

Конечные деформации двухслойной диэлектрической нелинейно-упругой анизотропной трубки под действием электрического поля*

А. М. Колесников^{1,2}, Д. А. Летунова^{1,3}

¹ Южный федеральный университет,
Российская Федерация, 344090, Ростов-на-Дону, Большая Садовая ул. 105/42

² Донской государственный технический университет,
Российская Федерация, 344000, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

³ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

Для цитирования: Колесников А. М., Летунова Д. А. Конечные деформации двухслойной диэлектрической нелинейно-упругой анизотропной трубки под действием электрического поля // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 305–314. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.211>

В работе рассматривается задача о конечных деформациях диэлектрической трубки под действием электрического поля. Трубка состоит из двух слоев, каждый из которых спирально армирован волокнами. Углы намотки волокон в каждом слое разные. На внутреннюю и внешнюю поверхности трубки и между слоями нанесены гибкие электроды. Электрическое поле наводится путем подачи напряжения на первый или второй слой, т. е. либо на электроды внутренней поверхности и между слоями, либо на электроды между слоями и внешней поверхности. При анализе рассматривается простая модель электроактивного анизотропного несжимаемого материала. Функция потенциальной энергии представляется суммой энергии изотропной матрицы в форме Джента, простейшей электрической составляющей и энергии армирующих волокон. С помощью полуобратного представления задача статики трехмерного тела сводится к интегральным уравнениям относительно параметров деформирования трубки: радиуса внешнего слоя, кратности продольного удлинения и угла закручивания. Исследуется влияние толщины слоев на деформацию трубки при квазистатическом увеличении электрического напряжения. Целью работы является определение таких соотношений толщин слоев, при которых подача напряжения на разные слои будет приводить к закручиванию трубки в разные стороны.

Ключевые слова: нелинейная электроупругость, диэлектрический эластомер, армирование, трубчатые приводы, мягкие роботы.

1. Введение. Диэлектрические эластомеры — это класс электроактивных полимеров, которые под действием электрического поля могут претерпевать большие деформации. Обычно конструкции из диэлектрических эластомеров представляют собой конденсаторы с переменной емкостью, возникающей за счет сжатия в направлении электростатических сил и расширения в перпендикулярном направлении. Для их работы требуется высокое напряжение (до нескольких киловольт), но для удержания

* Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Российской Федерации (грант № 14.Z50.31.0046).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

жания деформированного состояния тела не требуется расход энергии. Первое описание этого эффекта дано еще в 1880 г. в работах [1, 2]. В последние два десятилетия значительно увеличилось количество научных работ по исследованию диэлектрических эластомеров и проектированию различных устройств на основе таких материалов [3–5].

Одним из простых функциональных элементов при создании мягких роботов, искусственных мышц или актуаторов является трубка. Изотропная диэлектрическая трубка под действием электрического поля, возникающего при подаче напряжения на гибкие электроды на ее боковых поверхностях, удлиняется и расширяется радиально [6, 7]. В работах [8–10] показано, что спиральное армирование диэлектрической трубки приводит к ее закручиванию под действием электрического поля. Угол армирования оказывает существенное влияние на величину закручивания.

В данной работе рассматривается двухслойная трубка, каждый слой которой спирально армирован волокнами. Рассмотрен специальный вид армирования, в котором намотка волокон одного слоя зеркальна намотке в другом слое. Внешняя и внутренняя боковые поверхности трубки и поверхность между слоями покрыты гибкими электродами. Электрическое напряжение подается на каждый слой по отдельности. Исследуется влияние толщин слоев на деформацию составной трубки.

