставлен длинный круглый жесткий стержень радиусом  $a < b$ . Свободное пространство отверстия заполнено упругим материалом, закрепленным по радиусам  $a$  и  $b$ . К жесткому стержню прикладывается осевая сила  $P_z$ .

Если упругий материал однороден и изотропен, тогда согласно осевой симметрии и модели антиплоского сдвига деформированная конфигурация наполнителя описывается следующими соотношениями в цилиндрических координатах  $(\rho, \phi, z)$ :

$$\mathbf{X}(a\rho, \phi, z) = \mathbf{x}(ar(\rho), \phi, z + aw(\rho)),$$

$$(\nabla \mathbf{X})^T = \mathbf{F}(r, w) = \begin{pmatrix} r' & 0 & 0 \\ 0 & r/\rho & 0 \\ w' & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\rho \in [1, \eta]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$ ,  $z \in [0, l]$  и  $\eta = b/a > 1$  — безразмерный геометрический параметр.

Пусть материал описывается упругим потенциалом Трелоара [1, 4]:

$$W(\mathbf{F}) = \sqrt{3}\mu \left( |\mathbf{F}| - \sqrt{3} \right) + k_0 q(\det(\mathbf{F})), \quad (4)$$

где  $\mu$  и  $k_0$  — сдвиговый и объемный модули при малых деформациях соответственно [3]. Здесь функция сжимаемости  $q(J) \geq 0$  — гладкая, выпуклая и удовлетворяет естественным условиям:  $q(1) = q'(1) = 0$  и  $q(J) \rightarrow +\infty$  при  $J \rightarrow +0$  [1–4].

В этом случае вариационная задача (3) принимает вид

$$(r^*, w^*) = \arg \inf \{ I(r, w) : (r, w) \in V \}, \quad (5)$$

$$I(r, w) = \int_1^\eta \left[ \left( 1 + r^2/\rho^2 + r'^2 + w'^2 \right)^{1/2} + K q(r'r/\rho) \right] \rho d\rho - D_z w(1),$$

$$V = \left\{ (r, w) \in (W^{1,1}(1, \eta))^2 : r(1) = 1, r(\eta) = \eta, w(\eta) = 0 \right\},$$

где  $K = k_0/(\sqrt{3}\mu)$  и  $D_z = P_z/(2\sqrt{3}\pi\mu a l)$  — безразмерные параметры.

Для последовательности допустимых функций  $(r_m, w_m) \in V$ , имеющих например, простейший вид

$$r_m \equiv \rho, \quad w_m = m \left( \frac{\eta - \rho}{\eta - 1} \right), \quad m \in \mathbb{N},$$

справедливы следующие оценки для функционала  $I(r, w)$ :

$$m \left( \frac{\eta + 1}{2} - D_z \right) < I(r_m, w_m) \leq m \left( \frac{\eta + 1}{2} - D_z \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} (\eta^2 - 1).$$

Как результат,  $I(r_m, w_m) \rightarrow -\infty$  при  $m \rightarrow +\infty$ , если  $D_z > D_z^* = (\eta + 1)/2$ . Этот эффект показывает, что вариационная задача (5) может не иметь глобального минимизатора, что отвечает существованию предельной нагрузки. В данной задаче это величина приведенной продольной силы  $D_z^*$ . Аналогично можно найти предельную нагрузку для случая поворота стержня вокруг оси внешним моментом. Общая теорема о существовании предельной нагрузки для гиперупругих материалов с упругими потенциалами линейного роста по  $|\mathbf{F}|$  доказана в работе [5].

