УДК 517.5 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2
MSC 41A30

Приближение в L^p-норме гёльдеровых функций гармоническими на некоторых многомерных компактах

Д. А. Павлов

Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
Российская Федерация, 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48

Для цитирования: *Павлов Д. А.* Приближение в L^p-норме гёльдеровых функций гармоническими на некоторых многомерных компактах // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 259–269. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.207

В работе рассматривается класс гёльдеровых функций в смысле L^p-нормы на специальных компактах в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ и доказываются теоремы о приближении функциями, гармоническими в окрестностях этих компактов. Данные компакты представляют собой обобщение на бóльшие размерности понятия кривой в $\mathbb{R}^3$, дуга которой соизмерима с хордой. Размер окрестности уменьшается вместе с увеличением точности приближения. Оценки скорости приближения и градиента приближающих функций производятся в той же L^p-норме.

Ключевые слова: конструктивное описание, классы Гёльдера, аппроксимация, гармонические функции, свойство соизмеримости дуги и хорды.

1. Введение. Вопрос об описании функциональных классов с помощью аппроксимации в L^p-норме неоднократно изучался ранее. Так, в 1971 г. В. П. Моторный [1] получил описание гладких функций при приближении их алгебраическими многочленами. В статье М. К. Потапова [2] было дано конструктивное описание новых классов функций на отрезке. Эти классы задавались весовыми условиями в той же норме.

В работе Т. А. Алексеевой и Н. А. Широкова [3] дано конструктивное описание класса гёльдеровых функций на кривой в $\mathbb{R}^3$, дуга которой соизмерима с хордой, в терминах скорости равномерного приближения функциями, гармоническими в сужающихся окрестностях этой кривой. Также в окрестностях имеются равномерные оценки на градиент приближающей функции. Уменьшение размера окрестности улучшает точность приближения, но в то же время ухудшает оценки на градиент. В статье [4] тех же авторов вводится класс гёльдеровых функций в смысле L^p-нормы, с помощью которой оценивается и скорость приближения. В качестве приближающих функций снова взяты гармонические в окрестностях кривой функции. Прямая теорема о приближении доказана для более узкого класса функций, чем обратная. В данной работе мы обобщаем эти результаты на $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$.

2. Основные определения, обозначения и формулировка результата. На протяжении всей работы $m \geqslant 3$ — фиксированное натуральное число. Через λ будем обозначать меру Лебега на $\mathbb{R}^m$, μ — $(m-2)$-мерную меру Хаусдорфа, $B(x, r)$ — открытый шар радиуса r с центром в точке $x \in \mathbb{R}^m$, $\overline{B}(x, r)$ — замкнутый.

Множество $L \subset \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$, назовем *хорошим компактом*, если существует такое отображение $\varphi\colon [0,\, 1]^{m-2} \to \mathbb{R}^m$, что

$$\widetilde{C}_1\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leqslant \widetilde{C}_2\|x_1 - x_2\|$$

и $\varphi([0,\, 1]^{m-2}) = L$.

Из определения хорошего компакта и построения меры Хаусдорфа несложно получить, что хаусдорфова размерность L равна $m-2$ и что для любого μ-измеримого множества $A \subset [0,1]^{m-2}$ будет выполнено условие

$$\widetilde{C}_1^{m-2}\mu(A) \leqslant \mu(\varphi(A)) \leqslant \widetilde{C}_2^{m-2}\mu(A). \tag{1}$$

Для $f\colon L \to \mathbb{R}$, $x \in L$ и $r > 0$ положим

$$\Delta^* f(x,\, r) = \sup_{y \in \overline{B}(x,\, r) \cap L} |f(y) - f(x)|.$$

Через $H_p^\alpha(L)$ обозначим пространство всех функций f, удовлетворяющих неравенству

$$\|\Delta^* f(\cdot,\, r)\|_p \leqslant C_f r^\alpha \tag{2}$$

для всех $r > 0$, где $\alpha \in (0,\, 1)$, а норма взята в пространстве $L^p(L,\, \mu)$.

Через $\widetilde{H}_p^\alpha(L)$ обозначим подпространство $H_p^\alpha(L)$ функций f, удовлетворяющих дополнительному условию

$$\Delta^* f(x,\, r) \leqslant C_f \left(\frac{r}{R}\right)^\varepsilon \Delta^* f(y,\, R) \tag{3}$$

при $\varepsilon = \varepsilon(f)$, $r \in (0,\, R]$, $\|x - y\| \leqslant R$, $x,\, y \in L$.