2. Математическая модель. 2.1. Отсчетная конфигурация. Рассмотрим длинную трубку с внутренним и внешним радиусами A и B . Длину трубки L считаем достаточно большой, чтобы пренебрегать особенностями решения вблизи ее торцов. В цилиндрической системе координат $\{R, \Theta, Z\}$ с базисом $\{\mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\Theta, \mathbf{E}_Z\}$ радиус-вектор \mathbf{R} точек трубки имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= R\mathbf{E}_R + Z\mathbf{E}_Z, \quad R \in [A, B], \quad \Theta \in [0, 2\pi], \quad Z \in [-L/2, L/2], \\ \mathbf{E}_R &= \cos \Theta \mathbf{i}_1 + \sin \Theta \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{E}_\Theta = -\sin \Theta \mathbf{i}_1 + \cos \Theta \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{E}_Z = \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$ и \mathbf{i}_3 — орты декартовой системы координат. Далее при необходимости будем использовать обозначения: $Q^1 = R, Q^2 = \Theta$ и $Q^3 = Z$. Основной и взаимный базисы в отсчетной конфигурации примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{E}_R, \quad \mathbf{R}_2 = R\mathbf{E}_\Theta, \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{E}_Z, \\ \mathbf{R}^1 &= \mathbf{E}_R, \quad \mathbf{R}^2 = \frac{1}{R}\mathbf{E}_\Theta, \quad \mathbf{R}^3 = \mathbf{E}_Z. \end{aligned}$$

Положим, что трубка армирована волокнами по спиральным линиям. Пусть при $R \in [A, C]$ ($A < C < B$) угол намотки равен Φ_1 , а при $R \in [C, B]$ — Φ_2 . Далее индексы у углов намотки будем опускать, имея в виду, что выбирается соответствующее значение в зависимости от координаты R . Тогда касательный вектор к армирующим волокнам можно представить в виде

$$\mathbf{K} = \cos \Phi \mathbf{E}_\Theta + \sin \Phi \mathbf{E}_Z.$$

Пусть на боковые поверхности трубок и на поверхности $\{R = C, \Theta \in [0, 2\pi], Z \in [-L/2, L/2]\}$ нанесены гибкие электроды. Далее будем называть их электродами A, C и B , соответственно их радиальным координатам. Создание такой трубки можно рассматривать как склеивание двух трубок, имеющих разное армирование, внешний радиус одной из трубок равен внутреннему радиусу другой трубки (рис. 1).

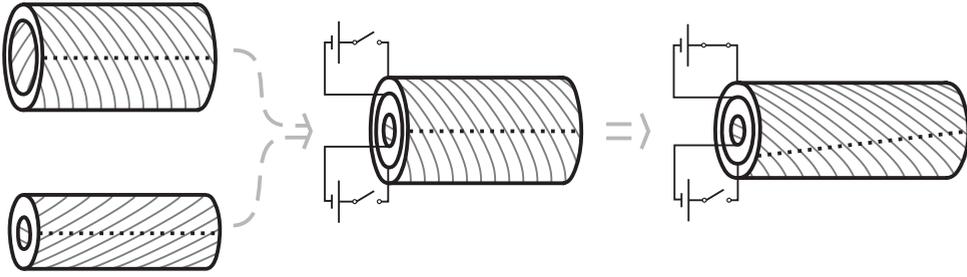


Рис. 1. Недеформированные армированные трубки; соединенные трубки; деформированные трубки под действием электрического поля, наведенного в одном из слоев.

2.2. Текущая конфигурация. Рассмотрим деформацию двухслойной трубки, соответствующую растяжению (с кратностью удлинения λ), закручиванию (на относительный к текущей длине трубки угол ψ) и радиальному расширению. Положение точек трубки в текущей конфигурации определяется радиус-вектором в цилиндрической системе координат $\{r, \theta, z\}$ с базисом $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z, \quad r \in [a, b], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in [-\lambda L/2, \lambda L/2], \\ r &= r(R), \quad \theta = \Theta + \psi\lambda Z, \quad z = \lambda Z, \\ \mathbf{e}_r &= \cos\theta\mathbf{i}_1 + \sin\theta\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\mathbf{i}_1 + \cos\theta\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{i}_3. \end{aligned}$$

Здесь $a = r(A)$, $b = r(B)$. Основной и взаимный базисы в текущей конфигурации примут вид

