

Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника.

II. Решение задачи и анализ результатов*

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29
Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Для цитирования: *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. II. Решение задачи и анализ результатов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 121–138. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.111>

Настоящая работа является продолжением статьи «Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи», в которой была дана постановка задачи оптимального гашения колебаний двойного маятника, имеющего не коллинеарные друг другу шарнирные оси. При этом рассматривается в отдельности пассивное гашение (вязкое трение), а также обсуждается возможность дополнительного учета активных воздействий (коллинеарное управление). Принимаются два критерия оптимизации, характеризующие эффективность процессов затухания движений системы: сначала максимизируется степень устойчивости, а затем минимизируется интегральный энерго-временной критерий. В ходе точного решения задачи в рамках линейной модели определяются оптимальные значения параметров рассматриваемых вариантов гашения по обоим критериям. Полученные результаты представлены в виде наглядных графических иллюстраций, позволяющих установить их основные качественные и количественные особенности. Сделанные выводы могут быть полезны при исследовании движений манипуляторов и различных робототехнических конструкций.

Ключевые слова: пространственный двойной маятник, вязкое трение, коллинеарное управление, критерий оптимизации, степень устойчивости, энерго-временной критерий.

1. Введение. В данной статье приводится подробное аналитическое решение задачи оптимизации режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника, постановка которой была дана в работе [1], а также осуществляется анализ полученных результатов. Во избежание путаницы ссылки на формулы, представленные в работе [1], помечаются верхним индексом «1».

2. Оптимизация вязкого демпфирования. Поставим сначала вопрос об отыскании коэффициента вязкого трения b (или отвечающей ему величины ν) в шарнирах пространственного двойного маятника из условия оптимизации процесса

*Первая часть статьи опубликована здесь: *Смирнов А. С., Смольников Б. А.* Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2. С. 357–365. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215>

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

затухания его малых колебаний. Для плоского двойного маятника данная задача была решена в [2], и в настоящем разделе результаты этой работы обобщаются на случай произвольного значения угла α между шарнирными осями.

2.1. Степень устойчивости. Обсудим подробнее траектории движения корней (8)¹ характеристического уравнения в безразмерном виде $\kappa = \lambda/k$, т. е.

$$\kappa_{1,2} = -\eta_1\nu \pm i\sqrt{p_{10}^2 - \eta_1^2\nu^2}, \quad \kappa_{3,4} = -\eta_2\nu \pm i\sqrt{p_{20}^2 - \eta_2^2\nu^2}, \quad (1)$$

по корневому годографу с увеличением коэффициента $\nu = n/k$ от 0 до ∞ с учетом формул (9)¹. При $\nu = 0$ все четыре корня (1) лежат на мнимой оси плоскости годографа. При увеличении ν в диапазоне $0 < \nu < \nu_{20}$ эти корни перемещаются по полуокружностям, лежащим слева от мнимой оси:

$$(\operatorname{Re} \kappa_{1,2})^2 + (\operatorname{Im} \kappa_{1,2})^2 = p_{10}^2, \quad (\operatorname{Re} \kappa_{3,4})^2 + (\operatorname{Im} \kappa_{3,4})^2 = p_{20}^2. \quad (2)$$

При этом корни $\kappa_{3,4}$ двигаются по большей полуокружности (2) и сближаются, пока при $\nu = \nu_{20}$ не сольются в один кратный вещественный корень, после чего они уже движутся в разные стороны по вещественной оси. Что касается корней $\kappa_{1,2}$, то они в диапазоне $\nu_{20} < \nu < \nu_{10}$ также двигаются по своей полуокружности до тех пор, пока при $\nu = \nu_{10}$ не происходит их слияние в один кратный корень. После этого они, так же как и пара корней $\kappa_{3,4}$, начинают расходиться в разные стороны по вещественной оси. Таким образом, при $\nu \rightarrow \infty$ в каждой паре один корень стремится к -0 , а другой — к $-\infty$. Корневой годограф этого процесса приведен на рис. 1.

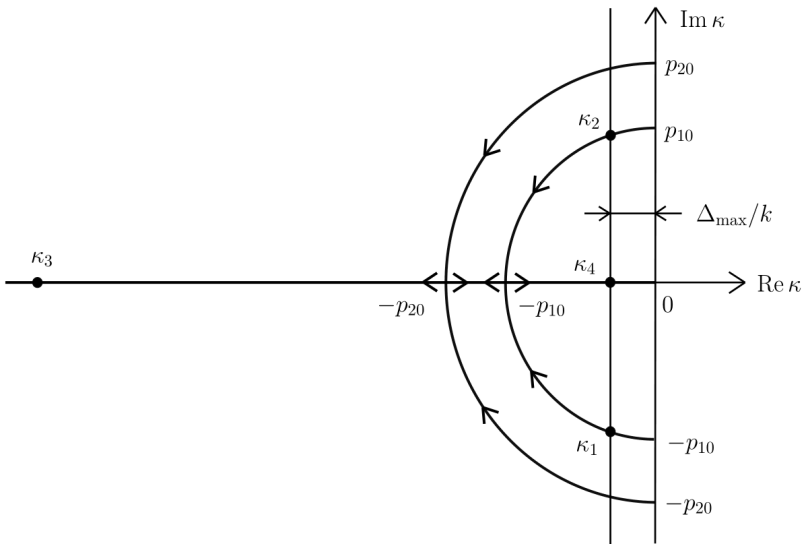


Рис. 1. Корневой годограф.

Покажем, что существует такое значение ν_* в диапазоне $\nu_{20} < \nu_* < \nu_{10}$, когда корни $\kappa_{3,4}$ уже разошлись от своей точки слияния в разные стороны по вещественной оси, а корни $\kappa_{1,2}$ все еще находятся на своей полуокружности, т. е. являются комплексно-сопряженными, причем вещественная часть корней $\kappa_{1,2}$ совпадает с меньшим по модулю из вещественных корней κ_4 . В этом случае три корня будут

находиться на корневом годографе на одной вертикали, а четвертый — значительно левее них. В самом деле, приравнивая вещественные части указанных корней, равные $-n_1$ и $-n_2 + \sqrt{n_2^2 - k_{20}^2}$, и переходя к безразмерной записи, получим уравнение:

$$-\eta_1 \nu = -\eta_2 \nu + \sqrt{\eta_2^2 \nu^2 - p_{20}^2}. \quad (3)$$

Разрешая его относительно ν , находим искомое значение ν_* :

$$\nu_* = \frac{p_{20}}{\sqrt{\eta_1(2\eta_2 - \eta_1)}}. \quad (4)$$

На рис. 2 показано расположение ν_* относительно значений ν_{20} и ν_{10} , определяемых по формуле (10)¹, в зависимости от угла α , отчетливо демонстрирующее его нахождение в диапазоне $\nu_{20} < \nu_* < \nu_{10}$.