Пространство всех функций f, удовлетворяющих неравенству

$$\Delta^* f(x,\, r) \leqslant C_f r^\alpha,$$

будем обозначать $H^\alpha(L)$. Введем еще δ-окрестность множества: для множества $A \subset \mathbb{R}^m$ положим

$$\Lambda_\delta(A) = \bigcup_{x \in A} B(x,\, \delta).$$

Для функции v, дифференцируемой в $\Lambda_\delta(L)$, положим

$$\operatorname{grad}_\delta v(x) = \sup_{y \in \overline{B}(x,\, \delta/2)} \|\operatorname{grad} v(y)\|,$$

а для F, заданной на L, положим

$$\max\nolimits_\delta F(x) = \sup_{y \in \overline{B}(x,\, \delta) \cap L} |F(y)|.$$

Мы часто будем писать неравенства вида $f \leqslant Cg \leqslant Ch$. Здесь C означает не всегда одну и ту же константу, но всегда не зависящую от аргументов, понятных из контекста. Некоторые фиксированные константы мы будем выделять отдельно. Через $d(x)$ будем обозначать расстояние от x до L, а через $\nu(x)$ — какую-либо точку из L, реализующую это расстояние.

Прямая теорема для класса $\widetilde{H}_p^\alpha(L)$. Пусть $f \in \widetilde{H}_p^\alpha(L)$, $p \geqslant 1$. Тогда для любого $\delta \in (0, \operatorname{diam} L)$ существует такая гармоническая в $\Lambda_\delta(L)$ функция u_δ, что

$$\|\max\nolimits_\delta (f(\cdot) - u_\delta(\cdot))\|_p \leqslant C_1\delta^\alpha, \tag{4}$$

$$\|\operatorname{grad}_\delta u(\cdot)\|_p \leqslant C_2\delta^{\alpha-1}. \tag{5}$$

Обратная теорема для класса $H_p^\alpha(L)$. Пусть функция f такова, что для любого $\delta \in (0, \operatorname{diam} L)$ существует такая гармоническая в $\Lambda_\delta(L)$ функция u_δ, что выполнены условия (4) и (5). Тогда $f \in H_p^\alpha(L)$.

Обратная теорема доказывается несложно. Заметим, что выполнение условия (2) достаточно проверить лишь для малых r, например для $r \leqslant \frac{1}{2}\operatorname{diam} L$. Пусть $k : L \to L$ — произвольное μ-измеримое отображение, такое, что $\|k(x) - x\| \leqslant r$. Возьмем $\delta = 2r$, построим u_δ и напишем

$$|f(k(x)) - f(x)| \leqslant |f(k(x)) - u_\delta(k(x))| + |f(x) - u_\delta(x)| + |u_\delta(k(x)) - u_\delta(x)| \leqslant \\ \leqslant 2\max\nolimits_\delta (f(x) - u_\delta(x)) + \delta \operatorname{grad}_\delta u(x),$$

откуда следует, что

$$\|f(k(\cdot)) - f(\cdot)\|_p \leqslant 2\|\max\nolimits_\delta (f(\cdot) - u_\delta(\cdot))\|_p + \delta\|\operatorname{grad}_\delta u(\cdot)\|_p \leqslant C\delta^\alpha \leqslant Cr^\alpha.$$

В силу произвольности k отсюда следует выполнение условия (2).

3. Геометрическое построение. Сформулируем сначала простую, но важную лемму.

Лемма 1. *Пусть в d-мерном кубе со стороной a выбраны несколько точек, попарные расстояния между которыми не меньше b, причем $a\sqrt{d} \geqslant b$. Тогда этих точек не больше, чем $(3a\sqrt{d}/b)^d$.*

Перейдем к построению. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Возьмем произвольную точку $x_{0n} \in K$. Далее, если точки $x_{0n}, \ldots, x_{(k-1)n}$ уже выбраны, то возьмем в качестве x_{kn} одну из ближайших к множеству $\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} \overline{B}(x_{in}, 2^{-n})$ точек множества $K \setminus \bigcup\limits_{i=0}^{k-1} B(x_{in}, 2^{-n})$, если последнее множество непусто. Пусть $x_{kn} = \varphi(t_{kn})$. Поскольку $\|x_{kn} - x_{k'n}\| \geqslant 2^{-n}$ при $k \neq k'$, то $\|t_{kn} - t_{k'n}\| \geqslant \widetilde{C}_2^{-1}2^{-n}$. Эти точки содержатся в единичном $(m-2)$-мерном кубе, так что по лемме 1 мы выберем $c_n \leqslant C2^{(m-2)n}$ точек (если $\widetilde{C}_2^{-1}2^{-n} > \sqrt{m-2}$, т. е. лемма 1 неприменима, то мы могли взять лишь одну точку, и оценка на c_n выполняется при $C = 1$). Процесс окончен, поэтому $K \subset \bigcup\limits_{i=0}^{c_n-1} \overline{B}(x_{in}, 2^{-n})$.