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{dr}{dR}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}_2 = r\mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{r}_3 = \psi\lambda r\mathbf{e}_\theta + \lambda\mathbf{e}_z, \\ \mathbf{r}^1 &= \left(\frac{dr}{dR}\right)^{-1}\mathbf{e}_r, \quad \mathbf{r}^2 = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta - \psi\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}^3 = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Градиент деформации примет вид

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^i} \otimes \mathbf{R}^i = \frac{dr}{dR}\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{E}_R + \frac{r}{R}\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_\Theta + \lambda\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{E}_Z + \psi\lambda r\mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{E}_Z.$$

Из условия несжимаемости $\det \mathbf{F} = 1$ можно получить соотношение между радиальными координатами текущей и отсчетной конфигураций в виде

$$R = \sqrt{B^2 + \lambda(r^2 - b^2)}. \quad (1)$$

Направления армирующих волокон в деформированном состоянии определяются вектором

$$\mathbf{k} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{K} = k_\theta\mathbf{e}_\theta + k_z\mathbf{e}_z, \quad k_\theta = \lambda\psi r \sin \Phi + \frac{r}{R} \cos \Phi, \quad k_z = \lambda \sin \Phi.$$

2.3. Определяющие соотношения. Рассмотрим нелинейно-упругий электроактивный анизотропный несжимаемый материал. Полную удельную энергию

представим в следующем виде [6, 7, 11, 12]:

$$\begin{aligned} W(I_1, I_5, I_7) &= W_{iso}(I_1) + W_{ele}(I_5) + W_{ani}(I_7), \\ I_1 &= \text{trc}, \quad I_5 = \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}, \quad I_7 = \mathbf{K} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда вектор электрического поля \mathbf{E} и полный тензор напряжений Коши $\boldsymbol{\tau}$ задаются соотношениями [6, 7]

$$\mathbf{E} = 2W_5\mathbf{D}, \quad \boldsymbol{\tau} = \tilde{\boldsymbol{\tau}} - p\mathbf{I}, \quad \tilde{\boldsymbol{\tau}} = 2[W_1\mathbf{b} + W_5\mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + W_7\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}]. \quad (3)$$

Здесь \mathbf{c} и \mathbf{b} — меры деформации Коши и Фингера; \mathbf{D} — вектор электрического смещения; \mathbf{I} — единичный тензор; p — неизвестная функция гидростатического давления, определяющая для несжимаемого материала напряжения, не выражаемые через деформацию; W_i — производная энергии по инварианту I_i .

Для дальнейшего анализа задачи рассмотрим простую форму полной энергии. Положим, что

$$\begin{aligned} W_{iso}(I_1) &= -\frac{\mu J_m}{2} \ln \left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m} \right), \quad W_{ele}(I_5) = \frac{1}{2\varepsilon} I_5, \\ W_{ani}(I_7) &= \frac{\mu\gamma}{4} (I_7 - 1)^2. \end{aligned}$$

Здесь μ , J_m — материальные параметры модели Джента; ε — диэлектрическая проницаемость; γ — относительная жесткость армирующих волокон. Изотропная и электрическая части полной энергии использованы в работе [14] для описания акрилового эластомера VNB4910, производимого фирмой 3M.

Для рассматриваемого материала компоненты тензора $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{rr} &= 2 \left[\left(\frac{dr}{dR} \right)^2 W_1 + D_r^2 W_5 \right], \\ \tilde{\tau}_{\theta\theta} &= 2 \left[\left(\psi^2 \lambda^2 r^2 + \frac{r^2}{R^2} \right) W_1 + k_\theta^2 W_7 + D_r^2 W_5 \right], \\ \tilde{\tau}_{zz} &= 2 [\lambda^2 W_1 + k_z^2 W_7], \\ \tilde{\tau}_{\theta z} &= 2 [\psi \lambda^2 r W_1 + k_\theta k_z W_7]. \end{aligned} \quad (4)$$

2.4. Электростатика. Уравнения электростатики при отсутствии магнитных полей, свободных токов и свободных объемных электрических зарядов можно записать в виде

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{D} = 0.$$

Здесь использованы операторы дивергенции и ротора в текущей конфигурации:

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Q^i} \times \mathbf{r}^i, \quad \text{div } \mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial Q^i} \cdot \mathbf{r}^i.$$

Рассмотрим два случая. В первом случае на электроды A и C наводятся одинаковой величины Q , но противоположного знака заряды. Во втором случае равные, но противоположные заряды наводятся на электроды C и B . Для достаточно длинной

трубки, пренебрегая краевым эффектом вблизи торцов, можно считать, что такие системы зарядов создают радиальное электрическое поле [6, 7], т. е. $\mathbf{D} = D_r \mathbf{e}_r$. Из теоремы Гаусса можно показать, что для первого случая электрическое поле отсутствует при $r < a$ и $r > c = r(C)$. Для второго случая электрическое поле отсутствует при $r < c$ и $r > b$.

Уравнения электростатики сводятся к одному скалярному уравнению, которое можно представить в виде [6, 7]

$$\frac{d}{dr}(rD_r) = 0.$$

Граничные условия при активации первого слоя имеют вид [6, 7]

$$D_r \Big|_{r=a} = \frac{Q}{2\pi\lambda La}, \quad D_r \Big|_{r=c} = \frac{Q}{2\pi\lambda Lc},$$

при активации второго слоя имеют вид

$$D_r \Big|_{r=c} = \frac{Q}{2\pi\lambda Lc}, \quad D_r \Big|_{r=b} = \frac{Q}{2\pi\lambda Lb}.$$

Таким образом, решение задачи электростатики можно представить в следующем виде:

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{2\pi\lambda Lr} \mathbf{e}_r.$$

2.5. Уравнения равновесия. Уравнения равновесия твердого тела в отсутствие массовых сил имеют вид [6, 11]

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0.$$

Положим, что на трубку не оказывается механического воздействия. Ее внутренняя и внешняя боковые поверхности свободны от поверхностной нагрузки:

$$-\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau} \Big|_{r=a} = 0, \quad \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\tau} \Big|_{r=b} = 0.$$

Тогда с учетом вида тензора напряжений (3) и (4) из уравнения равновесия и граничных условий получаем, что неизвестная функция гидростатического давления p зависит только от координаты r . А векторное уравнение равновесия сводится к одному скалярному уравнению:

$$\frac{dp}{dR} = \frac{d\tilde{\tau}_{rr}}{dR} + \frac{\tilde{\tau}_{rr} - \tilde{\tau}_{\theta\theta}}{r} \frac{dr}{dR}.$$

Решение полученного обыкновенного дифференциального уравнения может быть представлено в следующем виде [7, 10, 12]:

$$p(r) = \tilde{\tau}_{rr}(r) - \int_r^b \frac{\tilde{\tau}_{rr}(\rho) - \tilde{\tau}_{\theta\theta}(\rho)}{\rho} d\rho.$$

По торцам трубки граничные условия задаются в интегральном смысле: продольная сила и крутящий момент равны нулю. Таким образом, получаем следующую систему уравнений [7, 10]:

$$\int_a^b \frac{\tilde{\tau}_{rr}(\rho) - \tilde{\tau}_{\theta\theta}(\rho)}{\rho} d\rho = 0, \quad \int_a^b \tilde{\tau}_{\theta z}(\rho) \rho^2 d\rho = 0, \quad (5)$$

$$\int_a^b (2\tilde{\tau}_{zz}(\rho) - \tilde{\tau}_{rr}(\rho) - \tilde{\tau}_{\theta\theta}(\rho)) \rho d\rho = 0.$$

Первое уравнение получено из граничных условий отсутствия нагрузки на боковых поверхностях трубки, второе и третье уравнения являются условиями отсутствия крутящего момента и продольной силы на торцах трубки соответственно.

