

## Равногранный тетраэдр и система точечных масс, равномоментная твердому телу

Е. А. Никонова

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»  
Российской академии наук,  
Российская Федерация, 119333, Москва, ул. Вавилова, 44/2

**Для цитирования:** Никонова Е. А. Равногранный тетраэдр и система точечных масс, равномоментная твердому телу // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 155–164.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.113>

Рассматривается задача о равномоментности произвольного твердого тела и системы материальных точек равных масс. Показывается, что система четырех одинаковых масс, располагающихся в вершинах равногранного тетраэдра, равномоментна твердому телу. Строится система материальных точек равных масс, располагающихся в вершинах равногранного тетраэдра, равномоментная ядру кометы 67P Чурюмова—Герасименко.

*Ключевые слова:* моменты инерции твердого тела, равномоментные системы тел, равногранный тетраэдр, ядро кометы 67P Чурюмова—Герасименко.

**1. Введение.** Две системы тел называются *равномоментными*, если их моменты инерции относительно всех прямых равны один другому [1]. Хорошо известно (см., например, [1], а также [2–7]), что тензор инерции любого твердого тела совпадает с тензором инерции некоторой системы из четырех одинаковых точечных масс. Указанная система масс будет равномоментной данному телу, если также выполнено, что масса тела и масса системы совпадают, а также совпадают центры их масс. Число материальных точек в системе не может быть меньше четырех, при условии, что тело не является плоским [1]. Двенадцать координат четырех точек должны удовлетворять девяти соотношениям: три соотношения для совпадения центров масс и шесть соотношений для совпадения компонент матриц инерции. Это обстоятельство предоставляет определенную свободу выбора точек.

Так, в [8] исследуется возможное расположение этих точечных масс. Показывается, что каждая система точечных масс с одним и тем же тензором инерции может быть параметризована элементами ортогональной группы по модулю четыре перестановок этих точек. Доказывается ряд утверждений об особенностях расположения точек в пространстве при наличии того или иного произвола. Так, например, оказывается, что при фиксированной матрице инерции можно указать систему точечных масс с такой же матрицей инерции, в которой одна из точек — произвольная. Кроме того, как оказалось, можно разместить две точечные массы на произвольной прямой или три точки в произвольной плоскости.

Рассмотрение системы точек, равномоментной данному телу, находит свое применение в задачах динамики твердых тел (см., например, [9–11]), поскольку именно значения моментов инерции тела фигурируют в динамических уравнениях Эйлера.

В [1] приводятся несложные математические рассуждения для построения системы, равномоментной данному телу, состоящей из четырех одинаковых точечных масс. Эти рассуждения опираются на преобразование координат вершин правильного тетраэдра. Эллипсоид инерции правильного тетраэдра с равными массами в вершинах, вписанного в сферу радиуса  $\sqrt{3}$ , является единичной сферой. Проекция этой сферы в эллипсоид с полуосями, равными соответствующим радиусам инерции главных моментов инерции твердого тела, переводит правильный тетраэдр в наклонный, а система масс, находящихся в вершинах этого наклонного тетраэдра, будет искомой.

В настоящей работе показывается, что для заданного твердого тела существует равномоментная система одинаковых точечных масс, располагающихся в вершинах равногранного тетраэдра.

**2. Равногранный тетраэдр.** Согласно [12–14], тетраэдр называется равногранным, если все его грани — равные между собой треугольники. Как известно, у равногранного тетраэдра  $\mathcal{T}$  бимедианы попарно перпендикулярны, являются общими серединными перпендикулярами соответствующих скрещивающихся ребер и их общая точка пересечения совпадает с барицентром тетраэдра. Тетраэдр  $\mathcal{T}$  удобно ассоциировать с прямоугольным параллелепипедом  $\mathcal{P}$ , длины сторон которого совпадают с длинам бимедиан тетраэдра  $\mathcal{T}$ . Если в параллелепипеде  $\mathcal{P}$  выбрать две противоположные грани, тогда концы их скрещивающихся диагоналей образуют равногранный тетраэдр  $\mathcal{T}$ . Пусть длины ребер параллелепипеда  $\mathcal{P}$  равны  $2a_1, 2a_2, 2a_3$  соответственно. Легко видеть, что с одним и тем же прямоугольным параллелепипедом  $\mathcal{P}$  связаны два центрально симметричных друг другу равногранных тетраэдра  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$ , отличающихся выбором пары скрещивающихся диагоналей противоположных сторон параллелепипеда. Если задать жестко связанную с  $\mathcal{P}$  правую систему координат  $Ox_1x_2x_3$  с началом в барицентре  $\mathcal{P}$  — точке  $O$  — и осями, направленными вдоль его ребер, то вершины  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  тетраэдра  $\mathcal{T}_1$  в этой системе координат задаются радиус-векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{A_1} = \overrightarrow{OA_1} &= (a_1, -a_2, -a_3)^T, & \mathbf{r}_{B_1} = \overrightarrow{OB_1} &= (-a_1, -a_2, a_3)^T, \\ \mathbf{r}_{C_1} = \overrightarrow{OC_1} &= (-a_1, a_2, -a_3)^T, & \mathbf{r}_{D_1} = \overrightarrow{OD_1} &= (a_1, a_2, a_3)^T, \end{aligned} \quad (1)$$