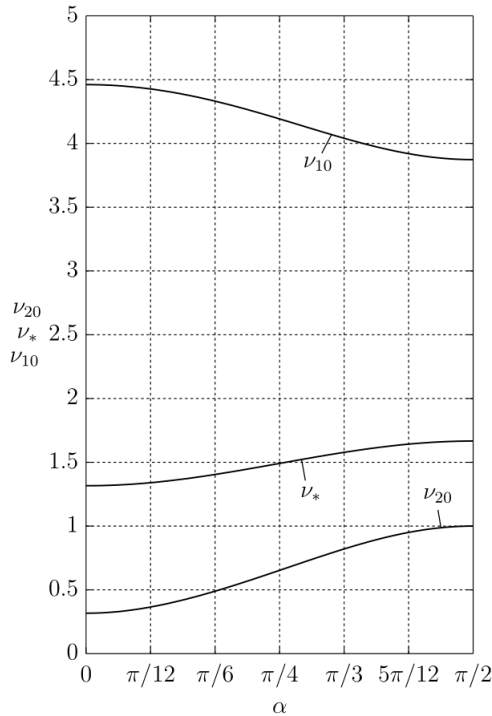


Рис. 2. Графики зависимости величин ν_{20} , ν_* и ν_{10} от угла α .

Таким образом, можно качественно представить поведение графиков зависимости модулей вещественных частей всех четырех корней характеристического уравнения в безразмерном варианте (рис. 3). Здесь сплошными линиями выделены участки, отвечающие ближайшему к мнимой оси корню, который и определяет безразмерную степень устойчивости Δ/k . Для убедительности покажем также, что кривая $|\operatorname{Re} \kappa_2| = \eta_1 \nu - \sqrt{\eta_1^2 \nu^2 - p_{10}^2}$ при $\nu > \nu_{10}$ лежит выше кривой $|\operatorname{Re} \kappa_4| = \eta_2 \nu - \sqrt{\eta_2^2 \nu^2 - p_{20}^2}$. В самом деле, имеет место следующая цепочка соотношений:

$$|\operatorname{Re} \kappa_2| = \frac{p_{10}^2/\eta_1}{\nu + \sqrt{\nu^2 - \nu_{10}^2}} > \frac{p_{20}^2/\eta_2}{\nu + \sqrt{\nu^2 - \nu_{20}^2}} = |\operatorname{Re} \kappa_4|, \quad (5)$$

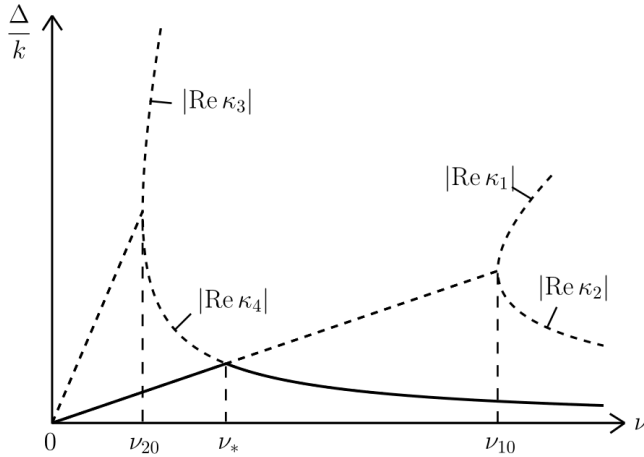


Рис. 3. График зависимости безразмерной степени устойчивости Δ/k от ν .

где учтено, что $\nu_{10} > \nu_{20}$, а также принято во внимание, что

$$\frac{p_{10}^2}{\eta_1} = \frac{1}{2 - 1/p_{10}^2} > \frac{1}{2 - 1/p_{20}^2} = \frac{p_{20}^2}{\eta_2} \quad (6)$$

в силу соотношений (9)¹ и того, что $p_{10} < p_{20}$. По графику, представленному на рис. 3, легко видеть, что максимум степени устойчивости доставляет именно значение ν_* , при этом данный экстремум является острым. Наконец, при $0 < \nu \leq \nu_*$ безразмерная степень устойчивости определяется вещественной частью комплексно-сопряженных корней $\kappa_{1,2}$, а при $\nu > \nu_*$ — меньшим по модулю из вещественных корней κ_4 , поэтому

$$\frac{\Delta}{k} = \begin{cases} \eta_1 \nu, & 0 < \nu \leq \nu_*, \\ \eta_2 \nu - \sqrt{\eta_2^2 \nu^2 - p_{20}^2}, & \nu > \nu_*. \end{cases} \quad (7)$$

2.2. Энерго-временной критерий. Для решения поставленной задачи по второму критерию будем использовать решение в виде (11)¹ в комплексной форме. Его удобство заключается в том, что интеграл (18)¹ тогда будет вычисляться наиболее просто. Подставляя это решение в выражения (1)¹ для кинетической и потенциальной энергий, а также используя формулы (4)¹ и (5)¹, вычислим полную механическую энергию:

$$E = \frac{1}{2} [N_1 e^{-n_1 t} f_1(t) + N_2 e^{-n_2 t} f_2(t)], \quad (8)$$

где функции $f_s(t)$ имеют следующий вид:

$$f_s(t) = A_s^2 e^{2ik_s t} [(n_s + ik_s)^2 + k_{s0}^2] + B_s^2 e^{-2ik_s t} [(-n_s + ik_s)^2 + k_{s0}^2] + 4A_s B_s k_{s0}^2, \quad s = 1, 2. \quad (9)$$

Подставим теперь выражение (8) с учетом (9) в интеграл (18)¹. Тогда получим для F следующее выражение:

$$F = \frac{1}{2} \left[N_1 \frac{(A_1 + B_1)^2 n_1^2 + 2A_1 B_1 k_1^2}{n_1} + N_2 \frac{(A_2 + B_2)^2 n_2^2 + 2A_2 B_2 k_2^2}{n_2} \right]. \quad (10)$$

Перейдем теперь к определению оптимального значения ν для наихудшей совокупности начальных условий. С этой целью представим начальные условия θ_0 и $\dot{\theta}_0$ в виде суммы двух форм колебаний $\Theta_{(1)}$ и $\Theta_{(2)}$ с некоторыми коэффициентами P_s и R_s :

$$\theta_0 = P_1 \Theta_{(1)} + P_2 \Theta_{(2)}, \quad \dot{\theta}_0 = R_1 \Theta_{(1)} + R_2 \Theta_{(2)}, \quad (11)$$

причем величины P_s являются безразмерными, а величины R_s имеют размерность частоты. Ясно, что эти коэффициенты однозначно определяются по заданным θ_0 и $\dot{\theta}_0$ [3]. Однако они не совсем удобны для дальнейшего анализа. Поэтому вместо пар коэффициентов (P_s, R_s) целесообразно ввести две другие пары (r_s, μ_s) , а затем задать пару (r_1, r_2) полярными координатами ρ и ϑ :

$$P_s = \frac{r_s}{\sqrt{N_s k_s^2}} \cos \mu_s, \quad R_s = \frac{r_s}{\sqrt{N_s}} \sin \mu_s, \quad r_1 = \rho \cos \vartheta, \quad r_2 = \rho \sin \vartheta, \quad (12)$$

причем здесь $\mu_s \in [0, 2\pi)$, $r_s \in [0, \infty)$, $\rho \in [0, \infty)$, а $\vartheta \in [0, \pi/2]$. Удобство осуществленной замены столбцов начальных условий θ_0 и $\dot{\theta}_0$ на параметры ρ , ϑ , μ_1 и μ_2 заключается в том, что начальная энергия системы тогда выразится наиболее просто:

$$E_0 = \frac{1}{2} \dot{\theta}_0^T \mathbf{A}_0 \dot{\theta}_0 + \frac{1}{2} \theta_0^T \mathbf{C}_0 \theta_0 = \frac{1}{2} \rho^2. \quad (13)$$

Отсюда следует важный вывод, что введенный параметр ρ характеризует уровень начальной энергии системы, а параметры ϑ , μ_1 и μ_2 никак на него не влияют.