С учетом (1) уравнения (5) являются системой нелинейных уравнений относительно параметров деформации λ , ψ и внешнего радиуса деформированной трубки b . Внутренний радиус находится из условия несжимаемости:

$$a = \sqrt{b^2 + \frac{1}{\lambda} (A^2 - B^2)}.$$

Для решения полученной системы были использованы встроенные методы численного решения нелинейных уравнений математического пакета Maple. Запрограммированный метод вызывался в цикле при изменяющейся величине заряда Q . В качестве начального приближения на первом шаге при малой величине заряда использовались значения искомых параметров деформации, соответствующие отсутствию нагрузок ($\lambda = 1$, $\psi = 0$, $b = B$). Далее при увеличении заряда в качестве начального приближения использовались значения, найденные на предыдущем шаге.

3. Результаты. Введем безразмерные внешний радиус $b^* = b/B$ и среднее значение электрического напряжения V^* при активации внутреннего слоя:

$$V^* = \frac{V}{C - A} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{Q \ln \frac{c}{a}}{2\pi \sqrt{\mu\varepsilon} \lambda L (C - A)},$$

и при активации внешнего слоя:

$$V^* = \frac{V}{B - C} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = \frac{Q \ln \frac{b}{c}}{2\pi \sqrt{\mu\varepsilon} \lambda L (B - C)}.$$

Здесь V — напряжение электрического поля между соответствующими электродами. Численные расчеты проведены при следующих параметрах материала: $J_m = 100$, $\gamma = 100$ и следующих углах армирования: $\Phi_1 = 3\pi/4$, $\Phi_2 = \pi/4$.

Результаты численного моделирования представлены на рис. 2 при $A = 0.2B$.

При приложении электрического напряжения на внутренний слой зависимости λ и b^* до $V^* \approx 1$ мало отличаются от 1 (черные линии на рис. 2, б и в). Для значений $C = 0.7B$, $0.75B$ и $0.85B$ зависимости λ и b^* от V^* очень близки. Существенное отличие возникает для тонкого внутреннего слоя $C = 0.4B$. При приложении электрического напряжения на внешний слой трубка деформируется сильнее (серые линии на рис. 2, б и в). В основном трубки удлиняются и уменьшаются в диаметре.

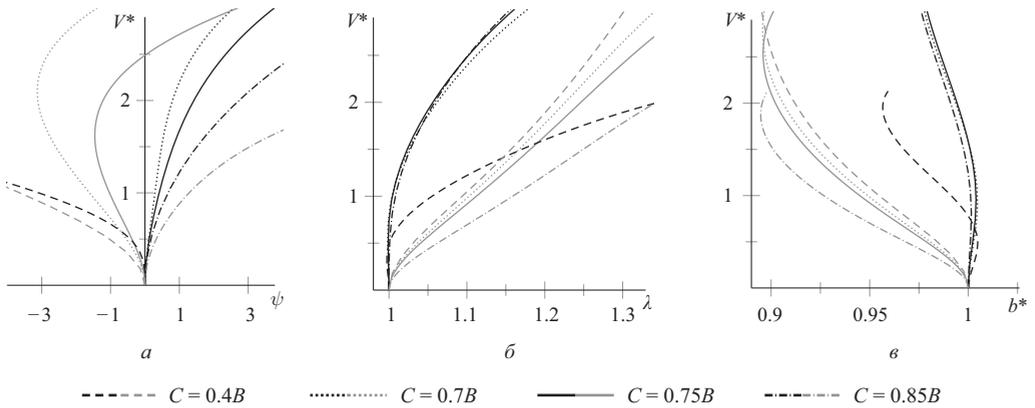


Рис. 2. Зависимость между безразмерным электрическим напряжением V^* и углом закручивания ψ (в градусах) (а), кратностью удлинения λ (б), относительным внешним радиусом b^* (в) при $A = 0.2B$ для разных значений C ; углы намотки $\Phi_1 = 3\pi/4$, $\Phi_2 = \pi/4$. Черные линии — напряжение прикладывается к внутреннему слою (электроды A и C). Серые линии — напряжение прикладывается к внешнему слою (электроды C и B).