**Пример 2.** Пусть в примере 1 задано кинематическое осевое перемещение жесткого стержня на величину  $aw^0$ . Если упругий наполнитель является несжимаемым, тогда его деформированная конфигурация описывается следующими соотношениями в цилиндрических координатах  $(\rho, \phi, z)$ :

$$\mathbf{X}(a\rho, \phi, z) = \mathbf{x}(a\rho, \phi, z + aw(\rho)),$$

$$(\nabla \mathbf{X})^T = \mathbf{F}(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ w' & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для упругого потенциала (4) вариационная задача (3) принимает вид

$$w^* = \arg \inf \{ I(w) : w \in V \}, \quad (6)$$

$$I(w) = \int_1^\eta (3 + w'^2)^{1/2} \rho d\rho,$$

$$V = \{ w \in W^{1,1}(1, \eta) : w(1) = w^0, w(\eta) = 0 \}.$$

Эта вариационная задача является выпуклой. Поэтому глобальный минимизатор совпадает с локальным экстремумом, если он существует [6]. Из необходимого условия стационарности функционала  $I(w)$  (уравнения Эйлера) находим единственный локальный экстремум

$$w^*(\rho) = \sqrt{3} C [\arccos(\eta/C) - \arccos(\rho/C)], \quad (7)$$

где константа  $C$  определяется из краевого условия  $w^*(1) = w^0$ . Последнее уравнение разрешимо относительно  $C$  только для  $w^0 \leq w_*^0 = \sqrt{3} \arccos(\eta)$ . Для  $w^0 > w_*^0$  функция (7) не удовлетворяет краевым условиям. В этом случае функционал ограничен снизу ( $I(w) \geq 0$ ), но не имеет непрерывного минимизатора ( $w^* \notin V$ ).

Вариационная задача (6) совпадает с классической задачей о непараметрической минимальной поверхности [7]. Решение этой задачи принадлежит BV-пространству функций ограниченной вариации, которое содержит как непрерывные функции, так и функции с разрывами первого рода внутри области или на ее границе.

Обобщенное решение задачи (6) совпадает с решением классической вариационной задачи Де Джорджи [6, 7]:

$$\hat{w}^* = \arg(\inf \{\hat{I}(w) : w \in W^{1,1}(1, \eta)\}),$$

$$\hat{I}(w) = I(w) + |w(1) - w^0| + \eta |w(\eta)|.$$

Решение этой задачи имеет следующий вид: для  $w^0 \leq w_*^0$  оно совпадает с классическим решением (7), а для  $w^0 > w_*^0$  имеет вид

$$\hat{w}^*(\rho) = \sqrt{3} [\arccos(\eta) - \arccos(\rho)].$$

Последнее означает, что материал проскальзывает по поверхности жесткого стержня, поскольку  $\hat{w}^*(1) < w^0$ .

**Замечание.** С математической точки зрения между представленными эффектами существует простая взаимосвязь, а именно, при статическом нагружении центрального стержня в примере 1 наличие предельной нагрузки означает, что материал начинает скользить по поверхности стержня подобно мыльной пленке, т. е. имеется разрыв отображения типа проскальзывания на границе, который фиксируется явно при кинематическом нагружении стержня в примере 2. Однако физический механизм проскальзывания пока не ясен: то ли это внутреннее межмолекулярное скольжение, то ли это разматывание макромолекул.

Необходимо отметить, что оба эффекта никак не связаны с нарушением условия *строгой* эллиптичности тензора упругости 4-го ранга  ${}^4\mathbb{C} = d^2W(\mathbf{F})/d\mathbf{F}^2$  (условия строгой выпуклости по рангу 1 упругого потенциала). Дело в том, что все виды выпуклости упругого потенциала (классическая или полная выпуклость по Коулману — Ноллу, поливыпуклость по Боллу, квазивыпуклость по Морри, выпуклость по рангу 1 Лежандра — Адамара [2, 3]) в одномерном случае эквивалентны классической выпуклости интегранда вариационного функционала [11], что имеется в примерах 1 и 2. Например, вторая производная интегранда функционала в примере 2 стремится к нулю (вырождается) при  $|w'| \rightarrow \infty$  (в точке разрыва первого рода). Условие строгой эллиптичности является лишь одним из необходимых условий существования решения краевой задачи нелинейной упругости, а его нарушение отвечает эффекту бифуркации решения. Потеря глобальной устойчивости или существование предельной нагрузки связаны с эффектом *слабой* эллиптичности тензора упругости 4-го ранга, т. е. с его вырождением на линии разрыва отображения типа проскальзывания.