Положим $\Omega_n^* = \bigcup\limits_{i=0}^{c_n-1} \overline{B}(x_{in}, 2^{-n+1})$, $\Omega_n = \Omega_n^* \setminus \Omega_{n+1}^*$. Нетрудно проверить, что

$$2^{-n-1} < d(x) \leqslant 2^{-n+1}, \quad x \in \Omega_n. \tag{6}$$

Отсюда следует, что множества Ω_n попарно не пересекаются.

4. Псевдогармоническое расширение. Изучим условия (2) и (3).

Из (2) следует, что $\Delta^* f(x, r)$ конечна для почти всех x при фиксированном r. Но тогда шары $B(x, r)$ покрывают L, и если мы возьмем произвольный $y \in L$, то компакт $\overline{B}(y, r) \cap L$ покрывается конечным числом шаров $B(x_1, r), \ldots, B(x_n, r)$, а значит, $\Delta^* f(y, r)$ можно оценить сверху через $\Delta^* f(x_i, r)$. Таким образом, $\Delta^* f(x, r)$ конечна для всех x и r.

Подставим теперь в условие (3) произвольный фиксированный y, $R = \operatorname{diam} L$, произвольный x и $r \in (0, \operatorname{diam} L]$. Получим

$$\Delta^* f(x, r) \leqslant C \left(\frac{r}{\operatorname{diam} L}\right)^{\varepsilon} \Delta^* f(y, \operatorname{diam} L) = C r^{\varepsilon},$$

т. е. включение $f \in H^{\varepsilon}(L)$.

Аналогично работе [5] строим *псевдогармоническое расширение*, т. е. такую функцию $f_0 \in C(\mathbb{R}^m) \cap C^2(\mathbb{R}^m \setminus K)$, что $f_0|_L = f$, что

$$f_0(x) = 0 \text{ при } \|x\| \geqslant R_0,\ L \subset B(\mathbb{0}, R_0),$$

$$\|\operatorname{grad} f_0(x)\| \leqslant C_3 \frac{\Delta^* f(\nu(x), C_5 d(x))}{d(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus L, \tag{7}$$

$$|\Delta f_0(x)| \leqslant C_4 \frac{\Delta^* f(\nu(x), C_5 d(x))}{d^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^m \setminus L. \tag{8}$$

Для $A \subset \mathbb{R}^m$ положим $A' = A \cap B(\mathbb{0}, R_0)$.

Лемма 2.

$$\int\limits_{B'(x,\, R)} \frac{\Delta^* f(\nu(y), C_5 d(y))}{d^2(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C R^{m-2} \Delta^* f(x, C_5 R), \quad x \in L.$$

Доказательство. Пусть $\Omega_0 = B(\mathbb{0}, R_0) \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$. Положим $\sigma_n = B'(x, R) \cap \Omega_n$. Тогда

$$\int\limits_{B'(x,\, R)} \frac{\Delta^* f(\nu(y), C_5 d(y))}{d^2(y)}\, d\lambda(y) = \sum_{n=n(R)}^{\infty} \int\limits_{\sigma_n} \frac{\Delta^* f(\nu(y), C_5 d(y))}{d^2(y)}\, d\lambda(y),$$

где $n(R)$ обозначает наименьшее n, для которого $\sigma_n \neq \varnothing$. Вспомним, что L — хороший компакт. Рассмотрим для фиксированного $n \geqslant n(R)$ все точки $x_{kn} = \varphi(t_{kn})$, лежащие в $B(x, R)$. Попарные расстояния между точками t_{kn} не меньше $\widetilde{C}_2^{-1} 2^{-n}$, все они лежат в $(m-2)$-мерном шаре радиуса $\widetilde{C}_1^{-1} R$ и тем более в $(m-2)$-мерном кубе со стороной $2\widetilde{C}_1^{-1} R$. Из определения $n(R)$ несложно получить, что $2R \geqslant 2^{-n(R)}$. Значит, по лемме 1, этих точек (как и точек x_{kn}) не больше, чем $C R^{m-2} 2^{(m-2)n}$. Множество Ω_n состоит из подмножеств шаров с центрами x_{kn} радиуса 2^{-n+1}, поэтому

$$\lambda_m(\sigma_n) \leqslant C R^{m-2} 2^{(m-2)n + m(-n+1)} = C R^{m-2} 2^{-2n}.$$