Для трубок, в которых один из слоев имеет значительно меньшую толщину (в рассматриваемых примерах это трубки с $C = 0.4B$ и $C = 0.85B$), направление закручивания не зависит от того, на какой слой прикладывается электрическое напряжение. Если тонкий слой внутренний ($C = 0.4B$), то закручивание происходит против направления отсчета угловой координаты Θ . Если тонкий слой внешний ($C = 0.85B$), то закручивание происходит по направлению координаты Θ . Различия проявляются в величине закручивания. При приложении электрического напряжения на внешний слой закручивание сильнее.

Для $C = 0.7B$ и $C = 0.75B$ получено, что направление закручивания будет зависеть от того, к какому слою приложено электрическое напряжение. При приложении напряжения на внутренний слой, армированный волокнами под углом $\Phi_1 = 3\pi/4$, закручивание происходит по направлению отсчета угловой координаты Θ . При приложении напряжения на внешний слой, армированный волокнами под углом $\Phi_1 = \pi/4$, закручивание происходит против направления отсчета угловой координаты Θ . Эффект закручивания невелик. Кроме этого, при приложении напряжения на внешний слой закручивание является немонотонной функцией от электрического напряжения. Так, при $C = 0.75B$ при приложении напряжения на внешний слой трубки функция $\psi(V^*)$ сначала убывает (при $V^* < 1.6$) и принимает отрицательные значения, затем возрастает (при $V^* > 1.6$) и становится положительной (при $V^* > 2.5$).

Выше представлены результаты в безразмерном виде. Для наглядности приведем к размерным величинам для материала с параметрами, представленными в работах [9, 13], $\mu = 45$ кПа, $\varepsilon = 3.98 \cdot 10^{-11}$ Ф/м. Внешний радиус положим $B = 1$ см. Тогда $V^* = 1$ соответствует (для первого и второго слоя): при $C = 0.4B$ — $V_{AC} \approx 67$, $V_{CB} \approx 202$ кВ; при $C = 0.7B$ — $V_{AC} \approx 168$, $V_{BC} \approx 101$ кВ; при $C = 0.85B$ — $V_{AC} \approx 219$, $V_{BC} \approx 50$ кВ.

4. Заключение. Рассмотрена задача о конечных деформациях двухслойной диэлектрической трубки под действием электрического поля. Каждый слой трубки спирально армирован волокнами под разными углами. Внешняя, внутренняя поверхности трубки и поверхность между слоями покрыты гибкими электродами.

Электрическое напряжение подается на границы первого или второго слоя. Целью работы является исследование закручивания трубки под действием электрических полей. Рассмотрен частный случай армирования под углами $\pi/4$ и $3\pi/4$ для внешнего и внутреннего слоя соответственно.

Обнаружено, что при специальном выборе толщин слоев трубка может закручиваться в разные стороны в зависимости от того, на какой слой подается напряжение. Однако величина закручивания мала. Вероятно, увеличения угла закручивания можно добиться за счет варьирования геометрических параметров трубки и углов армирования или за счет создания предварительных напряжений в двухслойной трубке (деформационной анизотропии [14]), что требует дальнейшего исследования.