Подставляя теперь (12)¹, (11) и (12) в (10) и принимая во внимание (13), приходим к выражению для $F(\nu, \mu_1, \mu_2, \vartheta)$:

$$F = \frac{E_0}{2} \left[\frac{\cos^2 \vartheta}{k_{10}} \left(\frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \nu_1 \cos 2\mu_1 + \sin 2\mu_1 \right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{k_{20}} \left(\frac{1}{\nu_2} + \nu_2 + \nu_2 \cos 2\mu_2 + \sin 2\mu_2 \right) \right], \quad (14)$$

где для удобства также введены еще два безразмерных диссипативных коэффициента ν_1 и ν_2 , связанных с ν формулами:

$$\nu_1 = \frac{n_1}{k_{10}} = \frac{\eta_1}{p_{10}} \nu, \quad \nu_2 = \frac{n_2}{k_{20}} = \frac{\eta_2}{p_{20}} \nu. \quad (15)$$

Обращаясь к выражению (14) для интегрального критерия оптимизации, перейдем теперь непосредственно к поиску оптимального значения ν для наихудшей совокупности начальных условий. Здесь мы встречаемся с минимаксной задачей о нахождении точек экстремума функции $F(\nu, \mu_1, \mu_2, \vartheta)$, т.е. о нахождении $\min_{\nu} \max_{\mu_1, \mu_2, \vartheta} F(\nu, \mu_1, \mu_2, \vartheta)$. Видно, что при этом сама величина начальной энергии E_0 не играет роли, а имеет значение лишь соотношение между столбцами начальных

условий θ_0 и $\dot{\theta}_0$, определяемое величинами μ_1, μ_2, ϑ . Отбрасывая далее несущественный множитель $E_0/(2k)$ в выражении для F , обозначим получившееся безразмерное выражение через f :

$$f = \frac{\cos^2 \vartheta}{p_{10}} \left[\frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \sqrt{1 + \nu_1^2} \sin(2\mu_1 + \psi_1) \right] + \frac{\sin^2 \vartheta}{p_{20}} \left[\frac{1}{\nu_2} + \nu_2 + \sqrt{1 + \nu_2^2} \sin(2\mu_2 + \psi_2) \right], \quad \text{tg } \psi_s = \nu_s, \quad s = 1, 2. \quad (16)$$

Из (16) нетрудно видеть, что f достигает своих максимальных по μ_1 и μ_2 значений, равных

$$f_{\max_{\mu_1, \mu_2}} = \frac{\cos^2 \vartheta}{p_{10}} \left(\frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \sqrt{1 + \nu_1^2} \right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{p_{20}} \left(\frac{1}{\nu_2} + \nu_2 + \sqrt{1 + \nu_2^2} \right) \quad (17)$$

в тех точках, когда $\sin(2\mu_1 + \psi_1) = 1$, $\sin(2\mu_2 + \psi_2) = 1$. Далее необходимо максимизировать по ϑ выражение (17). Ясно, что своих экстремальных значений это выражение достигает либо при $\vartheta = 0$ (когда начальные условия задаются по первой форме), либо при $\vartheta = \pi/2$ (когда начальные условия задаются по второй форме). Определим, в какой из этих точек функция $f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}$ достигает максимального значения по ϑ . Для этого выпишем значения данной функции в экстремальных точках:

$$\begin{aligned} \vartheta = 0: \quad f_{\max_{\mu_1, \mu_2}} &= \frac{1}{p_{10}} \left(\frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \sqrt{1 + \nu_1^2} \right), \\ \vartheta = \frac{\pi}{2}: \quad f_{\max_{\mu_1, \mu_2}} &= \frac{1}{p_{20}} \left(\frac{1}{\nu_2} + \nu_2 + \sqrt{1 + \nu_2^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Если выразить ν_1 и ν_2 через ν посредством соотношений (15), то можно получить, что каждое из этих выражений является функцией ν и α . Для того чтобы сравнить между собой значения (18), запишем их упрощенные представления. Так, при $\nu \rightarrow 0$ имеем

$$f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}(\vartheta = 0) \approx \frac{1}{\eta_1 \nu} + \frac{1}{p_{10}}, \quad f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right) \approx \frac{1}{\eta_2 \nu} + \frac{1}{p_{20}}, \quad (19)$$

тогда как при $\nu \rightarrow \infty$ будет

$$f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}(\vartheta = 0) \approx 2 \left(2 - \frac{1}{p_{10}^2} \right) \nu, \quad f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right) \approx 2 \left(2 - \frac{1}{p_{20}^2} \right) \nu, \quad (20)$$

где учтены формулы (9)¹. Поскольку $p_{10} < p_{20}$, $\eta_1 < \eta_2$, то отсюда можно заключить, что при $\nu \rightarrow 0$ будет $f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}(\vartheta = 0) > f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}(\vartheta = \pi/2)$, тогда как при $\nu \rightarrow \infty$ имеем уже $f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}(\vartheta = 0) < f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}(\vartheta = \pi/2)$. Это означает, что уравнение $f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}(\vartheta = 0) = f_{\max_{\mu_1, \mu_2}}(\vartheta = \pi/2)$ при любом значении угла α в рассматриваемом диапазоне от 0 до $\pi/2$ имеет на интервале $0 < \nu < \infty$ по крайней мере один вещественный корень. Численное исследование данного вопроса показывает, что такой корень ν_* всегда оказывается единственным и его зависимость от угла α также можно установить при помощи численных процедур.

