

Поверхность нулевой скорости в общей задаче трех тел

В. Б. Титов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Титов В. Б.* Поверхность нулевой скорости в общей задаче трех тел // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 165–175. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.114>

Поверхности нулевой скорости общей плоской задачи трех тел строятся в пространстве форм, фактор-пространстве конфигурационного пространства задачи по переносам и поворотам. Такое пространство представляет собой пространство конгруэнтных треугольников, а сфера в этом пространстве — подобные треугольники. Интеграл энергии в пространстве форм дает уравнение поверхности нулевой скорости. Эти поверхности можно получить также исходя из неравенства Сундмана. Такие поверхности отделяют области возможного движения от областей, где движение невозможно. Без потери общности можно считать, что постоянная энергия равна $-1/2$ и искомые поверхности зависят только от величины углового момента задачи J . В зависимости от этой величины можно выделить пять топологически разных типов поверхностей. При малых J поверхность состоит из двух отдельных поверхностей, внутренней и внешней, движение возможно только между ними. При увеличении J внутренняя поверхность увеличивается, внешняя уменьшается, поверхности сначала при каком-то значении J имеют общую точку, при дальнейшем увеличении J их топологический тип изменяется и, в конце концов, поверхность нулевой скорости распадается на три непересекающихся поверхности, движение возможно только внутри них. Для каждого из пяти типов приведены примеры соответствующих поверхностей, построены их сечения в плоскости xy и в плоскости xz и сами поверхности, изучаются их свойства.

Ключевые слова: общая задача трех тел, поверхность нулевой скорости, область допустимых движений.

1. Введение. Задача трех тел в современной постановке сформулирована И. Ньютоном. Ее постановка чрезвычайно проста: имеется три точечных тела с массами m_1, m_2, m_3 , причем в общей задаче массы ненулевые; определить движение этих тел под действием сил их гравитационного взаимодействия. Уравнения движения тел можно записать так:

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}.$$

Здесь U — потенциальная функция:

$$U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = \sum_{i,j=1,i < j}^3 \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (1)$$

$r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, а единицы выбраны так, чтобы постоянная всемирного тяготения равнялась единице, $G = 1$.

Для двух тел аналогичные уравнения движения легко решаются. Собственно это решение известно со времен Кеплера. Еще Эйлеру были известны десять интегралов движения задачи N тел. В случае задачи двух тел эти интегралы позволяют получить общее решение. Для задачи трех тел этого явно недостаточно: число независимых переменных равно 18 ($6N$). Брунс и Пуанкаре доказали, что классические интегралы являются единственными независимыми интегралами задачи трех тел.

Более точная формулировка Брунса ограничивает класс рассматриваемых интегралов алгебраическими функциями от прямоугольных координат, у Пуанкаре фигурируют аналитические функции элементов.

Сложность задачи трех тел способствовала развитию многих разделов математики, в том числе качественной теории дифференциальных уравнений. Одной из интересных конструкций, относящихся к качественной небесной механике, является введенная в ограниченной круговой задаче трех тел Дж. Хиллом в 1878 г. поверхность нулевой скорости, ограничивающая множество возможных движений тела нулевой, точнее бесконечно малой или пассивно гравитирующей, массы. Эта поверхность строится во вращающейся системе координат и, таким образом, является поверхностью нулевой *относительной* скорости. Геометрически поверхность Хилла представляет собой проекцию 5-мерной поверхности уровня интеграла Якоби на трехмерное конфигурационное пространство. Разделение конфигурационного пространства на области, где движение возможно, и области, где движение невозможно, оказалось весьма полезным. Поверхности нулевой скорости строились и не только в ограниченной круговой задаче трех тел и ее предельном варианте, задаче Хилла [1], рассматривающем движение в окрестности тела меньшей массы. Для ограниченной (не круговой) задачи трех тел Л. Г. Лукьянов получил [2, 3] поверхности минимальной скорости, также разделяющие области возможного и невозможного движения, К. В. Холшевников и В. Б. Титов [4] построили поверхность минимальной скорости в однократно осредненной по долготам главных тел круговой ограниченной задаче. Области возможного и невозможного движения в общей задаче трех тел рассматривались В. Г. Голубевым (см., например, [5]).