Для упругих потенциалов линейного роста по модулю градиента отображения в трехмерных краевых задачах нелинейной упругости для сложных областей и при смешанных нагрузках возможно появление разрывов типа проскальзывания без нарушения сплошности, т. е. без образования новых свободных поверхностей, как на границе, так и внутри области. Необходимо отметить, что упругий потенциал Бартенева — Хазановича широко используется на практике при оценке работоспособности высокоэластичных материалов в жидкой среде. Поэтому необходимо учитывать представленные эффекты при анализе результатов численного моделирования,

трактуя их в соответствии с возможностью отсутствия решения при достижении предельной нагрузки, а также при появлении областей с большими градиентами отображения при его разрывах типа проскальзывания.

**4. Осесимметричное кручение и растяжение круглого цилиндра.** Рассмотрим краевую задачу осесимметричного деформирования круглого цилиндра на испытательной машине жесткого типа при квазистатическом растяжении и кручении. В работе [11] было установлено, что при больших скрутках на поверхности цилиндра появляются скадки и наблюдается обобщенный эффект Пойнтинга.

Поместим начало системы координат в середину поперечного сечения на левом краю круглого цилиндра. Радиус-вектор точки в глобальной декартовой системе координат с единичными векторами  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  имеет вид

$$\mathbf{x}(R, \Phi, Z) = R \cos(\Phi) \mathbf{i} + R \sin(\Phi) \mathbf{j} + Z \mathbf{k},$$

где  $R, \Phi, Z$  — истинные цилиндрические координаты.

Рассмотрим деформацию и ее градиент в безразмерной цилиндрической системе координат отсчетной конфигурации

$$\mathbf{X}(\rho, \phi, z) = \mathbf{x}(a\rho, \phi + \psi, lz + lw),$$

$$(\nabla \mathbf{X})^T = \mathbf{F}(r, \psi, w) = \begin{pmatrix} \partial r / \partial \rho & 0 & \lambda \partial r / \partial z \\ r \partial \psi / \partial \rho & r / \rho & \lambda r \partial \psi / \partial z \\ \frac{1}{\lambda} \partial w / \partial \rho & 0 & 1 + \partial w / \partial z \end{pmatrix},$$

где  $a$  — радиус круглого сечения;  $l$  — длина цилиндра;  $\rho \in [0, 1]$  — безразмерная радиальная координата;  $\phi \in [0, 2\pi)$  — угловая координата;  $z \in [0, 1]$  — безразмерная цилиндрическая координата;  $\lambda = a/l$  — безразмерный геометрический параметр. Здесь безразмерные функции  $(r, \psi, w)$  описывают радиальную, угловую и осевую деформации цилиндра соответственно и в общем случае зависят от всех трех координат  $(\rho, \phi, z)$ . Однако в силу осевой симметрии деформирования они зависят только от двух координат  $(\rho, z)$  [1]. Необходимо отметить, что аддитивное описание конечных деформаций при кручении принципиально невозможно, поскольку повороту на  $2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) соответствует отсчетная конфигурация [3, § 5.8].

Как и в работе [11], будем использовать упругий потенциал и соответствующий тензор Пиолы — Кирхгофа для сжимаемого материала (обобщенный потенциал Трелора) вида

$$W_p(\mathbf{F}) = \frac{\mu}{p} \left( |\mathbf{F}|^p - 3^{p/2} \right) + k_0 \left( \det(\mathbf{F}) + \det(\mathbf{F})^{-1} - 2 \right),$$

$$\Sigma = \frac{dW_p}{d\mathbf{F}} = \mu |\mathbf{F}|^{p-2} \mathbf{F} + k_0 \left( 1 - \det(\mathbf{F})^{-2} \right) \det(\mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T},$$

где, как и в модели (4),  $\mu$  и  $k_0$  — сдвиговой и объемный модули при малых деформациях, причем  $k_0 \gg \mu$  — для резиноподобных материалов [1].