Из этих рассуждений следует, что максимальное значение функции f_{μ_1, μ_2}^{\max} по ϑ зависит от величины коэффициента ν следующим образом:

$$f_{\mu_1, \mu_2}^{\max} = \begin{cases} \frac{1}{p_{10}} \left(\frac{1}{\nu_1} + \nu_1 + \sqrt{1 + \nu_1^2} \right), & 0 < \nu \leq \nu_* \\ \frac{1}{p_{20}} \left(\frac{1}{\nu_2} + \nu_2 + \sqrt{1 + \nu_2^2} \right), & \nu > \nu_* \end{cases}. \quad (21)$$

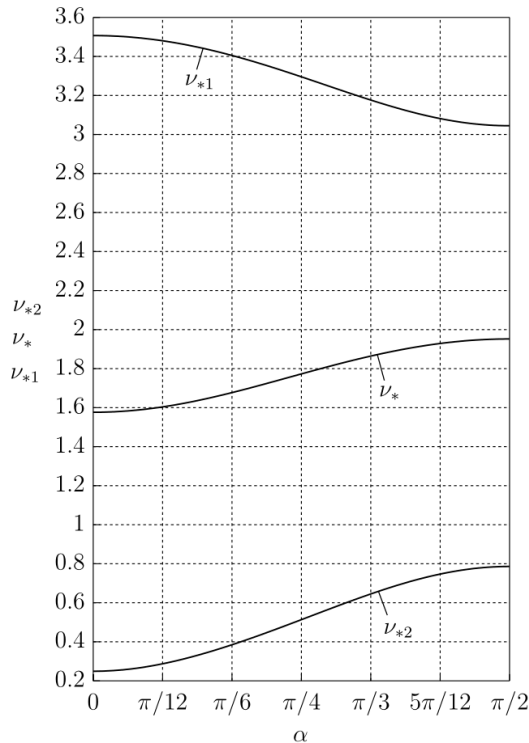
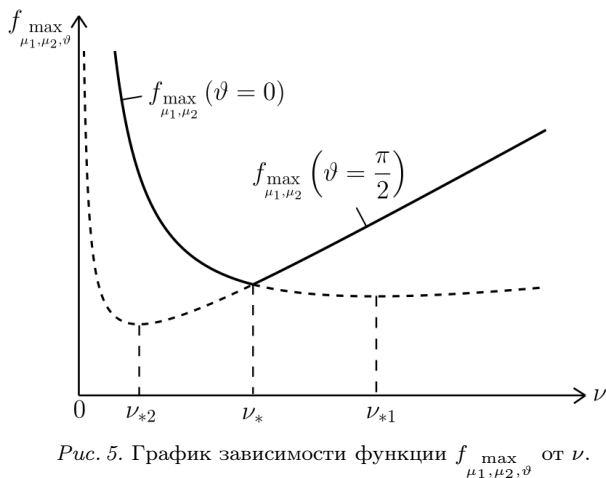


Рис. 4. Графики зависимости величин ν_{*2} , ν_* и ν_{*1} от угла α .

Остается найти минимальное значение функции (21) по ν . Для этого сперва определим точки экстремума функций (18) на интервале $0 < \nu < \infty$. Поскольку f_{μ_1, μ_2}^{\max} при $\vartheta = 0$ является функцией переменной ν_1 , то для нахождения ее точки экстремума достаточно найти ее производную по этой переменной и приравнять полученное выражение нулю. В результате после ряда преобразований будем иметь:

$$\nu_1^4 + \nu_1^2 - 1 = 0, \quad \nu_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, \quad \nu_{*1} = \frac{p_{10}}{\eta_1} \nu_1 = \frac{p_{10}}{\eta_1} \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}. \quad (22)$$



Аналогично определяем точку экстремума функции f_{μ_1, μ_2}^{\max} при $\vartheta = \pi/2$:

$$\nu_2^4 + \nu_2^2 - 1 = 0, \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}, \quad \nu_{*2} = \frac{p_{20}}{\eta_2} \nu_2 = \frac{p_{20}}{\eta_2} \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}. \quad (23)$$

Построим на одном графике зависимости ν_* , ν_{*1} и ν_{*2} от угла α (рис. 4). Легко видеть, что при любом значении α будем иметь $\nu_{*2} < \nu_* < \nu_{*1}$. Это означает, что значение ν_{*1} не попадает в интервал $0 < \nu \leq \nu_*$, а значение ν_{*2} — в интервал $\nu > \nu_*$. Поэтому график функции (21) на всем интервале $0 < \nu < \infty$ схематично может быть представлен в следующем виде (рис. 5). При этом необходимые отрезки функций выделены сплошными линиями, а посторонние — пунктирными. Отсюда ясно, что минимум функции $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$ достигается именно при $\nu = \nu_*$, причем этот экстремум является острым, как это было и при рассмотрении критерия оптимизации, основанного на степени устойчивости. Отметим, что в точке $\nu = \nu_*$ оба значения в (18) оказываются равными, поэтому если вернуться к формуле (17), то можно видеть, что при данном значении ν в нем будет отсутствовать зависимость от ϑ , поскольку равный множитель можно вынести за скобку, а $\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$. Левая ветвь графика, изображенного на рис. 5, соответствует значению $\vartheta = \pi/2$, а правая — значению $\vartheta = 0$. В найденной же оптимальной точке $\nu = \nu_*$ величина ϑ не играет никакой роли — она может быть любой, и значение критерия (17) от этого не изменится.

3. Оптимизация коллинеарного гашения колебаний при наличии вязкого демпфирования. Рассмотрим теперь ситуацию, когда в системе уже имеется некоторое заданное демпфирование в обоих шарнирах с безразмерным диссипативным коэффициентом ν . Возникает вопрос: как следует выбрать параметры активного коллинеарного воздействия, чтобы улучшить процессы затухания движений пространственного двойного маятника? Ясно, что в этом случае корни характеристического уравнения будут определяться формулами (16)¹, которые в безразмерном

варианте с учетом обозначения $\kappa = \lambda/k$ можно записать в виде

$$\kappa_{1,2} = \sigma - \eta_1\nu \pm i\sqrt{p_{10}^2 - (\sigma - \eta_1\nu)^2}, \quad \kappa_{3,4} = \sigma - \eta_2\nu \pm i\sqrt{p_{20}^2 - (\sigma - \eta_2\nu)^2}, \quad (24)$$

где $\sigma = \delta/k$.

Как и прежде, проанализируем оба критерия оптимизации и определим зависимость оптимального значения σ_* по этим критериям от ν .

3.1. Степень устойчивости. Для случая, когда вязкое трение отсутствует, т.е. $\nu = 0$, и гашение является чисто активным, решение такой оптимизационной задачи оказывается возможным для произвольной системы с любым конечным числом степеней свободы, и оно приведено в работе [4]. В частности, максимуму степени устойчивости отвечает значение $\sigma_* = -p_{10}$, при котором корни $\kappa_{1,2}$ сливаются в один кратный корень, а корни $\kappa_{3,4}$ — лежат с ними на одной вертикали и являются комплексно-сопряженными, при этом $\Delta_*/k = p_{10}$. Отметим, что обычно в таком случае немного изменяют оптимальное значение σ_* , чтобы сделать корни $\kappa_{1,2}$ комплексно-сопряженными и тем самым отступить от варианта кратных корней, который приводит к известным трудностям, изложенным в [4], и вряд ли пригоден для практического использования.