В настоящей работе строится поверхность нулевой скорости в общей задаче трех тел. Конфигурационное пространство этой задачи девятимерно, если рассматривать плоскую задачу — шестимерно. Попробуем свести нашу задачу к задаче меньшей размерности.

Девять из десяти интегралов являются следствием инвариантности уравнений движения относительно переносов и вращений. Такая инвариантность позволяет, например в задаче двух тел, считать все орбиты заданного эксцентриситета и размера одинаковыми.

В задаче N тел имеет место симметрия масштаба: если функции $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$, представляют решение задачи N тел, то решением задачи также является и

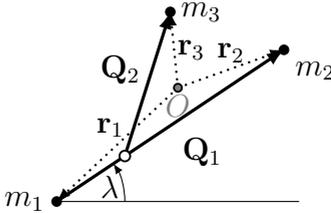
$$\begin{aligned} \rho_i(t) &= \lambda \mathbf{r}_i(\lambda^{-3/2}t), \\ \dot{\rho}_i(t) &= \lambda^{-1/2} \mathbf{v}_i(\lambda^{-3/2}t), \\ h' &= \lambda^{-1}h, \\ J' &= \lambda^{1/2}J, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь h — постоянная энергии; J — угловой момент; λ — любое положительное вещественное число. Это свойство является простым следствием однородности потенциала U , по сути, эта симметрия, открытая еще Кеплером, справедлива в случае любого числа тел. Таким образом, имея решение для h , мы получаем решение для любого

значения постоянной энергии того же знака, что позволяет нам ограничиться лишь тремя значениями постоянной энергии, например $h = -1/2, 0, 1/2$.

Итак, чтобы упростить задачу, уменьшим ее размерность [6].

2. Пространство форм. Будем рассматривать здесь плоскую задачу трех тел (12 переменных) и факторизуем конфигурационное пространство по переносам. Это можно сделать разными способами: используя, например, барицентрическую систему, или рассматривая в качестве независимых переменных взаимные расстояния (в пространственном случае потребовались бы еще две переменные, отвечающие за ориентацию плоскости трех тел), или воспользовавшись хорошо известными координатами Якоби (рис. 1).



$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \\ \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{r}_3 - \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \end{aligned}$$

Рис. 1. Координаты Якоби и угол λ (отсчитывается от фиксированной в инерциальном пространстве прямой).

Из трех векторов \mathbf{r}_i мы получили два: \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 , подразумевая $\mathbf{Q}_3 = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0$, и по известным $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ мы легко можем восстановить \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, 3$.

В пространстве координат Якоби мы можем получить взаимные расстояния r_{ij} , кинетическую энергию T , лагранжиан L и угловой момент J :

$$\begin{aligned} r_{12} &= |\mathbf{Q}_1|, \\ r_{13} &= \left| \mathbf{Q}_2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{Q}_1 \right|, \\ r_{23} &= \left| \mathbf{Q}_2 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{Q}_1 \right|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 + m_3 \dot{\mathbf{r}}_3^2) = \frac{1}{2} \left(\mu_1 \dot{\mathbf{Q}}_1^2 + \mu_2 \dot{\mathbf{Q}}_2^2 \right), \\ L &= T(\dot{\mathbf{Q}}_1, \dot{\mathbf{Q}}_2) + U(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2), \\ J &= \mu_1 \mathbf{Q}_1 \times \dot{\mathbf{Q}}_1 + \mu_2 \mathbf{Q}_2 \times \dot{\mathbf{Q}}_2. \end{aligned}$$

Здесь $\mu_1 = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$, $\mu_2 = m_3 (m_1 + m_2) / (m_1 + m_2 + m_3)$.

Теперь рассмотрим фактор-пространство по поворотам. Сфера в пространстве координат Якоби $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ есть S^3 , а избавившись от поворотов, получаем S^2 , таким образом, мы естественно приходим к классическому преобразованию Хопфа ($S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$).