а вершины  $A_2, B_2, C_2$  и  $D_2$  тетраэдра  $\mathcal{T}_2$  в этой системе координат задаются радиус-векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{A_2} = \overrightarrow{OA_2} &= (a_1, a_2, -a_3)^T, & \mathbf{r}_{B_2} = \overrightarrow{OB_2} &= (-a_1, a_2, a_3)^T, \\ \mathbf{r}_{C_2} = \overrightarrow{OC_2} &= (-a_1, -a_2, -a_3)^T, & \mathbf{r}_{D_2} = \overrightarrow{OD_2} &= (a_1, -a_2, a_3)^T. \end{aligned} \quad (2)$$

Центральная симметрия ставит вершины тетраэдров  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$  в соответствие друг другу следующим образом

$$A_1 \rightarrow B_2, \quad B_1 \rightarrow A_2, \quad C_1 \rightarrow D_2, \quad D_1 \rightarrow C_2.$$

Понятие о производящей функций компонент тензора Эйлера — Пуансо однородного твердого тела, введенное в [15], может быть распространено и на системы точечных масс. Соответствующие интегралы необходимо заменить на суммы по точкам системы. Для равногранного тетраэдра  $\mathcal{T}_1$ , координаты вершин которого имеют четное число отрицательных компонент, производящая функция имеет вид

$$F_1(\mathbf{t}) = 4m (\cosh(a_1 t_1) \cosh(a_2 t_2) \cosh(a_3 t_3) + \sinh(a_1 t_1) \sinh(a_2 t_2) \sinh(a_3 t_3)),$$

где  $m$  — масса, сосредоточенная в каждой вершине тетраэдра,  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^T$  — вектор параметров. Аналогично для равногранного тетраэдра;  $\mathcal{T}_2$ , координаты вершин которого имеют, соответственно, нечетное число отрицательных компонент, производящая функция имеет вид

$$F_2(\mathbf{t}) = 4m (\cosh(a_1 t_1) \cosh(a_2 t_2) \cosh(a_3 t_3) - \sinh(a_1 t_1) \sinh(a_2 t_2) \sinh(a_3 t_3)).$$

**Замечание 1.** Производящая функция  $F(\mathbf{t})$  параллелепипеда  $\mathcal{P}$ , в вершинах которого сосредоточены равные массы  $m$ , является суммой функций  $F_1(\mathbf{t})$  и  $F_2(\mathbf{t})$ :

$$F(\mathbf{t}) = F_1(\mathbf{t}) + F_2(\mathbf{t}) = 8m \cosh(a_1 t_1) \cosh(a_2 t_2) \cosh(a_3 t_3).$$

Оси  $Ox_1x_2x_3$  являются главными центральными осями инерции тел  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$ , в этих осях главные центральные моменты тел  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$  одинаковые и записываются как

$$J_k = 4mj'_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad j'_1 = a_2^2 + a_3^2, \quad j'_2 = a_1^2 + a_3^2, \quad j'_3 = a_1^2 + a_2^2. \quad (3)$$

Тензор инерции  $\mathbf{J}$  тела  $\mathcal{B}$  и его тензор Эйлера — Пуансо второго порядка  $\mathbf{I}_2$  связаны соотношениями

$$\mathbf{J} = \text{Tr}(\mathbf{I}_2)\mathbf{E} - \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{1}{2}\text{Tr}(\mathbf{J})\mathbf{E} - \mathbf{J}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{E}$  — единичная матрица  $3 \times 3$ . У этих тензоров общие собственные векторы, а вместе с ними — и главные оси инерции (см., например, [16, 17]).

**3. Система материальных точек, равномоментная данному телу.** Приведем еще один способ, отличный от способа, данного в [1], построения системы четырех одинаковых точечных масс, равномоментной данному телу. В главных центральных осях инерции тела  $\mathcal{B}$  зададим прямоугольный параллелепипед  $\mathcal{P}$ , барицентр которого совпадает с центром масс тела, а ребра, параллельные его осям инерции, имеют полудлины

$$a_1 = \sqrt{\tilde{I}_{200}/m_{\mathcal{B}}}, \quad a_2 = \sqrt{\tilde{I}_{020}/m_{\mathcal{B}}}, \quad a_3 = \sqrt{\tilde{I}_{002}/m_{\mathcal{B}}}, \quad (5)$$

соответственно, где  $m_{\mathcal{B}}$  — масса тела  $\mathcal{B}$ , а  $\tilde{I}_{200}$ ,  $\tilde{I}_{020}$ ,  $\tilde{I}_{002}$  — компоненты тензора Эйлера — Пуансо второго порядка, записанного в главных центральных осях инерции тела  $\mathcal{B}$ . Выберем любые две противоположные грани построенного параллелепипеда. Разместим на концах их скрещивающихся диагоналей точки с массами, равными четверти от массы тела  $m_p = m_{\mathcal{B}}/4$ . Такая система четырех точечных масс будет равномоментной данному телу. Действительно, например, момент инерции системы точек относительно первой оси инерции равен

$$4m_p(a_2^2 + a_3^2) = 4m_p(I_{020}/m_{\mathcal{B}} + I_{002}/m_{\mathcal{B}}) = I_{020} + I_{002}.$$

Принимая во внимание соотношение (4), имеем  $I_{020} + I_{002} = J_1$ .