Тогда задача (2) формулируется в следующем виде: для любых  $(r', \psi', w') \in V$  искомые функции  $(r, \psi, w) \in V$  должны удовлетворять вариационному уравнению равновесия (здесь  $\delta s = s' - s$ ,  $s = r, \psi, w$ )

$$\frac{1}{\mu} \int_0^1 \int_0^1 \Sigma(\mathbf{F}(r, \psi, w)) \cdot \mathbf{F}(\delta r, \delta \psi, \delta w) \rho d\rho dz = D_\phi \delta \psi(0, 1) + D_z \delta w(0, 1),$$



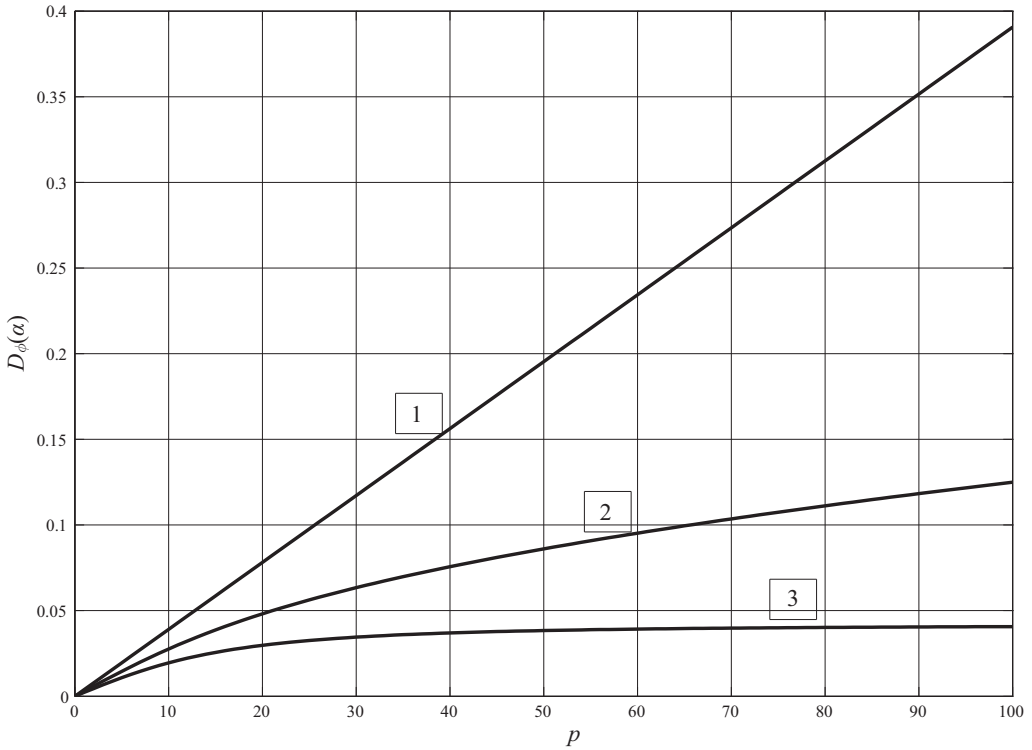


Рис. 1. Зависимость  $D_\phi(\alpha)$  для различных параметров  $1 \leq p \leq 2$ ; кривая 1 –  $p = 2$ , 2 –  $p = 1,5$ , 3 –  $p = 1$  соответственно.

$$V = \{(r, \psi, w) \in (W^{1,p}((0, 1) \times (0, 1)))^3 : r(0, z) = 0, \psi(\rho, 0) = 0, w(\rho, 0) = 0, \\ r(\rho, 1) = \rho, \psi(\rho, 1) = \psi(0, 1), w(\rho, 1) = w(0, 1)\},$$

где  $D_\phi = M_z / (2\pi\mu a^2 l)$  и  $D_z = P_z / (2\pi\mu a^2)$  – безразмерные, а  $M_z$  и  $P_z$  – истинные осевые крутящий момент и растягивающая сила соответственно. Во множестве допустимых отображений  $V$  учитывается жесткий тип нагружения на торцах цилиндра.