Будем рассматривать $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ как точки комплексного пространства, $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathbb{C}$. Тогда

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2} \mu_1 |\mathbf{Q}_1|^2 - \frac{1}{2} \mu_2 |\mathbf{Q}_2|^2, \\ \xi_2 + i \xi_3 &= \sqrt{\mu_1 \mu_2} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathcal{X}$ — 3-мерное пространство. Каждый элемент пространства \mathcal{X} представляет собой класс ориентируемых конгруэнтных треугольников, будем называть его *пространством форм*. В этом пространстве длина вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) равна моменту инерции:

$$\begin{aligned} I &= m_1|\mathbf{r}_1|^2 + m_2|\mathbf{r}_2|^2 + m_3|\mathbf{r}_3|^2 = m_1m_2r_{12}^2 + m_1m_3r_{13}^2 + m_2m_3r_{23}^2 = \\ &= \mu_1|\mathbf{Q}_1|^2 + \mu_2|\mathbf{Q}_2|^2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}. \end{aligned}$$

Сфера заданного радиуса является множеством подобных треугольников, удобнее взять радиус, равный $1/2$, мы будем называть эту сферу *сферой форм*. Как получить $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$, если известны ξ_1, ξ_2, ξ_3 ? Введем угол λ (рис. 1), равный углу между вектором \mathbf{Q}_1 и осью абсцисс, тогда $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$ можно выразить через ξ_1, ξ_2, ξ_3 , и этот угол λ , кинетический момент T и угловой момент J запишутся в виде

$$\begin{aligned} T &= \frac{4J^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}{8\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}}, \\ J &= \mu_1\mathbf{Q}_1 \times \mathbf{Q}_1 + \mu_2\mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_2, \\ \lambda &= \frac{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} d\lambda}{2(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)} + \frac{\xi_2 \frac{d\xi_3}{dt} - \xi_3 \frac{d\xi_2}{dt}}{2(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1)}. \end{aligned}$$

Очевидно, угловой момент J сопряжен с углом λ и, зная ξ_1, ξ_2, ξ_3 , можно получить угол λ из квадратуры:

$$\lambda(t) = \int_0^t \frac{\partial R}{\partial J} d\tau = \int_0^t \frac{J - \frac{\xi_2 \xi_3 - \xi_3 \xi_2}{2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1}}{\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} d\tau, \quad (4)$$

здесь R — соответствующая функция Раусса.

Потенциальная функция задачи $U = m_1m_2/r_{12} + m_1m_3/r_{13} + m_2m_3/r_{23}$ имеет особенности при $r_{ij} = 0$. Регуляризация соответствующих уравнений движения и результаты приводятся в [7, 8]. В настоящей работе рассматриваются области возможного и невозможного движения в нерегуляризованном пространстве форм.

3. Поверхность нулевой скорости. Поскольку система консервативна, можно записать интеграл энергии:

$$T - U = \frac{4J^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}{8\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} - U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = h. \quad (5)$$

В случае, если постоянная энергии h отрицательна, можно определить поверхность нулевой скорости (поверхность Хилла). В нашем случае $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$, т. е. поверхность, где скорость изменения конфигурации треугольника равна нулю:

$$U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) + h - \frac{J^2}{2\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} = 0. \quad (6)$$

На самом деле

$$\begin{aligned} \frac{J^2}{2I} - U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - h &\leq \frac{J^2}{2I} + \dot{I}^2/(8I) - U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - h \leq \\ &\leq \frac{4J^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}{8\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}} - U(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - h = 0, \end{aligned}$$



Рис. 2. Поверхность нулевой скорости при $J = 0$.

т. е. из уравнения (5) следует неравенство Сундмана, и, наоборот, уравнение для поверхности нулевых скоростей в пространстве форм можно получить непосредственно из неравенства Сундмана. В случае $J = 0$ эта поверхность выглядит так (массы тел здесь равны): три ветви поверхности соответствуют конфигурациям, в которых два тела близки, третье — значительно дальше, а центральные лучи этих ветвей соответствуют двойным соударениям.

Поверхности нулевой скорости и области возможного движения, ограниченные этими поверхностями, строятся в пространстве (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , \mathcal{X} , в этом же пространстве строятся и орбиты задачи. Каждая точка (ξ_1, ξ_2, ξ_3) этого пространства определяет треугольник, в вершинах которого находятся три тела, его размер $\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, а форма определяется направлением, т. е. точкой сферы форм. Зная (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , из (7) можно получить взаимные расстояния, а из (4) — наклон λ нашего треугольника к фиксированной прямой, т. е. положения всех трех тел. Заметим, что и классические поверхности Хилла в ограниченной задаче трех тел тоже рассматриваются не в инерциальной, а во вращающейся системе координат.