Условия (3) и (6) дают нам, что для $y \in \sigma_n$ будет

$$\Delta^* f(\nu(y), C_5 d(y)) \leqslant C \left(\frac{d(y)}{R}\right)^{\varepsilon} \Delta^* f(x, C_5 R) \leqslant C \left(\frac{2^{-n}}{R}\right)^{\varepsilon} \Delta^* f(x, C_5 R).$$

Применяя это, получим

$$\sum_{n=n(R)}^{\infty}\int\limits_{\sigma_n}\frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y)}\,d\lambda(y)\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{n=n(R)}^{\infty}\left(\frac{2^{-n}}{R}\right)^{\varepsilon}\Delta^* f(x,\, C_5R)2^{2n}R^{m-2}2^{-2n}=CR^{m-2}\Delta^* f(x,\, C_5R).$$

В последнем переходе мы воспользовались тем, что $2^{-n(R)}\asymp R$.

Обозначим $\|x-y\|$ через $r_x(y)$.

Лемма 3.

$$\int\limits_{B'(x,\,R)}\frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y)r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)\leqslant C\Delta^* f(x,\, C_5R),\quad x\in L.$$

Доказательство. Преобразуем интеграл из левой части, применим лемму 2 и условие (3):

$$\int\limits_{B'(x,\,R)}\frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y)r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{B'(x,\,2^{-n}R)\setminus B'(x,\,2^{-n+1}R)}\frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y)r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y)\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{(m-2)(n-1)}}{R^{m-2}}\int\limits_{B'(x,\,2^{-n}R)}\frac{\Delta^* f(\nu(y),\, C_5 d(y))}{d^2(y)}\,d\lambda(y)\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{(m-2)(n-1)}}{R^{m-2}}R^{m-2}2^{-(m-2)n}\Delta^* f(x,\, C_5 2^{-n}R)\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n})^{\varepsilon}\Delta^* f(x,\, C_5R)=$$

$$=C\Delta^* f(x,\, C_5R).$$

Как уже отмечалось выше, имеет место включение $f\in H^{\varepsilon}(L)$, поэтому мы можем применить результат работы [5] и получить формулу

$$f(x)=-\frac{1}{q_m}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y),\quad x\in L,\tag{9}$$

где q_m — площадь поверхности единичной $(m-1)$-мерной сферы, умноженная на $m-2$.

5. Построение приближающей функции. Пусть $C_6\geqslant 2$. Применяя лемму 1, как это было сделано в доказательстве леммы 2, получим, что в шаре $\overline{B}(x_{kn}, C_6 2^{-n})$ не больше CC_6^{m-2} точек x_{kn}. Значит,

$$\lambda(\overline{B}(x_{kn}, C_6 2^{-n})\cap\Omega_n^*)\leqslant CC_6^{m-2}2^{m(-n+1)}.$$

Многочлен степени m растет быстрее многочлена степени $m-2$, поэтому можно выбрать C_6 так, чтобы при всех k и n выполнялось соотношение

$$\lambda(\overline{B}(x_{kn}, C_6 2^{-n})\setminus\Omega_n^*)\geqslant\frac{1}{2}\lambda(B(\mathbb{O},\, C_6 2^{-n})).$$

Определим для $k = 0, 1, \ldots, c_n - 1$ множества β_{kn}:

$$\beta_{0n} = B(x_{0n}, 2^{-n+1}),\ \beta_{kn} = B(x_{kn}, 2^{-n+1}) \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} B(x_{in}, 2^{-n+1}) \text{ при } k = 1, \ldots, c_n - 1.$$

Ясно, что множества β_{kn} попарно (по k) не пересекаются и дают в объединении множество, отличающееся от Ω_n^* на множество меры нуль. Далее, неравенство (8) и лемма 2 дают нам, что

$$\int\limits_{\beta_{kn}} |\Delta f_0(x)|\, d\lambda(x) = C_{kn} 2^{-(m-2)n} \Delta^* f(x_{kn}, C_5 2^{-n}), \tag{10}$$

причем $|C_{kn}| \leqslant C$ для всех k и n.