Вариационная задача (3) принимает вид

$$(r_*, \psi_*, w_*) = \arg \inf \{I_p(r, \psi, w) : (r, \psi, w) \in V\}, \quad (8)$$

$$I_p(r, \psi, w) = \frac{1}{\mu} \int_0^1 \int_0^1 W_p(\mathbf{F}(r, \psi, w)) \rho \, d\rho dz - D_\phi \psi(0, 1) - D_z w(0, 1).$$

Рассмотрим, например, допустимую несжимаемую деформацию:  $r = \rho$ ,  $\psi = \alpha z$ ,  $w = 0$  в задаче простого кручения с  $D_z = 0$  и  $\alpha > 0$ , где  $\alpha$  – удельный (на единицу длины цилиндра) угол кручения. Тогда функционал в (8) принимает вид

$$I_p(r, \psi, w) = K_p(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 \lambda^2 p(p+2)} \left[ \left( 1 + \frac{1}{3} \alpha^2 \lambda^2 \right)^{p/2+1} - 1 \right] - \alpha D_\phi + \text{const},$$

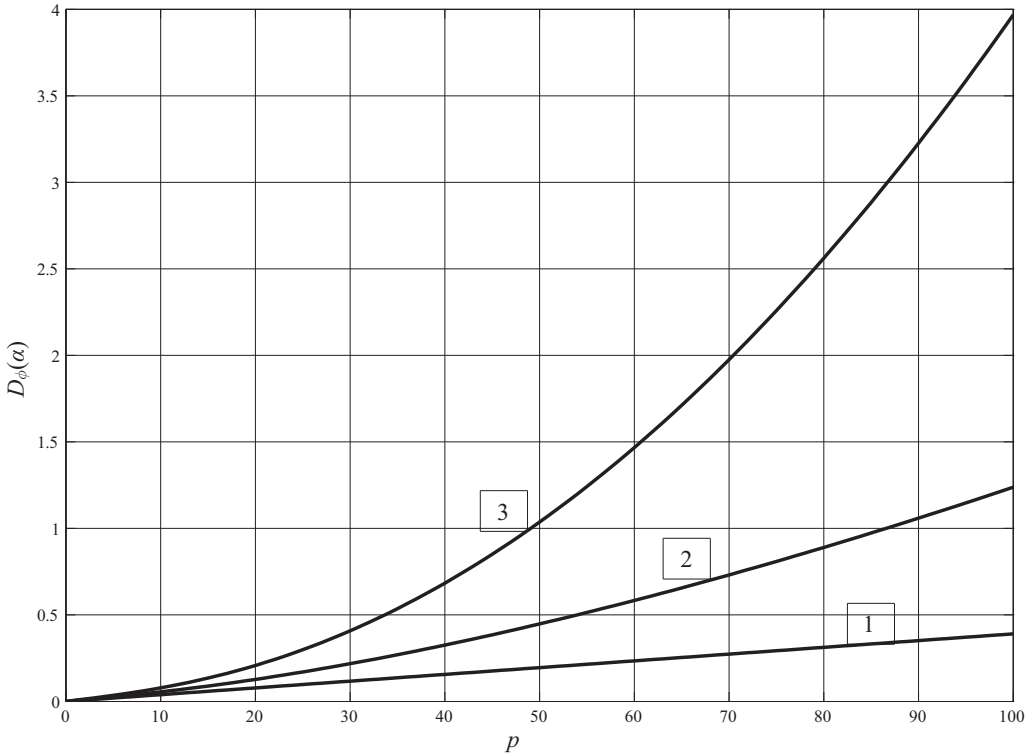


Рис. 2. Зависимость  $D_\phi(\alpha)$  для различных параметров  $p \geq 2$ ; кривая 1 –  $p = 2$ , 2 –  $p = 2,5$ , 3 –  $p = 3$  соответственно.