Литература

1. Röntgen W. C. Ueber die durch Electricität bewirkten Form- und Volumenänderungen von dielectricischen Körpern. *Annalen der Physik* **247** (13), 771–786 (1880).
2. Quincke G. IV. On electrical expansion. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **10** (59), 30–39 (1880).
3. Gupta U., Qin L., Wang Y., Godaba H., Zhu J. Soft robots based on dielectric elastomer actuators: A review. *Smart Materials and Structures* **28** (10), 103002 (2019). <https://doi.org/10.1088/1361-665X/AB3A77>
4. Lu T., Ma C., Wang T. Mechanics of dielectric elastomer structures: A review. *Extreme Mechanics Letters* **38**, 100752 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.eml.2020.100752>
5. Guo Y., Liu L., Liu Y., Leng J. Review of Dielectric Elastomer Actuators and Their Applications in Soft Robots. *Advanced Intelligent Systems* **3**, 2000282 (2021). <https://doi.org/10.1002/aisy.202000282>
6. Dorfmann L., Ogden R. W. *Nonlinear theory of electroelastic and magnetoelastic interactions*. New York, Springer (2014).
7. Melnikov A., Ogden R. W. Finite deformations of an electroelastic circular cylindrical tube. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **67** (6), 140 (2016). <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0733-0>
8. He L., Lou J., Du J. Analytical solutions for inextensible fiber-reinforced dielectric elastomer torsional actuators. *Journal of Applied Mechanics* **84** (5), 051003 (2017). <https://doi.org/10.1115/1.4036193>
9. He L., Lou J., Du J., Wu H. Voltage-induced torsion of a fiber-reinforced tubular dielectric elastomer actuator. *Composites Science and Technology* **140**, 106–115 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2016.12.032>
10. Kolesnikov A. M. Finite deformations of a non-linearly elastic electrosensitive tube reinforced by two fiber families. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* **34**, 1237–1255 (2022). <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01118-3>
11. Лурье А. И. *Нелинейная теория упругости*. Москва, Наука (1980).
12. Goriely A., Tabor M. Rotation, inversion and perversion in anisotropic elastic cylindrical tubes and membranes. *Proc. R. Soc. A* **469** (2153), 20130011 (2013). <https://doi.org/10.1098/rspa.2013.0011>
13. Lu T. Q., Suo Z. G. Large conversion of energy in dielectric elastomers by electromechanical phase transition. *Acta Mechanica Sinica* **28** (4), 1106–1114 (2012). <https://doi.org/10.1007/s10409-012-0091-x>
14. Bazaev K., Cohen N. Electrically-induced twist in geometrically incompatible dielectric elastomer tubes. *International Journal of Solids and Structures*, 111707 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111707>

Статья поступила в редакцию 14 июля 2022 г.;
доработана 21 октября 2022 г.;
рекомендована к печати 17 ноября 2022 г.

Контактная информация:

Колесников Алексей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.; alexey.m.kolesnikov@gmail.com
Летунова Дарья Александровна — студент; letunova.daria.a@gmail.com

Finite deformations of a bilayer dielectric nonlinear elastic anisotropic tube under an electric field*

A. M. Kolesnikov^{1,2}, D. A. Letunova^{1,3}

¹ Southern Federal University,

105/42, Bol'shaia Sadovaia ul., Rostov-on-Don, 344090, Russian Federation

² Don State Technical University, 1, pl. Gagarina, Rostov-on-Don, 344000, Russian Federation

³ Moscow State University, 1, Leninskie gory, Moscow, 119991, Russian Federation

For citation: Kolesnikov A. M., Letunova D. A. Finite deformations of a bilayer dielectric nonlinear elastic anisotropic tube under an electric field. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 305–314. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.211> (In Russian)

In this paper the problem of finite deformations of a dielectric tube under the action of an electric field is considered. The tube consists of two layers, each spirally reinforced with fibres. The angles of the fibres in each layer are different. On the inner and outer surfaces of the tube and between the layers are flexible electrodes. The electric field is induced by applying voltage to the first or second layer, i. e. either to the electrodes on the inner side surface and between the layers, or to the electrodes between the layers and on the outer side surface. A simple model of an electroactive anisotropic incompressible material is considered in the analysis. The potential energy function is represented by the sum of the energy of the isotropic matrix in Gent form, the simplest electrical component and the energy of the reinforced fibres. Using a semi-inverse method, the static problem of the three-dimensional body is reduced to integral equations with respect to the tube deformation parameters: the radius of the outer layer, the multiplicity of longitudinal elongation and the twist angle. The influence of layer thickness on tube deformation under quasi-static increase of voltage is investigated. The purpose of this work is to determine the thickness of the layers at which the application of voltage to the different layers will cause the tube to twist in different directions.

Keywords: nonlinear electroelasticity, dielectric elastomer, reinforcement, tubular actuators, soft robots.