Опираясь на выражения (24), нетрудно понять, что при ν , не превышающем некоторого значения ν_{**} , по-прежнему будет возможно слияние корней $\kappa_{1,2}$, как это было и при $\nu = 0$, а корни $\kappa_{3,4}$ при этом будут находиться левее этих корней. Тогда максимальная безразмерная степень устойчивости будет также равна $\Delta_*/k = p_{10}$, а значение σ_* определится условием

$$\sigma_{*1}(\nu) = -p_{10} + \eta_1\nu. \quad (25)$$

Однако если ν превысит значение ν_{**} , то такая ситуация будет уже невозможна, поскольку корень κ_4 с уменьшением σ окажется лежащим на одной вертикали с корнями $\kappa_{1,2}$ раньше, чем они сольются в один кратный корень. Вещественная часть указанных трех корней и определит максимальную степень устойчивости. Следовательно, в этом случае значение σ_* определяется из уравнения

$$\sigma - \eta_1\nu = \sigma - \eta_2\nu + \sqrt{(\sigma - \eta_2\nu)^2 - p_{20}^2}, \quad (26)$$

разрешая которое относительно σ , находим необходимое значение:

$$\sigma_{*2}(\nu) = \eta_2\nu - \sqrt{(\eta_2 - \eta_1)^2 \nu^2 + p_{20}^2}. \quad (27)$$

Приравнивая выражения (25) и (27), находим после решения получившегося уравнения пограничное значение ν_{**} :

$$\nu_{**} = \frac{p_{20}^2 - p_{10}^2}{2p_{10}(\eta_2 - \eta_1)}. \quad (28)$$

Нетрудно понять, что при $\nu = \nu_{**}$ максимальная степень устойчивости будет отвечать тому случаю, когда три корня оказываются одинаковыми. Объединяя теперь выражения (25) и (27), получим, что оптимальное значение σ_* определяется следующей формулой:

$$\sigma_*(\nu) = \begin{cases} -p_{10} + \eta_1\nu, & 0 < \nu \leq \nu_{**}, \\ \eta_2\nu - \sqrt{(\eta_2 - \eta_1)^2 \nu^2 + p_{20}^2}, & \nu > \nu_{**}. \end{cases} \quad (29)$$

Видно, что это выражение обращается в нуль при $\nu = \nu_*$, определяемом из (4), т. е. когда коэффициент вязкого демпфирования принимается по оптимальному варианту. Как и следовало ожидать, в этой ситуации улучшить степень устойчивости путем введения коллинеарного управления будет невозможно. При этом важно подчеркнуть, что при $\nu > \nu_*$ значение σ_* становится положительным, и это говорит о том, что в данном случае коллинеарное управление должно быть разгонным. Тем не менее совместное действие демпфирования и коллинеарного управления дает эффект подавления колебаний, поскольку легко видеть, что в этом случае из (29) вытекает, что $\sigma_* < \eta_1\nu$, а, как было показано в работе [1], именно это условие и отвечает гашению движений системы. При этом σ_* при $\nu \rightarrow \infty$ стремится снизу к наклонной асимптоте $\sigma_* = \eta_1\nu$. Отметим, что можно записать приближенный характер зависимости (29) при больших значениях ν :

$$\sigma_*(\nu) \approx \eta_1\nu - \frac{p_{20}^2}{2(\eta_2 - \eta_1)\nu} + \frac{p_{20}^4}{8(\eta_2 - \eta_1)^3\nu^3}. \quad (30)$$

Наконец, получим выражение для безразмерной степени устойчивости, отвечающей оптимальному выбору значения σ_* согласно (29), в зависимости от величины ν . Ясно, что при любом ν из диапазона $0 < \nu \leq \nu_{**}$ можно надлежащим подбором σ обеспечить максимально возможное значение безразмерной степени устойчивости, равное p_{10} , когда корни $\kappa_{1,2}$ являются кратными. Если же $\nu > \nu_{**}$, то максимальная степень устойчивости в безразмерном варианте будет отвечать совпадению вещественных частей трех корней, которые по абсолютной величине согласно (26) и (27) будут равны $\eta_1\nu - \sigma_{*2} = -(\eta_2 - \eta_1)\nu + \sqrt{(\eta_2 - \eta_1)^2\nu^2 + p_{20}^2}$. Естественно, что это значение будет убывать с увеличением ν . Объединяя полученные выражения, имеем:

$$\frac{\Delta_*}{k} = \begin{cases} p_{10}, & 0 < \nu \leq \nu_{**}, \\ -(\eta_2 - \eta_1)\nu + \sqrt{(\eta_2 - \eta_1)^2\nu^2 + p_{20}^2}, & \nu > \nu_{**}. \end{cases} \quad (31)$$

3.2. Энерго-временной критерий. Обращаясь к исследованию интегрального критерия для рассматриваемой задачи, вновь заметим сначала, что в отсутствие вязкого трения, т. е. при $\nu = 0$, подобная задача была решена для произвольной механической системы в работе [4], и оптимальное значение, отвечающее этому критерию, определяется выражением

$$\sigma_* = -\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} p_{10}. \quad (32)$$

Это значение тесно связано со знаменитым «золотым сечением», которое часто возникает при решении самых разнообразных оптимизационных задач. В частности, аналогичный результат имеет место в задаче оптимизации демпфирования однозвенного манипулятора, т. е. системы с одной степенью свободы (когда действие коллинеарного управления идентично вязкому трению), где использовался тот же критерий качества [5]. В случае $\nu \neq 0$ задача становится намного более сложной. Выражение для функции F из (18)¹ в результате интегрирования в этом случае по

аналогии с (14) будет иметь следующий вид:

$$F = \frac{E_0}{2} \left[\frac{\cos^2 \vartheta}{k_{10}} \left(\frac{1}{\nu_1 + \sigma_1} + \nu_1 + \sigma_1 + (\nu_1 + \sigma_1) \cos 2\mu_1 + \sin 2\mu_1 \right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{k_{20}} \left(\frac{1}{\nu_2 + \sigma_2} + \nu_2 + \sigma_2 + (\nu_2 + \sigma_2) \cos 2\mu_2 + \sin 2\mu_2 \right) \right], \quad (33)$$

где величины ν_s имеют вид (15), а величины σ_s определяются формулами

$$\sigma_1 = -\frac{\delta}{k_{10}} = -\frac{\sigma}{p_{10}}, \quad \sigma_2 = -\frac{\delta}{k_{20}} = -\frac{\sigma}{p_{20}}. \quad (34)$$

Вновь отбрасывая постоянный множитель $E_0/(2k)$, запишем сразу максимальное значение получившегося выражения по μ_1 и μ_2 :

$$f_{\mu_1, \mu_2}^{\max} = \frac{\cos^2 \vartheta}{p_{10}} \left(\frac{1}{\nu_1 + \sigma_1} + \nu_1 + \sigma_1 + \sqrt{1 + (\nu_1 + \sigma_1)^2} \right) + \frac{\sin^2 \vartheta}{p_{20}} \left(\frac{1}{\nu_2 + \sigma_2} + \nu_2 + \sigma_2 + \sqrt{1 + (\nu_2 + \sigma_2)^2} \right). \quad (35)$$