**Замечание 2.** Тензоры Эйлера — Пуансо старших порядков находят свое применение в механике космического полета. Они присутствуют в разложении ньютоновского потенциала притяжения по малому параметру (см., например, [17–19], а также [20–22]).

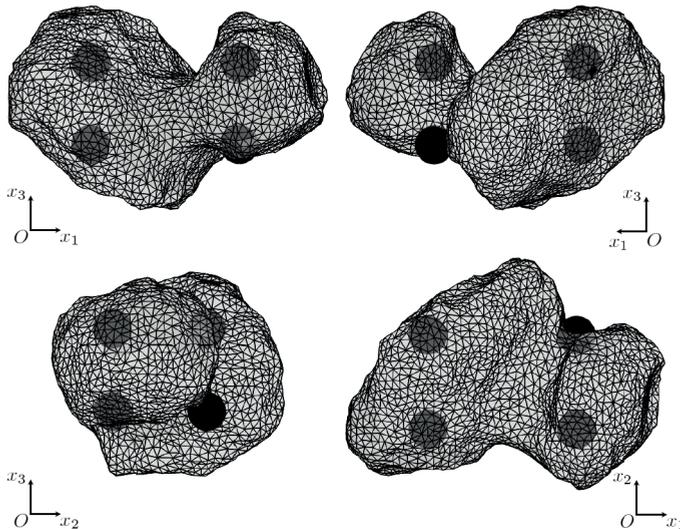
**Пример.** [Ядро кометы 67Р Чурюмова—Герасименко]. В небесной механике при изучении динамики малых тел со сложным распределением масс, форма которых далека от шарообразной, последние могут быть представлены в виде совокупности нескольких точечных масс — это так называемая модель масконов (см., например, [23, 24], а также [25, 26]). Определим для ядра кометы 67Р Чурюмова—Герасименко модельную совокупность точечных масс, опирающуюся на равномоментную систему материальных точек, расположенных в вершинах равногранного тетраэдра. Будем полагать, что поверхность ядра кометы задается в рамках полиэдрального представления и определяется многогранником с треугольными гранями, содержащими 2842 вершин  $\mathcal{V}$ , 8517 ребер  $\mathcal{E}$  и 5678 граней  $\mathcal{F}$  [27]. В [28] (см. также [29, 30]) предложен способ вычисления компонент тензоров Эйлера—Пуансо вплоть до четвертого порядка для тел, поверхность которых задается многогранником. Для рассматриваемой модели ядра кометы 67Р Чурюмова—Герасименко имеют место следующие значения для компонент тензора Эйлера—Пуансо второго порядка, записанного в главных центральных осях инерции, отнесенные к массе ядра кометы  $m$ :

$$\tilde{I}_{200}/m = 1351909 \text{ м}^2, \quad \tilde{I}_{020}/m = 543636 \text{ м}^2, \quad \tilde{I}_{002}/m = 410371 \text{ м}^2.$$

Согласно (5), полудлины бимедиан равногранного тетраэдра принимают следующие значения:

$$a_1 = 1163 \text{ м}, \quad a_2 = 737 \text{ м}, \quad a_3 = 641 \text{ м},$$

и координаты его вершин могут быть вычислены по формуле (1) или (2). Иллюстрация ядра кометы 67Р Чурюмова—Герасименко с наложением системы эквимоментной системы точек с координатами (2) приведена на рисунке.



Ядро кометы 67Р Чурюмова—Герасименко в проекциях на координатные плоскости. Вид вдоль оси  $Ox_2$  при  $x_2 < 0$  (верхний ряд, слева), при  $x_2 > 0$  (верхний ряд, справа), вдоль оси  $Ox_1$ ,  $x_1 > 0$  (нижний ряд, слева), вдоль оси  $Ox_3$ ,  $x_3 > 0$  (нижний ряд, справа).

**Замечание 3.** В [31–33] в рамках полиэдрального представления малых небесных тел предложен и реализован алгоритм построения приближения поля притя-

жения полем некоторого наперед заданного количества притягивающих центров. Алгоритм основан на так называемом методе  $K$ -средних из теории распознавания образов и представляется итерационной процедурой, разбивающей исходное тело на заданное число непересекающихся частей, которые, в свою очередь, заменяются материальными точками с массами, равными массам получившихся частей.

**Замечание 4.** Отметим, что не только ядро кометы 67P Чурюмова — Герасименко относится к контактно-двойным малым небесным объектам. В качестве примеров также следует указать ядра комет Галлея, Туттля, Борелли, Хартли (см., например, [34]), астероид Итокава (см., например, [35]), а также транснептуновый объект 2014 MU<sub>69</sub> Аррокот (см., например, [36, 37]).