Обозначим через χ_{kn} характеристическую функцию множества $B(x_{kn}, C_6 2^{-n}) \setminus \Omega_n^*$ и положим

$$\varphi_{kn}(x) = \gamma_{kn} \chi_{kn}(x) 2^{2n} \Delta^* f(x_{kn}, C_5 2^{-n}),$$

где числа γ_{kn} подобраны так, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(x)\, d\lambda(x) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(x)\, d\lambda(x) = 0. \tag{11}$$

Равенство (10) и определение C_6 дают нам $|\gamma_{kn}| \leqslant C$ при всех k и n. Положим $\Phi_n = \sum\limits_{k=0}^{c_n-1} \varphi_{kn}$ и определим функцию $u_{2^{-n}}$:

$$u_{2^{-n}}(x) = -\frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) + \frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y).$$

Легко проверить, что $\Lambda_{2^{-n}}(L) \subset \Omega_n^*$, так что $u_{2^{-n}}$ гармонична в $\Lambda_{2^{-n}}(K)$.

Разобьем куб $[0, 1]^{m-2}$ на $(\lceil \widetilde{C}_2 2^{n+1} \sqrt{m-2} \rceil)^{m-2}$ одинаковых кубов. Тем самым мы добьемся того, что сторона маленького куба будет соизмерима с 2^{-n} (с одинаковыми константами для всех n) и что в одном кубе будет лежать не более одной точки $t_{kn} = \varphi^{-1}(x_{kn})$. Возьмем произвольную точку $t \in [0, 1]^{m-2}$. Один из кубов, содержащих t, назовем нулевым. Множество кубов, имеющих общие точки с нулевым, назовем первым слоем. Далее, i-м слоем назовем множество кубов, не названных ранее и имеющих общие точки с кубами $(i-1)$-го слоя. Пусть длина ребра маленького куба оценивается снизу величиной $\widetilde{C}_3 2^{-n}$, а длина диагонали — сверху $\widetilde{C}_4 2^{-n}$. Подберем такую константу C_7, чтобы наименьший номер слоя, содержащего куб, не лежащий целиком в $\overline{B}(t, C_7 \widetilde{C}_2^{-1} 2^{-n})$, удовлетворял неравенству $\widetilde{C}_1 \widetilde{C}_3 (i-1) - C_6 > 0$.

Пусть $x \in L$. Используя (9), напишем

$$u_{2^{-n}}(x) - f(x) = \frac{1}{q_m} \int\limits_{\Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) + \frac{1}{q_m} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) =$$

$$= \frac{1}{q_m} \sum_{k=0}^{c_n-1} \left(\int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \right) = \frac{1}{q_m} (\Sigma_1 + \Sigma_2),$$

где Σ_1 — сумма по индексам k, для которых $x_{kn} \in B(x, C_7 2^{-n})$, а Σ_2 — по всем остальным. Множество индексов k набора Σ_i обозначим через S_i. Из определения Σ_1 следует, что $\bigcup\limits_{k \in S_1} \beta_{kn} \subset B(x, (C_7+2)2^{-n})$, поэтому по неравенству (8) и лемме 3

$$\left| \sum_{k \in S_1} \int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \right| \leqslant \int\limits_{B(x,\,(C_7+2)2^{-n})} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C \Delta^* f(x, C_5(C_7+2)2^{-n}).$$

Далее, поскольку $r_x(y) \geqslant 2^{-n}$ при $y \notin \Omega_n^*$, получим

$$\left| \sum_{k \in S_1} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) \right| \leqslant C \sum_{k \in S_1} 2^{-mn} \frac{2^{2n}}{2^{-(m-2)n}} \Delta^* f(x_{kn}, C_5 2^{-n}) =$$
$$= C \sum_{k \in S_1} \Delta^* f(x_{kn}, C_5 2^{-n}).$$

Из леммы 1 следует, что $|S_1| \leqslant C$, так что последнюю сумму можно оценить через $\Delta^* f(x, C2^{-n})$. Таким образом, $|\Sigma_1| \leqslant C \Delta^* f(x, C_8 2^{-n})$.

Используя (11), перепишем слагаемые из Σ_2 следующим образом:

$$\int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y) = \int\limits_{\beta_{kn}} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(x_{kn})}\, d\lambda(y) +$$
$$+ \int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(y) \left(\frac{1}{r_x^{m-2}(y)} - \frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})} \right) d\lambda(y) +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\varphi_{kn}(y)}{r_x^{m-2}(x_{kn})}\, d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(y) \left(\frac{1}{r_x^{m-2}(y)} - \frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})} \right) d\lambda(y) =$$
$$= \frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})} \left(\int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(y)\, d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(y)\, d\lambda(y) \right) + \ldots =$$
$$= \int\limits_{\beta_{kn}} \Delta f_0(y) \left(\frac{1}{r_x^{m-2}(y)} - \frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})} \right) d\lambda(y) +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} \varphi_{kn}(y) \left(\frac{1}{r_x^{m-2}(y)} - \frac{1}{r_x^{m-2}(x_{kn})} \right) d\lambda(y).$$