Выражение для $U(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ легко получается из (1). Для этого выразим через ξ_1, ξ_2, ξ_3 взаимные расстояния:

$$\begin{aligned}
 r_{12}^2 &= \frac{m_1+m_2}{2m_1m_2} (\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_1), \\
 r_{13}^2 &= \frac{m_1+m_3}{2m_1m_3} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \\
 &\quad + \frac{m_2m_3 - m_1(m_1+m_2+m_3)}{2m_1m_3(m_1+m_2)} \xi_1 + \frac{\sqrt{m_1m_2m_3(m_1+m_2+m_3)}}{m_1m_3(m_1+m_2)} \xi_2, \\
 r_{23}^2 &= \frac{m_2+m_3}{2m_2m_3} \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2} + \\
 &\quad + \frac{m_1m_3 - m_2(m_1+m_2+m_3)}{2m_2m_3(m_1+m_2)} \xi_1 - \frac{\sqrt{m_1m_2m_3(m_1+m_2+m_3)}}{m_2m_3(m_1+m_2)} \xi_2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Симметрия масштаба позволяет нам зафиксировать значение постоянной энергии, например $h = -1/2$. Теперь исследуем поведение поверхности нулевой скорости с фиксированным значением h при изменяющемся значении постоянной углового момента J . При $J = 0$ поверхность приведена на рис. 2.

Начнем со случая $m_1 = m_2 = m_3 (= 1)$. Рассмотрим точки поверхности нулевой скорости в положительном направлении оси аппликат (наша поверхность симметрична относительно плоскости $O\xi_1\xi_2$): $(0, 0, \xi_3)$. При $J = 0$ из (6) имеем

$$U(0, 0, \xi_3) = 3/\sqrt{\xi_3} = 1/2 \quad \rightarrow \quad \xi_3 = 36.$$

Таким образом, область возможного движения включает отрезок $[-36, 36]$ оси аппликат. Из этого отрезка можно исключить начало координат, если мы не рассмат-

риваем тройного соударения. Заметим, что поверхность нулевой скорости в начале координат не имеет физического смысла: нельзя говорить о трех телах, находящихся в одной точке и имеющих нулевую скорость, по сути, это одна точка с массой, равной сумме масс трех тел.

Теперь рассмотрим точки поверхности в положительном направлении оси абсцисс (при $\xi_1 < 0$ весь луч $(\xi_1, 0, 0)$ входит в область возможного движения). Из уравнения (6) имеем

$$U(\xi_1, 0, 0) = 1/\sqrt{2\xi_1} + 2/\sqrt{\xi_1/2} = 1/2 \rightarrow \xi_1 = 50.$$

Если $J \neq 0$, то на оси аппликат

$$U(0, 0, \xi_3) - \frac{J^2}{2\xi_3} = 3/\sqrt{\xi_3} - \frac{J^2}{2\xi_3} = 1/2 \rightarrow \xi_3 \in \left[\left(3 - \sqrt{9 - J^2}\right)^2, \left(3 + \sqrt{9 - J^2}\right)^2 \right].$$

Корни этого уравнения существуют только при $|J| < 3$ (если h — произвольное отрицательное число, при $|J| < 3/\sqrt{2|h|}$), в противном случае корней на оси аппликат нет (рис. 3–6).

Аналогичные рассуждения справедливы и для оси абсцисс:

$$U(\xi_1, 0, 0) - \frac{J^2}{2\xi_1} = 1/\sqrt{2\xi_1} + 2/\sqrt{\xi_1/2} - \frac{J^2}{2\xi_1} = 1/2 \rightarrow \\ \rightarrow \xi_1 \in \left[\left(5 - \sqrt{25 - 2J^2}\right)^2 / 2, \left(5 + \sqrt{25 - 2J^2}\right)^2 / 2 \right].$$

Посмотрим теперь, как изменяется поверхность нулевых скоростей при изменении J . На рис. 3–6 изображены поверхности нулевых скоростей при $J = 2.99$, $J = 3.2$ и $J = 4.5$. Топология областей допустимого движения в этих случаях различна. Для случаев $|J| < 3$ эта область ограничена внешней поверхностью с тремя ветвями, похожей на поверхность при $J = 0$ (если начало координат считать выколотой точкой), и внутренней поверхностью, сечение которой плоскостью $\xi_3 = 0$ имеет вид трилистника, а сечение плоскостью $\xi_2 = 0$ — симметрично относительно экватора, вытянуто вдоль оси абсцисс. Это сечение зависит от меридиана, сечение плоскостью $\xi_1 = 0$ будет другим. На рисунке внутренняя поверхность хорошо видна. При $|J| = 3$ внутренняя и внешняя поверхности имеют две общие точки, и при $3 < |J| < 5/\sqrt{2} \approx 3.53553$ в центральной части поверхности с тремя ветвями появляется дырка.