**4. Выводы.** В работе рассмотрена задача о равномоментности произвольного твердого тела и системы одинаковых точечных масс, расположенных в вершинах равногранного тетраэдра. Приведен конструктивный алгоритм построения такой системы точечных масс. В качестве примера рассмотрено ядро кометы 67P Чурюмова — Герасименко и для нее построена равномоментная система точечных масс.

Можно предложить некоторое обобщение понятия системы точечных масс, равномоментной данному телу, распространив его на случай совпадения моментов инерции старших порядков. Так, суммарное количество компонент тензоров Эйлера — Пуансо нулевого, первого, второго и третьего порядков равно двадцати [17]. Поэтому можно ставить вопрос о существовании системы из пяти материальных точек, вообще говоря, с различными массами, моменты инерции которой совпадают с моментами инерции данного тела вплоть до третьего порядка. Имеет место система из двадцати нелинейных уравнений для определения двадцати неизвестных — трех координат пяти точек и пяти масс.

Так, например, равногранные тетраэдры  $\mathcal{T}_1$  и  $\mathcal{T}_2$  равномоментны друг другу в классическом смысле, при этом они не являются равномоментными в предложенном расширенном смысле. Действительно, для  $\mathcal{T}_1$  единственная ненулевая компонента тензора Эйлера — Пуансо третьего порядка имеет вид  $I_{111}|_{\mathcal{T}_1} = 4ma_1a_2a_3$ , при этом для  $\mathcal{T}_2$  единственная ненулевая компонента тензора Эйлера — Пуансо третьего порядка отличается знаком и равна  $I_{111}|_{\mathcal{T}_2} = -4ma_1a_2a_3$ .

## Литература

1. Routh E. J. *The elementary part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: Being Part I. Of a treatise on the whole subject.* London, Macmillan and Co (1882).
2. Loudon W. L. *An elementary treatise on rigid dynamics.* New York; London, The Macmillan Company (1896).
3. Franklin Ph. Equipomental systems. *Studies in Applied Mathematics* **8** (1–4), 129–140 (1929).
4. Sommerville D. M. Y. Equipomental tetrads of a rigid body. *Math. Notes* **26**, 10–11 (1930). <https://doi.org/10.1017/S175774890002127>
5. Talbot A. Equipomental systems. *The Mathematical Gazette* **36** (316), 95–110 (1952). <https://doi.org/10.2307/3610326>
6. Huang N. C. Equipomental system of rigidly connected equal particles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **16** (6), 1194–1196 (1993). <https://doi.org/10.2514/3.21150>
7. Gil Chica F. J., Pérez Polo M., Pérez Molina M. Note on an apparently forgotten theorem about solid rigid dynamics. *European Journal of Physics* **35** (4), 045003 (2014). <https://doi.org/10.1088/0143-0807/35/4/045003>
8. Laus L. P., Selig J. M. Rigid body dynamics using equipomental systems of point-masses. *Acta Mechanica* **231**, 221–236 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02543-3>
9. Selig J. M. *Geometric Fundamentals of Robotics*, 2<sup>nd</sup> ed. Berlin, Springer (2005).