Наша цель — оценить разность дробей в скобках. Поскольку $\beta_{kn} \subset B(x_{kn}, C_6 2^{-n})$, достаточно это сделать для $y \in B(x_{kn}, C_6 2^{-n})$. Для $t = \varphi^{-1}(x)$ разобьем куб $[0, 1]^{m-2}$ на N^{m-2} кубов, как это было сделано выше. Пусть t_{kn} лежит в кубе i-го слоя. Оценим с двух сторон $\|y - x\|$:

$$\|y - x\| \geqslant \|x - x_{kn}\| - \|y - x_{kn}\| \geqslant \widetilde{C}_1 \widetilde{C}_3 (i-1) 2^{-n} - C_6 2^{-n},$$

причем последнее число положительно в силу выбора C_7. С другой стороны,

$$\|y - x\| \leqslant \|x - x_{kn}\| + \|y - x_{kn}\| \leqslant \widetilde{C}_2 \widetilde{C}_4 (i+1) 2^{-n} + C_6 2^{-n}.$$

Наконец, применяя неравенство $|a^j - b^j| \leqslant j|a-b|(a^{j-1}+b^{j-1})$, напишем

$$\left|\frac{1}{\|x-y\|^{m-2}} - \frac{1}{\|x-x_{kn}\|^{m-2}}\right| = \left|\frac{\|x-x_{kn}\|^{m-2} - \|x-y\|^{m-2}}{\|x-y\|^{m-2}\|x-x_{kn}\|^{m-2}}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(m-2)\|y-x_{kn}\|(\|x-x_{kn}\|^{m-3}+\|x-y\|^{m-3})}{\|x-y\|^{m-2}\|x-x_{kn}\|^{m-2}} \leqslant$$
$$\leqslant C\frac{2^{-n}((\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4(i+1))^{m-3}2^{-n(m-3)} + (\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4(i+1)+C_6)^{m-3}2^{-n(m-3)})}{(\widetilde{C}_1\widetilde{C}_3(i-1)-C_6)^{m-2}2^{-n(m-2)}(\widetilde{C}_1\widetilde{C}_3(i-1))^{m-2}2^{-n(m-2)}} =$$
$$= C2^{n(m-2)}\frac{(\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4(i+1))^{m-3} + (\widetilde{C}_2\widetilde{C}_4(i+1)+C_6)^{m-3}}{(\widetilde{C}_1\widetilde{C}_3(i-1)-C_6)^{m-2}(\widetilde{C}_1\widetilde{C}_3(i-1))^{m-2}} = C2^{n(m-2)}a_i.$$

Обозначим множество индексов k, для которых t_{kn} лежит в i-м слое, через F_i. Положим также $a_i = 0$ для тех i, для которых оно не определено. Тогда, применяя последнюю оценку, равенство (10) и определение φ_{kn}, получим

$$|\Sigma_2| \leqslant C2^{n(m-2)}\sum_{i=1}^{2N}\sum_{k\in F_i} a_i \left(\int\limits_{\beta_{kn}} |\Delta f_0(y)|\, d\lambda(y) + \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\varphi_{kn}(y)|\, d\lambda(y)\right) \leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{i=1}^{2N}\sum_{k\in F_i} a_i \Delta^* f(x_{kn},\, C_5 2^{-n}).$$

Таким образом, мы получили оценку

$$|u_{2^{-n}}(x) - f(x)| \leqslant C_9\left(\Delta^* f(x,\, C_8 2^{-n}) + \sum_{i=1}^{2N}\sum_{k\in F_i} a_i\Delta^* f(x_{kn},\, C_5 2^{-n})\right). \tag{12}$$

Положим $g_0(x) = C_9\Delta^* f(x,\, C_8 2^{-n})$. Далее, пронумеруем все мультииндексы $(j_1, \ldots, j_m)$ с ℓ_∞-нормой, не превосходящей $2N$, в порядке неубывания нормы. Для мультииндекса с номером j и нормой i положим $g_j(x) = C_9 a_i \Delta^* f(x_{kn},\, C_5 2^{-n})$, если в маленьком кубе, получающемся из нулевого (т. е. содержащего точку $t = \varphi^{-1}(x)$) сдвигом на этот мультииндекс, есть точка t_{kn}, и $g_j(x) = 0$ в противном случае. Из неравенства (12) сразу следует, что $|u_{2^{-n}}(x) - f(x)| \leqslant \sum g_j(x)$. Возьмем теперь произвольное измеримое отображение $k\colon L \to L$, такое, что $\|k(x) - x\| \leqslant C_{10}2^{-n}$, где константа C_{10} подобрана так, чтобы точка $\varphi^{-1}(k(x))$ попала разве что в соседний куб по отношению к точке $\varphi^{-1}(x)$. Ясно, что $g_0(k(x)) \leqslant C_9\Delta^* f(x,\, C_{11}2^{-n})$. Поскольку $k(x)$ попадает разве что в соседний куб, можем оценить $g(k(x))$ суммой по соседним кубам и исходному:

$$\sum_{j\geqslant 1} g_j(k(x)) \leqslant 3^m \sum_{j\geqslant 1} g_j(x).$$

Суммируя сказанное выше, получаем

$$\|u_{2^{-n}}(k(\cdot)) - f(k(\cdot))\|_p \leqslant C_9\|\Delta^* f(\cdot,\, C_{11}2^{-n})\|_p + 3^m\sum_{j\geqslant 1}\|g_j\|_p.$$

Первое слагаемое оценивается через $C2^{-n\alpha}$, поскольку $f \in H_p^\alpha(L)$. Обозначим образы маленьких кубов через Q_ℓ, причем нумерацию подберем так, чтобы выполнялось $x_{kn} \in Q_k$. Отметим, что по неравенствам (1) $\mu(Q_\ell) \asymp 2^{-n(m-2)}$. Тогда для

$(2i-1)^{m-2} < j \leqslant (2i+1)^{m-2}$ (именно такие номера имеют мультииндексы с нормой i) будем иметь

$$\int\limits_L g_j^p(x)\,d\mu(x) = \sum_{\ell=1}^{N^{m-2}} \int\limits_{Q_\ell} g_j^p(x)\,d\mu(x) \leqslant \sum_{k=0}^{c_n-1} \widetilde{C}_2(\widetilde{C}_4 2^{-n})^{m-2}(C_9 a_i \Delta^* f(x_{kn},\, C_5 2^{-n}))^p \leqslant$$

$$\leqslant C a_i^p \sum_{k=0}^{c_n-1} \int\limits_{Q_k} (\Delta^* f(x_{kn},\, C_5 2^{-n}))^p\,d\mu(y) \leqslant C a_i^p \sum_{k=0}^{c_n-1} \int\limits_{Q_k} (\Delta^* f(y,\, C_{12} 2^{-n}))^p\,d\mu(y) \leqslant$$

$$\leqslant C a_i^p \int\limits_L (\Delta^* f(y,\, C_{12} 2^{-n}))^p\,d\mu(y) \leqslant C a_i^p 2^{-n\alpha p}.$$

Значит,

$$\sum_{j \geqslant 1} \|g_j\|_p \leqslant C 2^{-n\alpha} \sum_{i=1}^{\infty} a_i((2i+1)^{m-2} - (2i-1)^{m-2}).$$

Поскольку $a_i \asymp i^{-(m-1)}$, последний ряд сходится. Поэтому мы получили оценку

$$\|u_{2^{-n}}(k(\cdot)) - f(k(\cdot))\|_p \leqslant C 2^{-n\alpha},$$

из которой следует, что

$$\|\max\nolimits_{C_{10} 2^{-n}}(u_{2^{-n}}(\cdot) - f(\cdot))\|_p \leqslant C 2^{-n\alpha}.$$

6. Оценка на градиент приближающей функции. Пусть

$$w_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m \setminus \Omega_n^*} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \int\limits_{\Omega_\ell} \frac{\Delta f_0(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) = \sum_{\ell=0}^{n-1} h_\ell(x).$$

Поскольку $\|\mathrm{grad}\, r_x^k(y)\| = k r_x^{k-1}(y)$ и $\|\mathrm{grad} \int v(x,\, y)\,d\lambda(y)\| \leqslant \int \|\mathrm{grad}\, v(x,\, y)\|\,d\lambda(y)$, получаем

$$\|\mathrm{grad}\, h_\ell(x)\| \leqslant C \int\limits_{\Omega_\ell} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-1}(y)}\,d\lambda(y) \leqslant C 2^\ell \int\limits_{\Omega_\ell} \frac{|\Delta f_0(y)|}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y) = C 2^\ell h'_\ell(x).$$