Как и прежде, далее необходимо разобраться, какое из выражений больше:

$$\begin{aligned} \vartheta = 0: \quad f_{\mu_1, \mu_2}^{\max} &= \frac{1}{p_{10}} \left(\frac{1}{\nu_1 + \sigma_1} + \nu_1 + \sigma_1 + \sqrt{1 + (\nu_1 + \sigma_1)^2} \right), \\ \vartheta = \frac{\pi}{2}: \quad f_{\mu_1, \mu_2}^{\max} &= \frac{1}{p_{20}} \left(\frac{1}{\nu_2 + \sigma_2} + \nu_2 + \sigma_2 + \sqrt{1 + (\nu_2 + \sigma_2)^2} \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Нетрудно видеть, что при $\nu = 0$ имеем $f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = 0) > f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = \pi/2)$ при любом значении σ [4]. Чтобы разобраться в поведении этих функций при $\nu \neq 0$, запишем их упрощенные представления при $\sigma \rightarrow -\infty$:

$$f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = 0) \approx 2 \left[2\nu - (\nu + \sigma) \frac{1}{p_{10}^2} \right], \quad f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = \frac{\pi}{2}) \approx 2 \left[2\nu - (\nu + \sigma) \frac{1}{p_{20}^2} \right], \quad (37)$$

а для первой из них — также при приближении σ к другой границе $\sigma = \eta_1 \nu$, которая является границей зоны гашения движений:

$$f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = 0) \approx \frac{1}{\eta_1 \nu - \sigma} + \frac{1}{p_{10}}, \quad (38)$$

в то время как $f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = \pi/2)$ при $\sigma \rightarrow \eta_1 \nu$ стремится к конечному пределу. Видно, что как при $\sigma \rightarrow -\infty$, так и при $\sigma \rightarrow \eta_1 \nu$ будем иметь $f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = 0) > f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = \pi/2)$.

Ясно, что при увеличении ν от 0 до некоторого пограничного значения ν_{**} графики этих функций по-прежнему не будут иметь общих точек, так что $f_{\mu_1, \mu_2}^{\max}(\vartheta = 0)$ будет являться наибольшим из указанных двух значений. Его минимизация, как нетрудно понять, приводит к следующему значению σ_* в исследуемом диапазоне:

$$\sigma_{*1}(\nu) = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} p_{10} + \eta_1 \nu. \quad (39)$$

При увеличении ν в некоторый момент произойдет касание двух кривых $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0)$ и $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$. Однако пограничной ситуацией, отвечающей значению ν_{**} , является не случай касания, а случай пересечения этих кривых в точке экстремума кривой $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0)$, потому что именно она являлась до сих пор точкой минимума функции $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2, \vartheta}$. Чтобы определить эту точку, достаточно решить уравнение $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) = f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ с учетом представлений (36), подставив в него выражение (39). Численное исследование позволяет найти таким образом зависимость $\nu_{**}(\alpha)$. Обращаясь к анализу случая $\nu > \nu_{**}$, отметим сначала, что функция $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ при $\sigma < \eta_1 \nu$ будет убывающей, так как точка ее экстремума

$$\sigma = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} p_{20} + \eta_2 \nu \quad (40)$$

не попадет в интересующий нас интервал, оказавшись больше значения $\eta_1 \nu$. В самом деле, используя численные методы решения алгебраических уравнений, можно установить, что в случае расположения этой точки на границе $\sigma = \eta_1 \nu$, реализуемом при

$$\nu = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{p_{20}}{\eta_2 - \eta_1}, \quad (41)$$

уравнение $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) = f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ не будет иметь решений ни при каких значениях α , т. е. кривые $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0)$ и $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ еще не будут пересекаться. А тогда при $\nu > \nu_{**}$ в силу убывания функции $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ на исследуемом интервале указанные кривые будут иметь две точки пересечения, причем минимумом функции $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2, \vartheta}$ будет точка пересечения σ_{*2} , лежащая ближе к правой границе интервала. Эта ситуация представлена на рис. 6, где сплошной линией выделена зависимость $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2, \vartheta}$, а посторонние участки отмечены пунктиром.

Нетрудно понять, что с увеличением ν при $\nu = \nu_*$ эта точка окажется равной $\sigma_{*2} = 0$, поскольку при выборе ν по оптимальному варианту на основе энерго-временного критерия улучшить данный показатель будет невозможно. В самом деле, если обратиться к уравнению $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) = f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$ с учетом представлений (36), то легко видеть, что оно удовлетворяется именно при $\nu = \nu_*$ и $\sigma = 0$, поскольку значение ν_* получалось ранее из точно такого же уравнения по формульной записи, в котором σ отсутствовало, так что выражения (36) в этой ситуации полностью переходят в (18). При последующем увеличении ν уже имеем $\sigma_{*2} > 0$, причем $\sigma_{*2} \rightarrow \eta_1 \nu$ при $\nu \rightarrow \infty$. Обращаясь к уравнению $f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = 0) = f_{\max}^{\mu_1, \mu_2}(\vartheta = \pi/2)$, из которого находится σ_{*2} , можно получить для него приближенную зависимость при больших значениях ν :

$$\sigma_{*2}(\nu) \approx \eta_1 \nu - \frac{p_{20}^2}{2(\eta_2 - \eta_1)\nu} - \frac{p_{20}^4}{4(\eta_2 - \eta_1)^2 p_{10} \nu^2}. \quad (42)$$

Сопоставляя формулы (30) и (42), можно сделать важный вывод: кривая, отвечающая максимуму степени устойчивости, при больших ν располагается выше, чем кривая, отвечающая минимуму интегрального критерия, а в пределе при $\nu \rightarrow \infty$

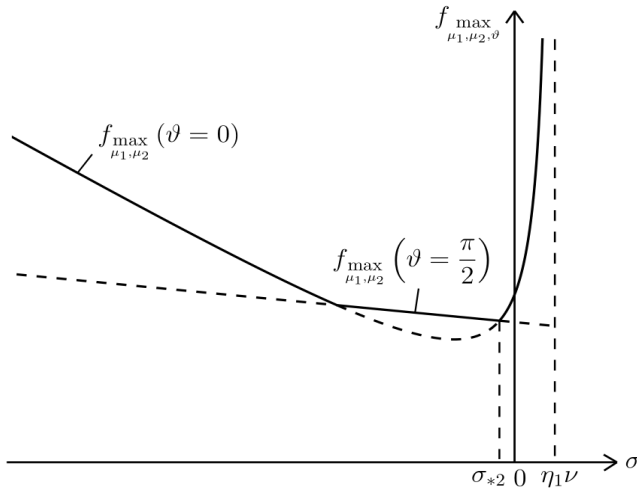


Рис. 6. График зависимости функции $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$ от σ при заданном значении $\nu > \nu_{**}$.

они имеют одну и ту же наклонную асимптоту $\sigma_* = \eta_1 \nu$. При этом в указанных приближенных выражениях совпадают не только первые слагаемые, отвечающие наклонной асимптоте, но и вторые слагаемые, обратно пропорциональные ν . Поэтому можно заключить, что в широком диапазоне достаточно больших значений ν оба критерия оптимизации будут приводить к практически одинаковым результатам.