где  $K_p(\alpha)$  – редуцированная функция энергии, зависящая только от удельного угла кручения. Для параметров  $p \geq 1$  она является выпуклой, поэтому из необходимого условия стационарности  $K'_p(\alpha) = 0$  следует, что

$$D_\phi(\alpha) = \frac{1}{\alpha p} (3 + \lambda^2 \alpha^2)^{p/2} - \frac{2}{p(p+2)\lambda^2 \alpha^3} \left[ (3 + \lambda^2 \alpha^2)^{p/2+1} - 3^{p/2+1} \right].$$

Эта функция монотонно возрастает. Для параметра  $p = 2$  имеем  $D_\phi(\alpha) = \alpha \lambda^2 / 4$ , что совпадает с классической теорией кручения стержней Сен-Венана [11]. Для  $\alpha \gg 1$  справедливо асимптотическое соотношение  $D_\phi(\alpha) \sim \alpha^{p-1} \lambda^p / (p+2)$ , и для параметра  $p = 1$  верна оценка сверху  $D_\phi(\alpha) < D_\phi^* = \lambda/3$ . Это и есть оценка для предельной нагрузки при кручении. На рис. 1 и 2 приведены зависимости  $D_\phi(\alpha)$  для различных параметров  $p$ . Легко видеть, что для параметра  $p = 2$  эта зависимость является линейной, а для других значений параметра  $p$  очевидна зависимость  $D_\phi(\alpha) \sim \alpha^{p-1}$ .

Похожий результат легко получить, например, для допустимой несжимаемой деформации  $r = \rho(1 + 2m(1 - z))^{-1/2}$ ,  $\psi = 0$ ,  $w = mz(2 - z)$  в задаче чистого растяжения цилиндра с  $D_\phi = 0$  и  $m > 0$ , где  $m$  – относительное кинематическое удлинение правого торца цилиндра. Для параметра  $p = 1$  также существует предельная нагрузка, поскольку  $D_z(m) < D_z^* = 0.5$ .

Оценка  $D_\phi^* = \lambda/3$  для предельной нагрузки при кручении является оценкой снизу, поскольку построена на одной из допустимых минимизирующих последовательностей. Истинная предельная нагрузка отвечает более сложной последовательности

отображений с учетом сжимаемости. Например, в работе [11] аналитически доказано и проиллюстрировано вычислительными экспериментами, что при больших удельных углах кручения круглого цилиндра возможны отображения с неоднородной зависимостью вдоль оси цилиндра вида  $r = \rho f(z)$ ,  $\psi = \alpha z$ ,  $w = w(z)$ . Последнее выражается в появлении кольцевых складок на поверхности цилиндра.

**5. Заключение.** В статье рассмотрены две слабые постановки краевой задачи нелинейной упругости: в форме вариационного уравнения равновесия и в форме минимизации многомерного интегрального функционала энергии. Обе постановки имеют четкий физический смысл: уравнение равновесия совпадает с принципом возможных перемещений в теоретической механике, а минимизационная задача соответствует физическому принципу минимума потенциальной энергии системы.

Методами вариационного исчисления доказано, что для упругих потенциалов линейного роста по модулю градиента отображения могут существовать как предельная нагрузка, так и отображения с разрывами типа проскальзывания. Оба эффекта нуждаются в экспериментальном исследовании на мягких эластомерах.

Поскольку в настоящее время для численного решения краевых задач нелинейной упругости широко используется конечно-элементная аппроксимация [11], можно однозначно утверждать, что конечномерные аналоги обеих постановок будут плохо обусловленными для параметров  $1 < p < 2$ , а для параметра  $p = 1$  — могут вырождаться, что требует дополнительных исследований в области регуляризации таких задач [14, 15]. Здесь также наблюдается полная аналогия с краевыми задачами идеальной упругопластичности.

**6. Приложение.** Упругие потенциалы обычно строятся феноменологически после обработки экспериментальных данных [1–4]. Но некоторые модели построены на основе молекулярно-статистического анализа упругих материалов. К таким моделям относится широко известная модель Бартенева — Хазановича, описывающая поведение несжимаемых сшитых упругих полимеров, работающих в воде или масле [8].

Рассмотрим мультипликативное разложение градиента отображения  $\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}$ , где  $\mathbf{Q}$  — ортогональный тензор второго ранга (тензор поворота), а  $\mathbf{\Lambda}$  — симметричный тензор второго ранга кратностей удлинений [1–4].