При $|J| < 3$ внутренняя поверхность компактна (рис. 4). Очевидно, в начале координат она имеет особую точку. Поверхность изображена полупрозрачной, и три «воронки» хорошо видны.

При $J = 5/\sqrt{2}$ каждая из ветвей имеет только две общие точки с соседними ветвями, выколотую точку в начале координат не рассматриваем. И, далее, при $J > 5/\sqrt{2}$ мы имеем три отдельные ветви.

Теперь рассмотрим случай неравных масс. Пусть $m_1 = 2m_2 = 4m_3 = 12/7$. Рассмотрим сечения и поверхности, аналогичные случаю равных масс (рис. 7–10).

Таким образом, как и в случае равных масс, с ростом углового момента J внешняя поверхность нулевой скорости сужается, а внутренняя растет, область возможных движений — связное (но не односвязное) множество. При некотором значении

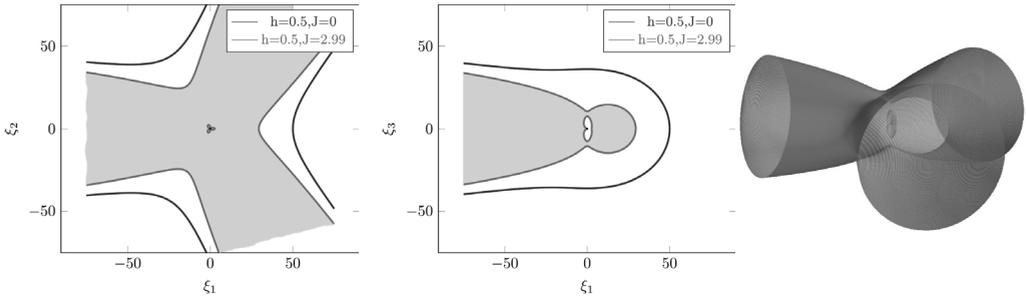


Рис. 3. Поверхность нулевой скорости при $J = 2.99$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

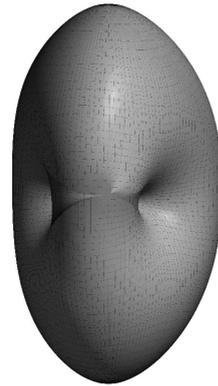


Рис. 4. Внутренняя поверхность нулевой скорости при $J = 2.999$.

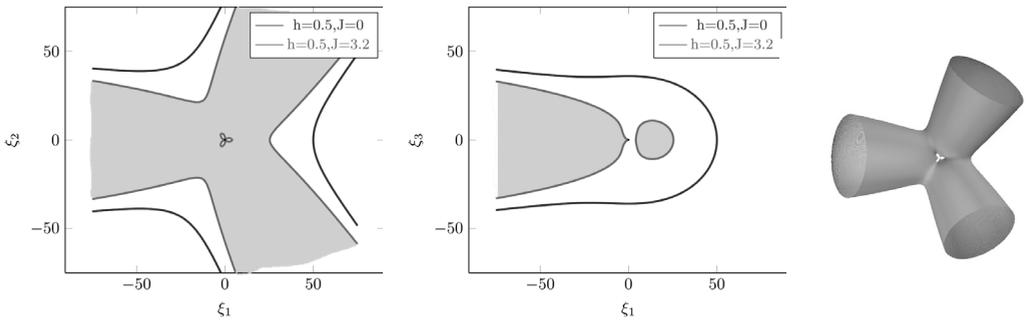


Рис. 5. Поверхность нулевой скорости при $J = 3.2$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