10. Selig J. M. Equipomental systems and robot dynamics. *IMA Mathematics of Robotics*, Sept. 9–11, 2015. Oxford, St Anne’s College (2015).
11. Laus L. P., Selig J. M. Rigid body dynamics using equipomental systems of point-masses. *Acta Mechanica* **231**, 221–236 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02543-3>
12. Шарьгин И. Ф. *Задачи по геометрии. Стереометрия*. Вып. 31. Сер. Библиотечка «Квант». Москва, Наука (1984).
13. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: в 3 т. Т. 2. *Стереометрия, преобразования пространства*. Москва, МЦНМО (2006).
14. Никонова Е. А. О стационарных движениях равногранного тетраэдра с неподвижной точкой в центральном поле сил. *Прикладная математика и механика* **86** (2), 153–168 (2022). <https://doi.org/10.31857/S0032823522020096>
15. Буров А. А., Никонова Е. А. Производящая функция компонент тензора Эйлера — Пуансо. *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки* **498**, 53–56 (2021). <https://doi.org/10.31857/S2686740021030068>
16. Dobrovolskis A. R. Inertia of Any Polyhedron. *Icarus* **124** (2), 698–704 (1996). <https://doi.org/10.1006/icar.1996.0243>
17. Дубошин Г. Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы*. Москва, Наука (1968).
18. Meirovitch L. *Methods of analytical dynamics*. New York, McGraw-Hill Book Company (1970).
19. Архангельский Ю. А. *Аналитическая динамика твердого тела*. Москва, Наука (1977).
20. Meirovitch L. On the effects of higher-order inertia integrals on the attitude stability of Earth-pointing satellites. *Journal of the Astronautical Sciences* **15** (1), 14–18 (1968).
21. Суликашвили Р. С. О влиянии моментов инерции третьего и четвертого порядка на движение твердого тела. *Прикладная математика и механика* **51** (2), 268–274 (1987).
22. Суликашвили Р. С. Стационарные движения тел, допускающих группу симметрии правильных многогранников в ньютоновском поле сил. *Прикладная математика и механика* **53** (4), 582–586 (1989).
23. Koch K. R., Morrison F. A. Simple Layer Model of the Geopotential from a Combination of Satellite and Gravity Data. *Journal of Geophysical Research* **75** (8), 1483–1492 (1970). <https://doi.org/10.1029/JB075i008p01483>
24. Melosh H. J. Mascons and the Moon’s Orientation. *Earth and Planetary Science Letters* **25** (3), 322–326 (1975). [https://doi.org/10.1016/0012-821X\(75\)90248-4](https://doi.org/10.1016/0012-821X(75)90248-4)
25. Chanut T. G. G., Aljbaae S., Carruba V. Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **450** (4), 3742–3749 (2015). <https://doi.org/10.1093/mnras/stv845>
26. Wittick P. T., Russell R. P. Mascon models for small body gravity fields. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference* **162**, 2003–2020 (2018).
27. Gaskell R., Jorda L., Capanna C., Hviid S., Gutierrez P. SPC SHAP5 CARTESIAN PLATE MODEL for COMET 67P/C-G 6K PLATES, RO-C-MULTI-5-67P-SHAPE-V2.0:CG\_SPC\_SHAP5\_006K\_CART, NASA Planetary Data System and ESA Planetary Science Archive (2017).
28. Буров А. А., Никонов В. И. Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка. *Доклады Российской академии наук. Физика, технические науки* **492** (1), 58–62 (2020). <https://doi.org/10.31857/S2686740020030086>
29. Буров А. А., Никонов В. И. Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера — Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела. *Журнал вычислительной математики и математической физики* **60** (10), 1764–1776 (2020). <https://doi.org/10.31857/S0044466920100063>
30. Burov A. A., Nikonov V. I. Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics* **16** (2), 259–273 (2020). <https://doi.org/10.20537/nd200203>
31. Burov A. A., Guerman A. D., Nikonova E. A., Nikonov V. I. Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points. *Acta Astronautica* **157**, 225–232 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.030>