Упругий потенциал Бартенева — Хазановича имеет следующий вид:

$$W = \mu (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 3), \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1,$$

где  $\lambda_i > 0$  — собственные числа тензора  $\mathbf{\Lambda}$  (модули собственных чисел тензора  $\mathbf{F}$  или главные относительные удлинения);  $\mu$  — модуль сдвига при малых деформациях.

Потенциал получен на основе молекулярных соображений. В теории сетей Хазановича предполагается, что действие внешних сил передается через непосредственное взаимодействие цепей, а не узлов, как в классической теории. Убедительно показано, что  $\mu = 3kT\bar{t}_0/(2m)$ , где  $k \approx 1.38 \cdot 10^{-21}$  (Н · м/К) — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура,  $\bar{t}_0$  — среднее относительное напряжение молекулярных цепей в недеформированном состоянии,  $m$  — объем свободно сочлененного сегмента молекулярной цепи эластомера.

Нетрудно показать, что потенциал Бартенева — Хазановича имеет линейный рост по  $|\mathbf{F}|$ . Действительно, основные свойства ортогонального тензора  $\mathbf{Q}$  следующие:  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$  и  $|\mathbf{Q}|^2 = 3$  [3]. Поэтому из отношений  $\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{\Lambda}$  и  $\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^{1/2}$  следуют две основные оценки:  $|\mathbf{\Lambda}| \leq |\mathbf{F}| \leq \sqrt{3}|\mathbf{\Lambda}|$ .

В главных осях  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  и, поскольку все  $\lambda_i > 0$ , верны простейшие неравенства  $|\mathbf{\Lambda}| \leq \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \leq \sqrt{3}|\mathbf{\Lambda}|$ . В результате упругий потенциал Бартенева – Хазановича удовлетворяет следующим оценкам:

$$\frac{\mu}{\sqrt{3}}|\mathbf{F}| - 3\mu \leq W \leq \sqrt{3}\mu|\mathbf{F}| - 3\mu,$$

что отвечает линейному росту функции  $W$  по  $|\mathbf{F}|$ .

## Литература

1. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. Oxford, Oxford University Press (1975).
2. Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **63**, 337–403 (1977).
3. Съярле Ф. Г. *Математическая теория упругости*, пер. с англ. Москва, Мир (1992).
4. Ogden R. W. *Non-Linear Elastic Deformations*. New York, Dover (1997).
5. Бригаднов И. А. О существовании предельной нагрузки в некоторых задачах гиперупругости. *Изв. РАН. МТТ* **5**, 46–51 (1993).
6. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, пер. с англ. Москва, Мир (1979).
7. Джустини Э. *Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации*, пер. с англ. Москва, Мир (1989).
8. Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров. *Высокомолекулярные соединения* **2** (1), 20–28 (1960).
9. Темам Р. *Математические задачи теории пластичности*, пер. с фр. Москва, Наука (1991).
10. Мосолов П. П., Мясников В. П. *Механика жесткопластических сред*. Москва, Наука (1981).
11. Brigadnov I. A. Power law type Poynting effect and non-homogeneous radial deformation in the boundary-value problem of torsion of nonlinear-elastic cylinder. *Acta Mech.* **226**, 1309–1317 (2015). <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1243-9>
12. Brigadnov I. A. Regularization of non-convex strain energy function for non-monotonic stress-strain relation in the Hencky elastic-plastic model. *Acta Mech.* **226**, 2681–2691 (2015). <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1349-8>
13. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. *Теоретическая механика*. Москва, Юрайт (2015).
14. Бригаднов И. А. Прямые методы решения вариационной задачи для многокритериальной оценки несущей способности геоматериалов. *Записки Горного института* **232**, 368–374 (2018). <https://doi.org/10.31897/PMI.2018.4.368>
15. Brigadnov I. A.: Multi-criteria estimation of load-bearing capacity of solids. *Journal of Elasticity* **140**, 121–133 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10659-019-09762-8>

Статья поступила в редакцию 3 июня 2022 г.;  
доработана 26 августа 2022 г.;  
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Бригаднов Игорь Альбертович — д-р физ.-мат. наук, проф.; brigadnov@mail.ru