J обе области, внешняя и внутренняя, касаются сразу в двух симметричных точках, соответствующих точкам Лагранжа L_4 и L_5 . При дальнейшем увеличении J в области возможных движений появляется дырка (см. рис. 7). Если бы эта область была ограниченной, это было похоже на тор, и, далее, между ветвью больших масс и ветвью большой и средней массы, остается только одна общая точка — это точка Эйлера L_1 , и при дальнейшем увеличении J эти ветви не имеют общих точек (см. рис. 8), хотя область возможных движений все еще остается связной. Увеличивая J дальше, мы получаем два связных множества, не связанных друг с другом. На рис. 9 правая и левая верхняя ветви тоже отделяются друг от друга (это точка

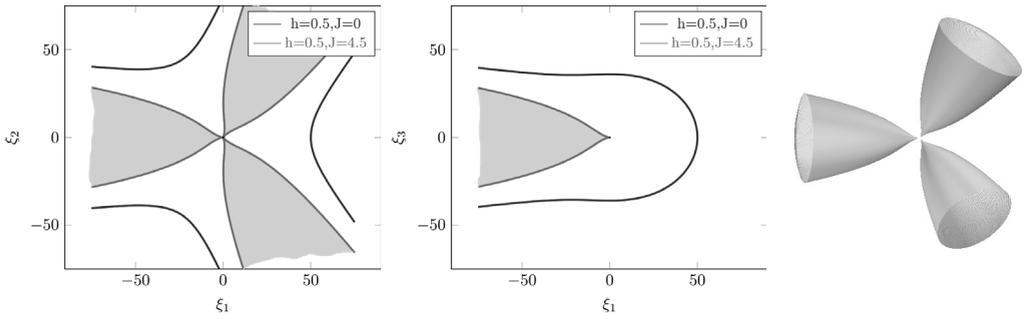


Рис. 6. Поверхность нулевой скорости при $J = 4.5$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

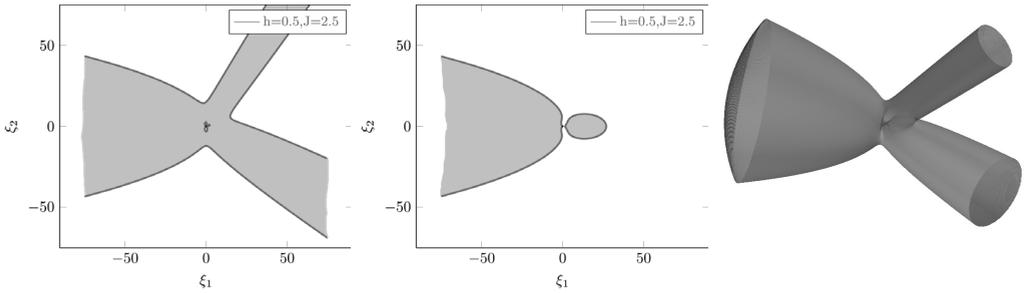


Рис. 7. Поверхность нулевой скорости при $J = 2.5$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

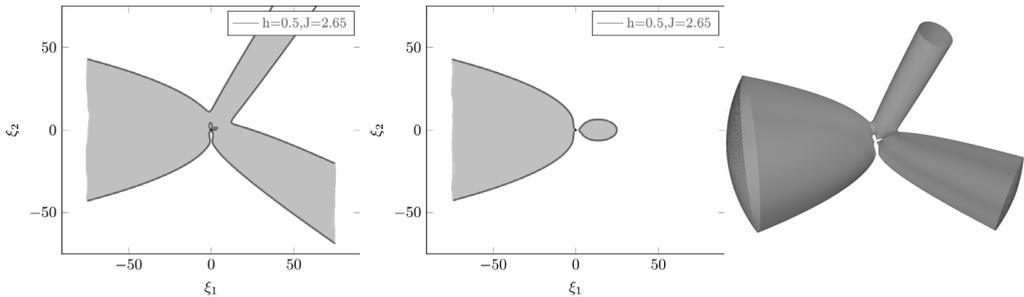


Рис. 8. Поверхность нулевой скорости при $J = 2.65$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

Эйлера L_2), в этом случае точка из левой ветви ни в какое время не может попасть в другие ветви. Таким образом, в этом случае мы можем сделать однозначные выводы о финальных движениях. Наконец (см. рис. 10), при увеличении J мы достигаем точки L_3 и далее движение может происходить только в какой-то из трех несвязанных областей возможного движения. Таким образом, по начальным условиям мы можем получить значения h и J и понять, к какому из описанных случаев принадлежит рассматриваемое движение, и оценить возможные финальные движения и точно сказать, является ли наше движение иерархическим (т. е. движением, в котором одно из взаимных расстояний все время остается много меньше двух других).