32. Буров А. А., Герман А. Д., Никонов В. И. Использование метода К-средних для агрегирования масс продолговатых небесных тел. *Космические исследования* **57** (4), 283–289 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0023420619040022>
33. Буров А. А., Герман А. Д., Распопова Е. А., Никонов В. И. О применении К-средних для определения распределения масс гантелеобразных небесных тел. *Нелинейная динамика* **14** (1), 45–52 (2018). <https://doi.org/10.20537/nd1801004>

34. Lages J., Shevchenko I.I., Rollin G. Chaotic dynamics around cometary nuclei. *Icarus* **307**, 391–399 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.10.035>
35. Lages J., Shepelyansky D.L., Shevchenko I.I. Chaotic Zones around Rotating Small Bodies. *Astronomical Journal* **153** (6), 272 (2017). <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa7203>
36. Stern S.A., Weaver H.A., Spencer J.R., Olkin C.B., Gladstone G.R., Grundy W.M., Moore J.M., Cruikshank D.P., Elliott H.A., McKinnon W.B., Parker J.W., Verbiscer A.J., Young L.A., Aguilar D.A., Albers J.M., Andert T., Andrews J.P., Bagenal F., Banks M.E., Bauer B.A., Bowman J.A., Bechtold K.E., Beddingfield C.B., Behrooz N., Beisser K.B., Benecchi S.D., Bernardoni E., Beyer R.A., Bhaskaran S., Bierson C.J., Binzel R.P., Birath E.M., Bird M.K., Boone D.R., Bowman A.F., Bray V.J., Britt D.T., Brown E.L., Buckley M.R., Buie M.W., Buratti B.J., Burke L.M., Bushman S.S., Carcich B.S., Chaikin A.L., Chavez C.L., Cheng A.F., Colwell E.J., Conard S.J., Conner M.P., Conrad C.A., Cook J.C., Cooper S.B., Custodio O.S., Dalle Ore C.M., Deboy C.C., Dharmavaram P., Dhirgira R.D., Dunn G.F., Earle A.M., Egan A.F., Eisig J., El-Maarry M.R., Engelbrecht C., Enkel B.L., Ercol C.J., Fattig E.D., Ferrell C.L., Finley T.J., Firer J., Fischetti J., Folkner W.M., Fosbury M.N., Fountain G.H., Freeze J.M., Gabasova L., Glaze L.S., Green J.L., Griffith G.A., Guo Y., Hahn M., Hals D.W., Hamilton D.P., Hamilton S.A., Hanley J.J., Harch A., Harmon K.A., Hart H.M., Hayes J., Hersman C.B., Hill M.E., Hill T.A., Hofgartner J.D., Holdridge M.E., Horányi M., Hosadurga A., Howard A.D., Howett C.J.A., Jaskulek S.E., Jennings D.E., Jensen J.R., Jones M.R., Kang H.K., Katz D.J., Kaufmann D.E., Kavelaars J.J., Keane J.T., Keleher G.P., Kinczyk M., Kochte M.C., Kollmann P., Krimigis S.M., Kruizinga G.L., Kusnierkiewicz D.Y., Lahr M.S., Lauer T.R., Lawrence G.B., Lee J.E., Lessac-Chenen E.J., Linscott I.R., Lisse C.M., Lunsford A.W., Mages D.M., Mallder V.A., Martin N.P., May B.H., McComas D.J., McNutt Jr. R.L., Mehoke D.S., Mehoke T.S., Nelson D.S., Nguyen H.D., Núñez J.I., Ocampo A.C., Owen W.M., Oxtton G.K., Parker A.H., Pätzold M., Pelgrift J.Y., Pelletier F.J., Pineau J.P., Piquette M.R., Porter S.B., Protopapa S., Quirico E., Redfern J.A., Regiec A.L., Reitsema H.J., Reuter D.C., Richardson D.C., Riedel J.E., Ritterbush M.A., Robbins S.J., Rodgers D.J., Rogers G.D., Rose D.M., Rosendall P.E., Runyon K.D., Ryschkewitsch M.G., Saina M.M., Salinas M.J., Schenk P.M., Scherrer J.R., Schlei W.R., Schmitt B., Schultz D.J., Schurr D.C., Scipioni F., Sepan R.L., Shelton R.G., Showalter M.R., Simon M., Singer K.N., Stahlheber E.W., Stanbridge D.R., Stansberry J.A., Steffl A.J., Strobel D.F., Stothoff M.M., Stryk T., Stuart J.R., Summers M.E., Tapley M.B., Taylor A., Taylor H.W., Tedford R.M., Throop H.B., Turner L.S., Umurhan O.M., Van Eck J., Velez D., Versteeg M.H., Vincent M.A., Webbert R.W., Weidner S.E., Weigle G.E., Wendel J.R., White O.L., Whittenburg K.E., Williams B.G., Williams K.E., Williams S.P., Winters H.L., Zangari A.M., Zurbuchen T.H. Initial results from the New Horizons exploration of 2014 MU<sub>69</sub>, a small Kuiper Belt object. *Science* **364** (6441), Art. no eaaw 9771 (2019). <https://doi.org/10.1126/science.aaw9771>
37. Rollin G., Shevchenko I.I. Lages J. Dynamical environments of MU<sub>69</sub> and similar objects. *Icarus* **357**, Art. no 114178 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2020.114178>