Из предыдущего пункта следует, что $\|\max_{C_{10} 2^{-n}} h'_\ell(\cdot)\|_p \leqslant C 2^{-\ell\alpha}$, а значит, $\|\mathrm{grad}_{C_{10} 2^{-n}} h_\ell(\cdot)\|_p \leqslant C 2^{\ell(1-\alpha)}$. Получается, что

$$\|\mathrm{grad}_{C_{10} 2^{-n}} w_n(\cdot)\|_p \leqslant \sum_{\ell=0}^{n-1} \|\mathrm{grad}_{C_{10} 2^{-n}} h_\ell(\cdot)\|_p \leqslant C \sum_{\ell=0}^{n-1} 2^{\ell(1-\alpha)} \leqslant C 2^{-n(\alpha-1)}. \tag{13}$$

Аналогично положим

$$v_n(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\,d\lambda(y),$$

напишем

$$\|\mathrm{grad}\, v_n(x)\| \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-1}(y)}\, d\lambda(y) \leqslant C2^n \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{\Phi_n(y)}{r_x^{m-2}(y)}\, d\lambda(y)$$

и получим оценку

$$\|\mathrm{grad}_{C_{10}2^{-n}}\, v_n(\cdot)\|_p \leqslant C2^{-n(\alpha-1)}. \tag{14}$$

Из определения $u_{2^{-n}}$ и оценок (13) и (14) следует доказываемое неравенство (5).

Литература

1. Моторный В. П. Приближение функций алгебраическими полиномами в метрике L^p. *Известия АН СССР. Сер.: Математика* **35** (4), 874–899 (1971).

2. Потапов М. К. О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения. *Труды МИАН СССР* **134**, 260–277 (1975).

3. Alexeeva T. A., Shirokov N. A. Constructive description of Hölder-like classes on an arc in $\mathbb{R}^3$ by means of harmonic functions. *Journal of Approximation Theory* **249** (2020). https://doi.org/10.1016/j.jat.2019.105308

4. Алексеева Т. А., Широков Н. А. Классы Гёльдера в L^p-норме на chord-arc кривой в $\mathbb{R}^3$. *Алгебра и анализ* **34** (4), 1–21 (2022).

5. Павлов Д. А. Конструктивное описание гёльдеровых классов на некоторых многомерных компактах. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 3, 430–441 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.305

Статья поступила в редакцию 6 октября 2022 г.;
доработана 16 ноября 2022 г.;
рекомендована к печати 17 ноября 2022 г.

Контактная информация:

Павлов Дмитрий Александрович — аспирант; dimapavlow@list.ru

L^p-norm approximation of Hölder functions by harmonic functions on some multidimensional compact sets

D. A. Pavlov

Herzen State Pedagogical University of Russia,
48, nab. r. Moiki, St Petersburg, 191186, Russian Federation

For citation: Pavlov D. A. L^p-norm approximation of Hölder functions by harmonic functions on some multidimensional compact sets. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 259–269.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.207 (In Russian)

In this paper we consider the class of Hölder functions in the sense of L^p norm on certain compacts in $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 3)$ and prove theorems on approximation by functions harmonic in neighborhoods of these compacrs. These compacts are a generalization to the higher dimensions of the concept of chord-arc curve in $\mathbb{R}^3$. The size of the neighborhood decreases along with an increase in the accuracy of the approximation. Estimates of the approximation rate and the gradient of the approximation functions are made in the same L^p-norm.

Keywords: constructive description, Hölder classes, approximation, harmonic functions, chord-arc curves.

References

1. Motornyi V. P. Approximation of functions by algebraic polynomials on the L^p metric. *Izvestiya AN SSSR. Seriya Matematika* **35**, 874–899 (1971). (In Russian)

2. Potapov M. K. The structural characteristic of the classes of functions with a given order of best approximation. *Trudy MIAN SSSR.* **134**, 260–277 (1975). (In Russian)

3. Alexeeva T. A., Shirokov N. A. Constructive description of Hölder-like classes on an arc in $\mathbb{R}^3$ by means of harmonic functions. *Journal of Approximation Theory* **249** (2020). https://doi.org/10.1016/j.jat.2019.105308

4. Alexeeva T. A., Shirokov N. A. Hölder classes in L^p norm on a chord arc curve in $\mathbb{R}^3$. *Algebra i analiz* **34** (4), 1–21 (2022). (In Russian)

5. Pavlov D. A. Constructive description of Holder classes on some multidimensional compact sets. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 3, 430–441 (2021). https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.305 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 3, 245–253 (2021). https://doi.org/10.1134/S1063454121030055].

Received: October 6, 2022
Revised: November 16, 2022
Accepted: November 17, 2022

Author's information:

Dmitriy A. Pavlov — dimapavlow@list.ru