## Discontinuous mappings and the limit load in boundary value problems of nonlinear elasticity

I. A. Brigadnov

St Petersburg Mining University, 2, 21-ya liniya V. O., St Petersburg, 199106, Russian Federation

**For citation:** Brigadnov I. A. Discontinuous mappings and the limit load in boundary value problems of nonlinear elasticity. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 86–98. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.108> (In Russian)

The article discusses a boundary value problem of nonlinear elasticity for mapping (deformation) in two weak formulations: in the form of a variational equilibrium equation and in the form of minimization of a multidimensional integral functional. Some questions of a mathematical correctness of the nonlinear elasticity BVP are discussed. Using methods of calculus of variations, by the example of two simple problems, it is proved that for some nonlinear elastic models in the corresponding boundary value problems there can be mappings that have discontinuities of the slip type, as well as there is the limit load — such a finite value of external forces, above which the boundary value problem has no solution at all.

*Keywords:* nonlinear elasticity, variational formulations, discontinuous mappings, limit load.

## References

1. Green A. E., Zerna W. *Theoretical Elasticity*. Oxford, Oxford University Press (1975).
2. Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.* **63**, 337–403 (1977).
3. Ciarlet Ph. G. *Mathematical Elasticity. Vol. 1: Three-Dimensional Elasticity*. Amsterdam etc., North-Holland publ. co. (1988) [Rus. ed.: Ciarlet Ph. G. *Matematicheskaya teoriya uprugosti* Moscow, Mir Publ. (1992)].
4. Ogden R. W. *Non-Linear Elastic Deformations*. New York, Dover (1997)
5. Brigadnov I. A. On the existence of limit loading in some hyperelastic problems. *Mechanics of Solids* **5**, 46–51 (1993). (In Russian)
6. Ekeland I., Temam R. *Convex Analysis and Variational Problems*. Amsterdam, North-Holland (1976). [Rus. ed.: Ekeland I., Temam R. *Vypuklyii analiz i variatsionnye problemy*. Moscow, Mir Publ. (1979)].
7. Giusti E. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*. Boston, Birkhauser Boston Inc. (1984). [Rus. ed.: Giusti E. *Minimal'nye poverkhnosti i funktsii ogranichennoi variatsii*. Moscow, Mir Publ. (1989)].
8. Bartenev G. M., Khazanovich T. N. The law of high elastic strains of crosslinked polymers. *Vysokomol. Soedin.* **2** (1), 20–42 (1960). (In Russian)
9. Temam R. Problèmes mathématiques en plasticité. Ser.: *Methodes mathematiques de l'informatique*. Paris, Gauthier-Villars (1983). [Rus. ed.: Temam R. *Matematicheskie zadachi teorii plastichnosti*. Moscow, Nauka Publ. (1991). (In Russian)].
10. Mosolov P. P., Myasnikov V. P. *Mechanics of rigid plastic media*. Moscow, Nauka Publ. (1981). (In Russian)
11. Brigadnov I. A. Power law type Poynting effect and non-homogeneous radial deformation in the boundary-value problem of torsion of nonlinear-elastic cylinder. *Acta Mech.* **226**, 1309–1317 (2015). <https://doi.org/10.1007/s00707-014-1243-9>
12. Brigadnov I. A. Regularization of non-convex strain energy function for non-monotonic stress-strain relation in the Hencky elastic-plastic model. *Acta Mech.* **226**, 2681–2691 (2015). <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1349-8>
13. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P. *Theoretical mechanics*. Moscow, Iurait Publ. (2015). (In Russian)
14. Brigadnov I. A. Direct methods for solving the variation problem for multicriteria estimation of the bearing capacity of geomaterials. *Journal of Mining Institute* **232**, 368–374 (2018). <https://doi.org/10.31897/PMI.2018.4.368>
15. Brigadnov I. A. Multi-criteria estimation of load-bearing capacity of solids. *Journal of Elasticity* **140**, 121–133 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10659-019-09762-8>

Received: June 3, 2022

Revised: August 26, 2022

Accepted: September 8, 2022

Author's information:

Igor A. Brigadnov — brigadnov@mail.ru