Статья поступила в редакцию 31 мая 2022 г.;  
доработана 20 августа 2022 г.;  
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Никонова Екатерина Александровна — мл. науч. сотр.; [nikonova.ekaterina.a@gmail.com](mailto:nikonova.ekaterina.a@gmail.com)

## Isosceles tetrahedron and an equimomental system of a rigid body

*E. A. Nikonova*

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,  
44/2, ul. Vavilova, Moscow, 119333, Russian Federation

**For citation:** Nikonova E. A. Isosceles tetrahedron and an equimomental system of a rigid body. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 155–164. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.113> (In Russian)

The problem of equimomental systems of a rigid body is considered. It is shown that the system of four equal masses located at the vertices of an isosceles tetrahedron is equimomental

to a given rigid body. A system of material points of equal masses located at the vertices of an isosceles tetrahedron, which is equimomental of cometary nuclei of 67P Churyumov — Gerasimenko, has been constructed.

*Keywords:* moments of inertia of a rigid body, equimomental systems of rigid bodies, isosceles tetrahedron, comet 67P Churyumov — Gerasimenko.

## References

1. Routh E. J. *The elementary part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: Being Part I. Of a treatise on the whole subject.* London, Macmillan and Co (1882).
2. Loudon W. L. *An elementary treatise on rigid dynamics.* New York; London, The Macmillan Company (1896).
3. Franklin Ph. Equimomental systems. *Studies in Applied Mathematics* **8** (1–4), 129–140 (1929).
4. Sommerville D. M. Y. Equimomental tetrads of a rigid body. *Math. Notes* **26**, 10–11 (1930). <https://doi.org/10.1017/S1757748900002127>
5. Talbot A. Equimomental systems. *The Mathematical Gazette* **36** (316), 95–110 (1952). <https://doi.org/10.2307/3610326>
6. Huang N. C. Equimomental system of rigidly connected equal particles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **16** (6), 1194–1196 (1993). <https://doi.org/10.2514/3.21150>
7. Gil Chica F. J., Pérez Polo M., Pérez Molina M. Note on an apparently forgotten theorem about solid rigid dynamics. *European Journal of Physics* **35** (4), 045003 (2014). <https://doi.org/10.1088/0143-0807/35/4/045003>
8. Laus L. P., Selig J. M. Rigid body dynamics using equimomental systems of point-masses. *Acta Mechanica* **231**, 221–236 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02543-3>
9. Selig J. M. *Geometric Fundamentals of Robotics*, 2<sup>nd</sup> ed. Berlin, Springer (2005).
10. Selig J. M. Equimomental systems and robot dynamics. *IMA Mathematics of Robotics*, Sept. 9–11, 2015. Oxford, St Anne's College (2015).
11. Laus L. P., Selig J. M. Rigid body dynamics using equimomental systems of point-masses. *Acta Mechanica* **231**, 221–236 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02543-3>
12. Sharygin I. F. *Problems in Solid Geometry (Science for Everyone)*. Moscow, Mir Publ. (1986). (In Russian)
13. Ponarin Ya. P. *Elementary geometry*. In: 3 vols, vol. 2. Stereometry, space transformations. Moscow, MTsNMO Publ. (2006). (In Russian)
14. Nikonova E. A. On stationary motions of an isosceles tetrahedron with a fixed point in the central force field. *Applied Mathematics and Mechanics* **86** (2), 153–168 (2022). <https://doi.org/10.31857/S0032823522020096> (In Russian)
15. Burov A. A., Nikonova E. A. The generating function for the components of the Euler — Poinset tensor. *Doklady Physics* **66** (5), 139–142 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1028335821050037> (In Russian)
16. Dobrovolskis A. R. Inertia of Any Polyhedron. *Icarus* **124** (2), 698–704 (1996). <https://doi.org/10.1006/icar.1996.0243>
17. Duboshin G. N. *Celestial Mechanics. Fundamental Problems and Methods*. Moscow, Nauka Publ. (1968). (In Russian)
18. Meirovitch L. *Methods of analytical dynamics*. New York, McGraw-Hill Book Company (1970).
19. Arkhangel'skii Yu. A. *Analytical Dynamics of Rigid Body*. Moscow, Nauka Publ. (1977). (In Russian)
20. Meirovitch L. On the effects of higher-order inertia integrals on the attitude stability of Earth-pointing satellites. *Journal of the Astronautical Sciences* **15** (1), 14–18 (1968).
21. Sulikashvili R. S. The effect of third-and fourth-order moments of inertia on the motion of a solid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **51** (2), 268–274 (1987). (In Russian) [Engl. transl.: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **51** (2), 208–212 (1987). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(87\)90066-9](https://doi.org/10.1016/0021-8928(87)90066-9)].
22. Sulikashvili R. S. On the stationary motions in a newtonian field of force of a body that admits of regular polyhedron symmetry groups. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **53** (4), 582–586 (1989). (In Russian) [Engl. transl.: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **53** (4), 452–456 (1989). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(89\)90051-8](https://doi.org/10.1016/0021-8928(89)90051-8)].
23. Koch K. R., Morrison F. A. Simple Layer Model of the Geopotential from a Combination of Satellite and Gravity Data. *Journal of Geophysical Research* **75** (8), 1483–1492 (1970). <https://doi.org/10.1029/JB075i008p01483>