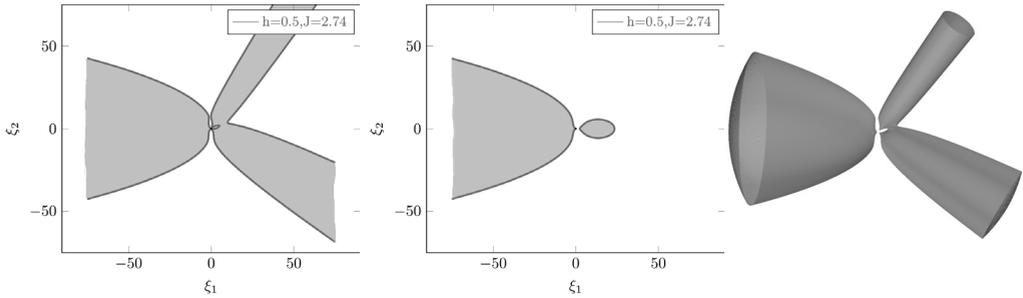


Рис. 9. Поверхность нулевой скорости при $J = 2.74$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

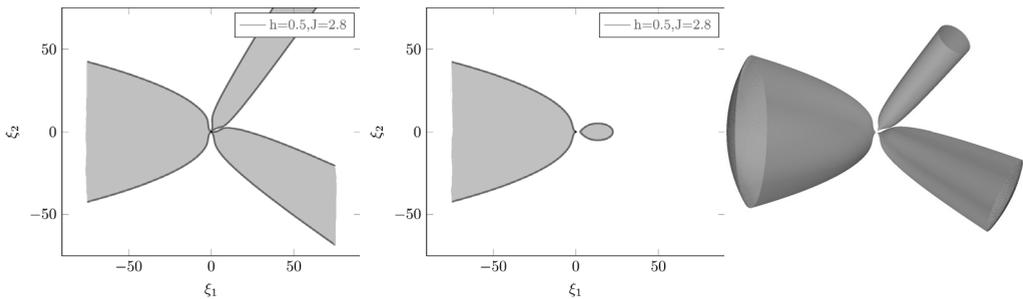


Рис. 10. Поверхность нулевой скорости при $J = 2.8$ (справа) и ее сечения плоскостью экватора $\xi_3 = 0$ (слева) и плоскостью меридиана $\xi_2 = 0$.

4. Заключение. В пространстве форм плоской задачи трех тел в зависимости от значения углового момента J можно построить поверхности пяти разных типов. При малых J эта поверхность состоит из двух частей: наружной, похожей на изображенную на рис. 2, поверхности и внутренней компактной поверхности (при $J = 0$ это просто точка) (рис. 3, 7). Внутренняя поверхность компактна, в начале координат она имеет особенность (рис. 4). При росте J наружная поверхность сжимается, внутренняя растет, и при некотором значении J две поверхности соприкасаются и при дальнейшем росте J в поверхности нулевой скорости появляется дырка (рис. 5). Далее сначала разделяются ветви, отвечающие большим массам (рис. 8), затем от большей ветви отделяется малая (рис. 9), и, наконец, все три ветви отделяются друг от друга (рис. 6, 10).

Литература

1. Батхин А. Б. Сеть семейств периодических орбит обобщенной задачи Хилла. *ДАН* **458** (2), 131–137 (2014).
2. Лукьянов Л. Г. О законе сохранения энергии в ограниченной эллиптической задаче трех тел. *Астрономический журнал* **82** (12), 1137–1147 (2005).
3. Лукьянов Л. Г., Ширмин Г. И. Поверхности Зундмана и устойчивость по Хиллу в задаче трех тел. *Письма в Астрономический журнал* **33** (8), 618–630 (2007).
4. Холшевников К. В., Титов В. Б. Поверхность минимальной скорости в ограниченной круговой задаче трех тел. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), iss. 4, 734–742 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.413>
5. Голубев В. Г., Гребеников Е. А. *Проблема трех тел в небесной механике*. Москва, Изд-во МГУ (1985).