Таким образом, оптимальное значение σ_* определяется выражением:

$$\sigma_*(\nu) = \begin{cases} -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} p_{10} + \eta_1 \nu, & 0 < \nu \leq \nu_{**}, \\ \sigma_{*2}, & \nu > \nu_{**}. \end{cases} \quad (43)$$

Остается лишь получить выражение для $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$ в зависимости от ν при выборе оптимального значения σ_* согласно (43). Так, в первом диапазоне $0 < \nu \leq \nu_{**}$ это значение будет равно $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}(\vartheta = 0)$, вычисленному с учетом (39), что в свою очередь приводит к выражению

$$f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max} = \frac{\sqrt{11 + 5\sqrt{5}}}{p_{10}\sqrt{2}}. \quad (44)$$

Отсутствие зависимости от ν в нем можно понять из элементарных соображений, поскольку изменение ν приводит лишь к параллельному переносу по горизонтали графика зависимости функции $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}(\vartheta = 0)$ от σ согласно (36), что не влияет на ее экстремальное значение. Таким образом, в указанном диапазоне значений ν можно надлежащим подбором σ обеспечить минимально возможное значение $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$, равное (44). Что же касается случая $\nu > \nu_{**}$, то для него искомое значение $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$ следует вычислять при $\sigma = \sigma_{*2}$, и оно окажется уже большим, чем (44). В результате

находим искомую зависимость:

$$f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max * *} = \begin{cases} \frac{\sqrt{11 + 5\sqrt{5}}}{p_{10}\sqrt{2}}, & 0 < \nu \leq \nu_{**}, \\ f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}(\sigma_{*2}), & \nu > \nu_{**}. \end{cases} \quad (45)$$

4. Обсуждение результатов. Переходя теперь к обсуждению полученных результатов, проанализируем зависимости σ_* от ν , полученные по формулам (29) и (43) и отвечающие двум различным критериям оптимизации. Для этого сначала обратимся к характерным величинам ν_* и ν_{**} , полученным при исследовании каждого критерия, и построим эти зависимости от угла α (рис. 7). Во избежание путаницы здесь данные величины снабжены индексами, указывающими на их принадлежность к определенному критерию: (1) — критерию, основанному на степени устойчивости, (2) — энерго-временному критерию. Видно, что порядок расположения величин $\nu_*^{(1)}$, $\nu_*^{(2)}$, $\nu_{**}^{(1)}$ и $\nu_{**}^{(2)}$ по возрастанию при любом значении угла α всегда оказывается одинаковым, поэтому графики зависимости величин $\sigma_*^{(1)}$ и $\sigma_*^{(2)}$ от ν будут иметь вид, представленный на рис. 8.

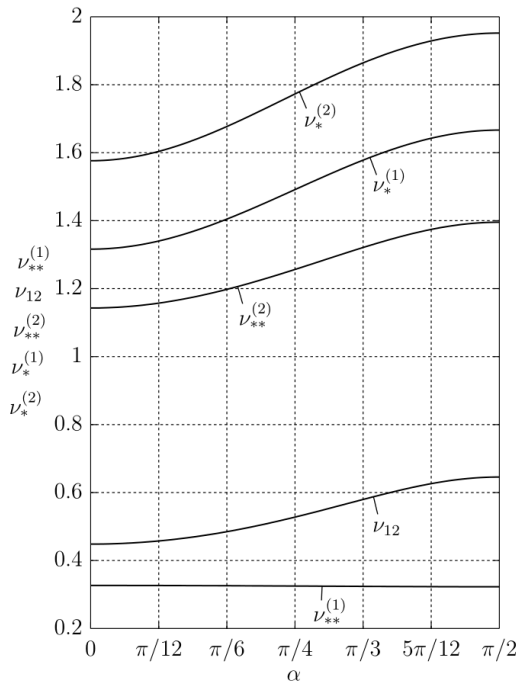


Рис. 7. Графики зависимости величин $\nu_{**}^{(1)}$, ν_{12} , $\nu_{**}^{(2)}$, $\nu_*^{(1)}$ и $\nu_*^{(2)}$ от угла α .

Приведенные кривые имеют количественные различия, хотя качественно они очень похожи. Интересно отметить, что имеется точка ν_{12} , лежащая в диапазоне $\nu_{**}^{(1)} < \nu_{12} < \nu_{**}^{(2)}$, для которой оба критерия дают один и тот же результат. Прирав-

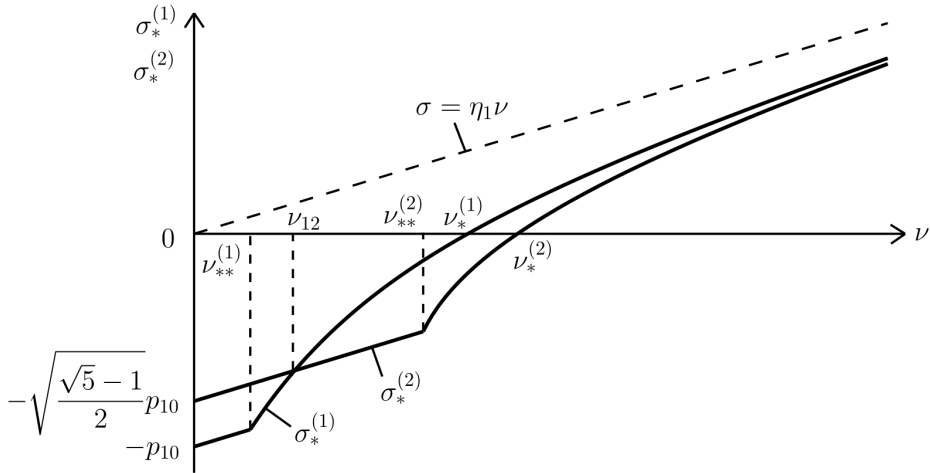


Рис. 8. Графики зависимости величин $\sigma_*^{(1)}$ и $\sigma_*^{(2)}$ от ν .

нивая выражения для $\sigma_*^{(1)}$ и $\sigma_*^{(2)}$ в указанном диапазоне, получим

$$\nu_{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}p_{10}} \left(\sqrt{\sqrt{5} + 1} p_{20}^2 - \sqrt{\sqrt{5} - 1} p_{10}^2 \right). \quad (46)$$

Зависимость ν_{12} также приведена на рис. 7. Таким образом, при любом значении α имеет место цепочка неравенств: $\nu_{**}^{(1)} < \nu_{12} < \nu_{**}^{(2)} < \nu_*^{(1)} < \nu_*^{(2)}$.

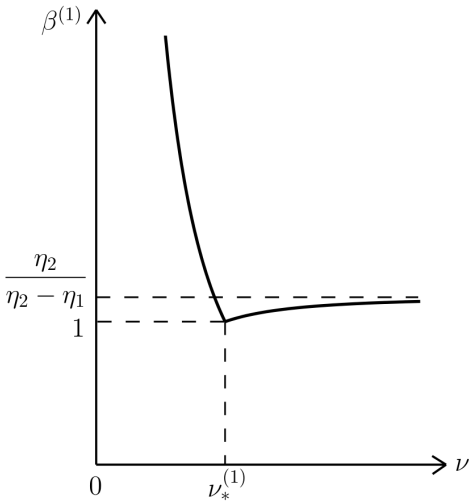


Рис. 9. График зависимости величины $\beta^{(1)}$ от ν .