24. Melosh H. J. Mascons and the Moon's Orientation. *Earth and Planetary Science Letters* **25** (3), 322–326 (1975). [https://doi.org/10.1016/0012-821X\(75\)90248-4](https://doi.org/10.1016/0012-821X(75)90248-4)
25. Chanut T. G. G., Aljbaae S., Carruba V. Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **450**(4), 3742–3749 (2015). <https://doi.org/10.1093/mnras/stv845>
26. Wittick P. T., Russell R. P. Mascon models for small body gravity fields. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference* **162**, 2003–2020 (2018).
27. Gaskell R., Jorda L., Capanna C., Hviid S., Gutierrez P. SPC SHAP5 CARTESIAN PLATE MODEL for COMET 67P/C-G 6K PLATES, RO-C-MULTI-5-67P-SHAPE-V2.0:CG\_SPC\_SHAP5\_006K\_CART, NASA Planetary Data System and ESA Planetary Science Archive (2017).
28. Burov A. A., Nikonov V. I. Computation of attraction potential of asteroid (433) Eros with an accuracy up to the terms of the fourth order. *Doklady Akademii nauk. Fizika, techn. nauki* **492** (1), 58–62 (2020). (In Russian) <https://doi.org/10.31857/S2686740020030086> [Engl. transl.: *Doklady Physics* **65** (5), 164–168 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1028335820050080>].
29. Burov A. A., Nikonov V. I. Sensitivity of the Euler–Poinsoot tensor values to the choice of the body surface triangulation mesh. *Zh. Vychisl. Mat. i Fiz.* **60**(10), 1764–1776 (2020). <https://doi.org/10.31857/S0044466920100063> (In Russian) [Engl. transl.: *Computational Mathematics and Mathematical Physics* **60** (10), 1708–1720. (2020). <https://doi.org/10.1134/S0965542520100061>].
30. Burov A. A., Nikonov V. I. Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics* **16**(2), 259–273 (2020). <https://doi.org/10.20537/nd200203>
31. Burov A. A., Guerman A. D., Nikonova E. A., Nikonov V. I. Approximation for attraction field of irregular celestial bodies using four massive points. *Acta Astronautica* **157**, 225–232 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2018.11.030>
32. Burov A. A., Guerman A. D., Nikonov V. I. Using the K-means method for aggregating the masses of elongated celestial bodies. *Cosmic Research* **57**(4), 283–289 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0023420619040022> (In Russian) [Engl. transl.: *Cosmic Research* **57** (4), 266–271 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0010952519040026>].
33. Burov A. A., Guerman A. D., Raspopova E. A., Nikonov V. I. On the use of the K-means algorithm for determination of mass distributions in dumbbell-like celestial bodies. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* **14** (1), 45–52 (2018). <https://doi.org/10.20537/nd1801004>
34. Lages J., Shevchenko I. I., Rollin G. Chaotic dynamics around cometary nuclei. *Icarus* **307**, 391–399 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2017.10.035>
35. Lages J., Shepelyansky D. L., Shevchenko I. I. Chaotic Zones around Rotating Small Bodies. *Astronomical Journal* **153** (6), Art. no 272 (2017). <https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa7203>
36. Stern S. A., Weaver H. A., Spencer J. R., Olkin C. B., Gladstone G. R., Grundy W. M., Moore J. M., Cruikshank D. P., Elliott H. A., McKinnon W. B., Parker J. W., Verbiscer A. J., Young L. A., Aguilar D. A., Albers J. M., Andert T., Andrews J. P., Bagenal F., Banks M. E., Bauer B. A., Bauman J. A., Bechtold K. E., Beddingfield C. B., Behrooz N., Beisser K. B., Benecchi S. D., Bernardoni E., Beyer R. A., Bhaskaran S., Bierson C. J., Binzel R. P., Birath E. M., Bird M. K., Boone D. R., Bowman A. F., Bray V. J., Britt D. T., Brown E. L., Buckley M. R., Buie M. W., Buratti B. J., Burke L. M., Bushman S. S., Carcich B. S., Chaikin A. L., Chavez C. L., Cheng A. F., Colwell E. J., Conard S. J., Conner M. P., Conrad C. A., Cook J. C., Cooper S. B., Custodio O. S., Dalle Ore C. M., Deboy C. C., Dharmavaram P., Dhingra R. D., Dunn G. F., Earle A. M., Egan A. F., Eisig J., El-Maarry M. R., Engelbrecht C., Enkel B. L., Ercol C. J., Fattig E. D., Ferrell C. L., Finley T. J., Firer J., Fischetti J., Folkner W. M., Fosbury M. N., Fountain G. H., Freeze J. M., Gabasova L., Glaze L. S., Green J. L., Grifith G. A., Guo Y., Hahn M., Hals D. W., Hamilton D. P., Hamilton S. A., Hanley J. J., Harch A., Harmon K. A., Hart H. M., Hayes J., Hersman C. B., Hill M. E., Hill T. A., Hofgartner J. D., Holdridge M. E., Horányi M., Hosadurga A., Howard A. D., Howett C. J. A., Jaskulek S. E., Jennings D. E., Jensen J. R., Jones M. R., Kang H. K., Katz D. J., Kaufmann D. E., Kavelaars J. J., Keane J. T., Keleher G. P., Kinczyk M., Kochte M. C., Kollmann P., Krimigis S. M., Kruizinga G. L., Kusnierkiewicz D. Y., Lahr M. S., Lauer T. R., Lawrence G. B., Lee J. E., Lessac-Chenen E. J., Linscott I. R., Lisse C. M., Lunsford A. W., Mages D. M., Mallder V. A., Martin N. P., May B. H., McComas D. J., McNutt Jr. R. L., Mehoke D. S., Mehoke T. S., Nelson D. S., Nguyen H. D., Núñez J. I., Ocampo A. C., Owen W. M., Oxtou G. K., Parker A. H., Pätzold M., Pelgrift J. Y., Pelletier F. J., Pineau J. P., Piquette M. R., Porter S. B., Protopapa S., Quirico E., Redfern J. A., Regiec A. L., Reitsema H. J., Reuter D. C., Richardson D. C., Riedel J. E., Ritterbush M. A., Robbins S. J., Rodgers D. J., Rogers G. D., Rose D. M., Rosendall P. E., Runyon K. D., Ryschkewitsch M. G., Saina M. M., Salinas M. J., Schenk P. M., Scherrer J. R., Schlei W. R., Schmitt B., Schultz D. J., Schurr D. C., Scipioni F., Sepan R. L., Shelton R. G.,

Showalter M.R., Simon M., Singer K.N., Stahlheber E.W., Stanbridge D.R., Stansberry J.A., Steffl A.J., Strobel D.F., Stothoff M.M., Stryk T., Stuart J.R., Summers M.E., Tapley M.B., Taylor A., Taylor H.W., Tedford R.M., Throop H.B., Turner L.S., Umurhan O.M., Van Eck J., Velez D., Versteeg M.H., Vincent M.A., Webbert R.W., Weidner S.E., Weigle G.E., Wendel J.R., White O.L., Whittenburg K.E., Williams B.G., Williams K.E., Williams S.P., Winters H.L., Zangari A.M., Zurbuchen T.H. Initial results from the New Horizons exploration of 2014 MU<sub>69</sub>, a small Kuiper Belt object. *Science* **364** (6441), Art. no eaaw 9771 (2019). <https://doi.org/10.1126/science.aaw9771>

37. Rollin G., Shevchenko I.I. Lages J. Dynamical environments of MU<sub>69</sub> and similar objects. *Icarus* **357**, Art. no 114178. (2021). <https://doi.org/10.1016/j.icarus.2020.114178>

Received: May 31, 2022  
Revised: August 20, 2022  
Accepted: September 8, 2022

Author's information:

*Ekaterina A. Nikonova* — [nikonova.ekaterina.a@gmail.com](mailto:nikonova.ekaterina.a@gmail.com)