6. Titov V. Some Solutions of the General Three Body Problem in Form Space in the Proceedings: “The Eighth Polyakhov’s Reading”, *AIP Conf. Proc.* 1959, 040024-1–040024-4 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034627>

7. Titov V. Some Properties of Lemaitre Regularization. Collinear Trajectories. *Astron. Nachr.* **342** (3), 588–597 (2021). <http://dx.doi.org/10.1002/asna.202123869>

8. Titov V., Some Properties of Lemaitre Regularization. II. Isosceles trajectories and figure-eight. *Astron. Nachr.* **343** (3), e2114006 (2022). <https://doi.org/10.1002/asna.202114006>

Статья поступила в редакцию 31 мая 2022 г.;
доработана 20 июня 2022 г.;
рекомендована к печати 8 сентября 2022 г.

Контактная информация:

Титов Владимир Борисович — канд. физ.-мат. наук, доц.; tit@astro.spbu.ru

Zero velocity surface in the general three-body-problem

V. B. Titov

St Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Titov V. B. Zero velocity surface in the general three-body-problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 1, pp. 165–175. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.114> (In Russian)

The zero-velocity surfaces of the general planar three-body problem are constructed in the form space, the factor-space of the configuration space by transfer and rotation. Such a space is the space of congruent triangles, and the sphere in this space is similar triangles. The integral of energy in the form space gives the equation of the zero velocity surface. These surfaces can also be obtained based on the Sundman inequality. Such surfaces separate areas of possible movement from areas where movement is impossible. Without loss of generality, we can assume that the constant energy is $-1/2$ and the sought for surfaces depend only on the magnitude of the angular momentum of the problem, J . Depending on this value, five topologically different types of surfaces can be distinguished. For small J , the surface consists of two separate surfaces, internal and external ones, the motion is possible only between them. With J increasing the inner surface increases, the outer surface decreases, the surfaces first have a common point at some value of J , with a further increasing of J , their topological type changes and finally the zero-velocity surface splits into three disjoint surfaces, the motion is possible only inside them. Examples of the corresponding surfaces are given for each of these types, their sections in the plane xy and in the plane xz and the surfaces themselves are constructed, their properties are studied.

Keywords: general three-body-problem, zero velocity surface, region of feasibility.

References

1. Batkhin A. B. Web of families of periodic orbits of the generalized Hill problem. *Doklady Mathematics* **458** (2), 131–137 (2014). (In Russian) [Engl. transl.: *Doklady Mathematics* **90** (2), 539–544 (2014). <https://doi.org/10.1134/S1064562414060064>].

2. Lukyanov L. G. Energy conservation in the restricted elliptical three-body problem. *Astronomicheskii zhurnal* **82** (12), 1137–1147 (2005). (In Russian) [Engl. transl.: *Astronomy Reports* **49** (12), 1018–1027 (2005). <https://doi.org/10.1134/1.2139818>].

3. Lukyanov L. G., Shirmin G. I. Sundman surfaces and Hill stability in the three-body problem. *Astron. Lett.* **33** (8), 618–630 (2007). (In Russian) [Engl. transl.: *Astron. Lett.* **33** (8) 550–561 (2007). <https://doi.org/10.1134/S1063773707080063>].

4. Kholoshevnikov K.V., Titov V.B. Minimal Velocity Surface in a Restricted Circular Three-Body Problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7**(65), iss. 4, 734–742 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.413>. (In Russian) [Engl. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **53**, iss. 4, 473–479 (2020). <https://doi.org/10.1134/S106345412004007X>].
5. Golubev V. G., Grebenikov E. A. *Three-Body Problem in Celestial Mechanics*. Moscow, Moscow University Press (1985). (In Russian)
6. Titov V. Some Solutions of the General Three Body Problem in Form Space in the *Proceedings: “The Eighth Polyakhov’s Reading”, AIP Conf. Proc. 1959, 040024-1–040024-4* (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034627>
7. Titov V. Some Properties of Lemaitre Regularization. Collinear Trajectories. *Astron. Nachr.* **342** (3), 588–597 (2021). <https://dx.doi.org/10.1002/asna.202123869>
8. Titov V. Some Properties of Lemaitre Regularization. II. Isosceles trajectories and figure-eight. *Astron. Nachr.* **343** (3), e2114006 (2022). <https://doi.org/10.1002/asna.202114006>

Received: May 31, 2022
Revised: June 20, 2022
Accepted: September 8, 2022

Author’s information:

Vladimir B. Titov — tit@astro.spbu.ru