References

1. Röntgen W. C. Ueber die durch Electricität bewirkten Form- und Volumenänderungen von dielectricischen Körpern. *Annalen der Physik* **247** (13), 771–786 (1880).
2. Quincke G. IV. On electrical expansion. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* **10** (59), 30–39 (1880).
3. Gupta U., Qin L., Wang Y., Godaba H., Zhu J. Soft robots based on dielectric elastomer actuators: A review. *Smart Materials and Structures* **28** (10), 103002 (2019). <https://doi.org/10.1088/1361-665X/AB3A77>
4. Lu T., Ma C., Wang T. Mechanics of dielectric elastomer structures: A review. *Extreme Mechanics Letters* **38**, 100752 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.eml.2020.100752>
5. Guo Y., Liu L., Liu Y., Leng J. Review of Dielectric Elastomer Actuators and Their Applications in Soft Robots. *Advanced Intelligent Systems* **3**, 2000282 (2021). <https://doi.org/10.1002/aisy.202000282>
6. Dorfmann L., Ogden R. W. *Nonlinear theory of electroelastic and magnetoelastic interactions*. New York, Springer (2014).
7. Melnikov A., Ogden R. W. Finite deformations of an electroelastic circular cylindrical tube. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **67** (6), 140 (2016). <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0733-0>
8. He L., Lou J., Du J. Analytical solutions for inextensible fiber-reinforced dielectric elastomer torsional actuators. *Journal of Applied Mechanics* **84** (5), 051003 (2017). <https://doi.org/10.1115/1.4036193>

*The work is supported by the Government of Russian Federation (grant no. 14.Z50.31.0046).

9. He L., Lou J., Du J., Wu H. Voltage-induced torsion of a fiber-reinforced tubular dielectric elastomer actuator. *Composites Science and Technology* **140**, 106–115 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2016.12.032>

10. Kolesnikov A.M. Finite deformations of a non-linearly elastic electrosensitive tube reinforced by two fiber families. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* **34**, 1237–1255 (2022). <https://doi.org/10.1007/s00161-022-01118-3>

11. Lurie A. I. *Nelineinaia teoriia uprugosti*. Moscow, Nauka Publ. (1980) (In Russian) [Eng. transl.: Lurie A. I. *Nonlinear theory of elasticity*. Amsterdam, Elsevier (1990)].

12. Goriely A., Tabor M. Rotation, inversion and perversion in anisotropic elastic cylindrical tubes and membranes. *Proc. R. Soc. A* **469** (2153), 20130011 (2013). <https://doi.org/10.1098/rspa.2013.0011>

13. Lu T. Q., Suo Z. G. Large conversion of energy in dielectric elastomers by electromechanical phase transition. *Acta Mechanica Sinica* **28** (4), 1106–1114 (2012). <https://doi.org/10.1007/s10409-012-0091-x>

14. Bazaev K., Cohen N. Electrically-induced twist in geometrically incompatible dielectric elastomer tubes. *International Journal of Solids and Structures*, 111707 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2022.111707>

Received: July 14, 2022

Revised: October 21, 2022

Accepted: November 17, 2022

Authors' information:

Alexey M. Kolesnikov — alexey.m.kolesnikov@gmail.com

Daria A. Letunova — letunova.daria.a@gmail.com

ХРОНИКА

5 октября 2022 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступили канд. физ.-мат. наук, доцент А. С. Кулешов и аспирант М. М. Гаджиев (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва) с докладом на тему «Теорема В. В. Козлова об отсутствии аналитических интегралов вблизи положений равновесия гамильтоновых систем и ее применение в различных задачах механики».

Краткое содержание доклада:

В 1976 г. В. В. Козлов доказал теорему, дающую достаточные условия несуществования у гамильтоновой системы аналитического по каноническим переменным первого интеграла, квадратичная часть которого была бы функционально независима с квадратичной частью функции Гамильтона. В докладе при помощи теоремы Козлова обсуждаются вопросы существования дополнительного интеграла в различных задачах механики гамильтоновых систем: в задаче о движении тяжелого твердого динамически симметричного тела с неподвижной точкой, центр масс которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции, в задаче о движении динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой, находящегося в потоке частиц, в задаче о движении плоского двойного маятника, в задаче о движении динамически симметричного эллипсоида по абсолютно гладкой горизонтальной плоскости.