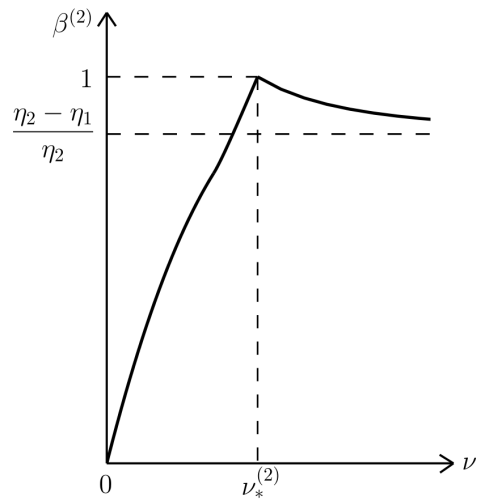


Рис. 10. График зависимости величины $\beta^{(2)}$ от ν .

В заключение представляет интерес оценить, насколько улучшились значения критериев оптимизации при введении в систему коллинеарного управления с параметрами, настроенными наилучшим образом. Сначала построим график зависимости отношения $\beta^{(1)}$ безразмерной степени устойчивости Δ_*/k согласно (31) к без-

размерной степени устойчивости Δ/k при $\sigma = 0$, т. е. согласно (7), от параметра ν . Ясно, что при $\nu = 0$ это отношение равно $+\infty$, а при $\nu = \nu_*^{(1)}$ оно достигает минимума, равного 1, когда коллинеарное управление ни при каких параметрах не может улучшить степень устойчивости. Наконец, при $\nu \rightarrow \infty$ данное отношение стремится к пределу $\eta_2/(\eta_2 - \eta_1) > 1$. Отметим, что это значение тем больше, чем больше отношение η_1/η_2 , т. е. чем ближе угол α к $\pi/2$ согласно (9)¹. Указанная зависимость представлена на рис. 9.

Помимо этого, построим график зависимости отношения $\beta^{(2)}$ значения функции $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$, согласно (45), при наличии наилучшим образом настроенного управления к функции $f_{\mu_1, \mu_2, \vartheta}^{\max}$ — при отсутствии управления, т. е. согласно (21), от параметра ν . Ясно, что при $\nu = 0$ это отношение равно нулю, а при $\nu = \nu_*^{(2)}$ оно достигает максимума, равного 1, когда коллинеарное управление ни при каких параметрах не может улучшить значение критерия. Наконец, при $\nu \rightarrow \infty$ данное отношение стремится к пределу $(\eta_2 - \eta_1)/\eta_2 < 1$, и это значение тем меньше, чем больше отношение η_1/η_2 , т. е. чем ближе α к $\pi/2$. Упомянутая зависимость приведена на рис. 10.

5. Заключение. В данной работе были исследованы вопросы оптимального гашения колебаний пространственного двойного маятника. При этом рассматривалось пассивное гашение (вязкое демпфирование) в отдельности, а также производился дополнительный учет и активных воздействий (коллинеарное управление). Принимались два критерия оптимизации, характеризующие эффективность процессов затухания движений системы: максимизация степени устойчивости и минимизация интегрального энерго-временного показателя. В ходе точного решения задачи в рамках линейной модели были определены оптимальные параметры пассивного варианта гашения как функции угла между шарнирными осями пространственного двойного маятника, отвечающие каждому из критериев оптимизации. Кроме того, была рассмотрена задача оптимизации совместного пассивного и активного гашения и получены оптимальные значения параметров активного гашения при заданных параметрах пассивного гашения, а также представлены зависимости, иллюстрирующие эффективность использования таких параметров. Эти результаты наглядно демонстрируют целесообразность добавления надлежащим образом настроенных управляющих воздействий в диссипативную систему для обеспечения наиболее выраженных процессов затухания ее движений. При этом следует подчеркнуть нетривиальную структуру построенных решений. Полученные выводы могут представлять практический интерес при исследовании динамического поведения реальных двухзвенных манипуляторов.

Литература

1. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 2, 357–365 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215>
2. Леонтьев В. А., Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимальное демпфирование колебаний двухзвенного манипулятора. *Робототехника и техническая кибернетика* **2** (19), 52–59 (2018).
3. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний*. Москва, Высшая школа (1980).

4. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимальное гашение свободных колебаний в линейных механических системах. *Машиностроение и инженерное образование* **3** (52), 8–15 (2017).
5. Смольников Б. А. *Проблемы механики и оптимизации роботов*. Москва, Наука (1991).

Статья поступила в редакцию 28 июля 2022 г.;
доработана 7 сентября 2022 г.;
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент, мл. науч. сотр.; smirnov.alexey.1994@gmail.com
Смольников Борис Александрович — доц., ст. науч. сотр.; smolnikovba@yandex.ru

Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. II. Solving the problem and analyzing the results*

A. S. Smirnov, B. A. Smolnikov

Peter the Great St Petersburg Polytechnic University,
29, ul. Polytechnicheskaya, St Petersburg, 195251, Russian Federation
Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
61, Bolshoy pr. V. O., St Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. II. Solving the problem and analyzing the results. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 121–138. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.111> (In Russian)

This paper is a continuation of the article «Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. I. Formulation of the problem», in which the problem formulation of the optimal oscillations damping of double pendulum with joint axes not collinear to each other was given. Passive damping (viscous friction) is considered separately, and the possibility of additional accounting of active impacts (collinear control) is also discussed. Two optimization criteria are adopted that characterize the efficiency of the damping processes of system movements: first, the degree of stability is maximized, and then the integral energy-time criterion is minimized. The optimal values of the parameters of the considered damping options are determined according to both criteria in the course of the exact solution of the problem within the framework of a linear model. The obtained results are presented in the form of visual graphic illustrations which allow to establish their main qualitative and quantitative features. The conclusions can be useful in studying the movements of manipulators and various robotic structures.

Keywords: spatial double pendulum, viscous friction, collinear control, optimization criterion, degree of stability, energy-time criterion.

References

1. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. I. Formulation of the problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 2, 357–365 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215>

*See Part I: Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. I. Formulation of the problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2022, vol. 9 (67), issue 2, pp. 357–365. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215> (In Russian)

(In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **55** iss. 2, 243–248 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1063454122020133>].

2. Leontev V. A., Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimal damping of two-link manipulator oscillations. *Robotics and Technical Cybernetics* **2** (19), 52–59 (2018). (In Russian)

3. Biderman V. L. *Theory of mechanical oscillations*. Moscow, Vysshaia shkola Publ. (1980). (In Russian)

4. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimal damping of free oscillations in linear mechanical systems. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie* **3** (52), 8–15 (2017). (In Russian)

5. Smolnikov B. A. *Problems of mechanics and robotoptimization*. Moscow, Nauka Publ. (1991). (In Russian)

Received: July 28, 2022
Revised: September 7, 2022
Accepted: September 8, 2022

Authors' information:

Aleksey S. Smirnov — smirnov.alexey.1994@gmail.com

Boris A. Smolnikov — smolnikovba@yandex.ru