

О термооптическом возбуждении параметрических колебаний микробалочных резонаторов. I*

Н. Ф. Морозов^{1,2}, Д. А. Индейцев^{2,3}, А. В. Лукин³,
И. А. Попов³, Л. В. Штукин^{2,3}

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

² Институт проблем машиноведения Российской академии наук,

Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

³ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

Для цитирования: Морозов Н. Ф., Индейцев Д. А., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В. О термооптическом возбуждении параметрических колебаний микробалочных резонаторов. I // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 315–333. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.212>

Настоящая статья является первой частью работы, посвященной исследованию нелинейной динамики параметрически возбуждаемых изгибных колебаний заземленной с двух концов микробалки — базового чувствительного элемента перспективного класса микродатчиков различных физических величин — при лазерном термооптическом воздействии в форме периодически генерируемых импульсов, действующих на некоторую часть поверхности балочного элемента. Найдено аналитическое решение задачи теплопроводности для установившегося гармонического распределения температуры в объеме резонатора. Определены статические и динамические компоненты силовых факторов температурной природы — температурных осевой силы и изгибающего момента. С помощью метода Галёркина выполнена дискретизация нелинейных связанных уравнений в частных производных, описывающих продольно-изгибные колебания резонатора. С применением асимптотического метода многих масштабов получено приближенное аналитическое решение для задачи нелинейной динамики системы в условиях главного параметрического резонанса.

Ключевые слова: нелинейная динамика, параметрические колебания, балка Бернулли — Эйлера, модальное взаимодействие, лазерное термооптическое воздействие.

1. Введение. Принцип лазерного термооптического воздействия на деформируемую среду находит все более широкое применение в задачах неразрушающего контроля оборудования и конструкций [1, 2], определения физико-механических свойств материалов [3, 4], изучения геометрических и физических параметров объектов и структур на нано- и микромасштабном уровне [5, 6], в биомедицине [7], а также в индустрии нано- и микросистем. Так, в работах [8, 9] представлены модели микромеханических актуаторов, использующих оптический метод сообщения упругому элементу температурных деформаций. В [10] исследуются вопросы влияния лазерного излучения на деформации поверхности микромеханических зеркал. Одним

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-01-00537).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

из важных направлений разработок и исследований в указанной области является лазерная термооптическая генерация колебаний подвижных элементов микроэлектромеханических систем различного назначения (датчики, системы обработки сигналов). В [11] представлены результаты разработки волоконно-оптических сенсоров, работающих в авторезонансном режиме при оптическом возбуждении. В [12] теоретически обоснован и экспериментально проверен метод лазерной термооптической частотной подстройки микромеханического резонатора и управления его нелинейной амплитудно-частотной характеристикой. В [13] сообщается об успешных экспериментах по термооптическому возбуждению многомодового параметрического резонанса в графеновых мембранах. В [14, 15] представлены результаты исследования нелинейной динамики и синхронизации колебаний в системе слабосвязанных микроэлектромеханических генераторов предельных циклов с термооптическим принципом возбуждения колебаний.

При рассмотрении динамики упругих элементов резонаторов, входящих в состав микро- и наномеханических систем (МЭМС и НЭМС), часто применяется механическая модель Бернулли — Эйлера. На эту тему есть обширная литература. Здесь упомянем лишь некоторые работы, в которых решены задачи, наиболее близкие по постановке к представленной далее. В [16] исследуется динамическая потеря устойчивости прямолинейного стержня с учетом процесса распространения упругих волн в продольном направлении. Показано, что критическая осевая нагрузка при динамическом воздействии может быть меньше эйлеровой в связи с реализацией параметрического резонанса, возбуждаемого продольными колебаниями. В [17] исследуется нелинейная динамика пространственных изгибно-крутильных колебаний стержня в случае множественных внутренних резонансов. Методы исследования и характер процессов модальной локализации в балке Бернулли — Эйлера исследуются в работе [18]. В [19] рассматривается задача о проектировании изохронных балочных элементов — систем, частоты свободных изгибных колебаний которых не зависят от амплитуды колебаний даже в нелинейных режимах движения.

Большое число работ посвящено изучению сложных режимов колебаний в нелинейных механических системах с сосредоточенными и распределенными параметрами. В [20] исследуется характер нелинейных нормальных мод в одномерных континуальных системах с квадратичными и кубическими нелинейностями в случае различных внутренних резонансов. В работе [21] предложены эффективные аналитические подходы, позволяющие описывать процессы биений и обмена энергии между модами в системах слабосвязанных осцилляторов. Нелинейное взаимодействие между формами изгибных колебаний микробалки при внешнем и параметрическом возбуждении изучено в [22]. В [23] в достаточно общей постановке исследуются качественные особенности нелинейной динамики свободных колебаний для системы с двумя степенями свободы в случае внутреннего резонанса 1:1. Теоретическое и экспериментальное исследование внутреннего резонанса 2:1 между двумя высокими симметричными формами изгибных колебаний микробалочного резонатора выполнено в [24].

Отдельный класс исследований составляют работы, посвященные задачам нелинейного модального взаимодействия между продольными и изгибными движениями струн, кабелей, стержней и пластин. Так, в работе [25] исследованы пространственные продольно-изгибные колебания натянутой струны в условиях внутреннего резонанса с учетом физической нелинейности системы. Особенности нелинейного взаимодействия продольных и изгибных волн в стержнях, кольцах и пластинах исследо-

ваны в [26, 27]. В [28] изучена динамика продольно-изгибных движений существенно растяжимого кабеля в геометрически нелинейной постановке в предположении линейно-упругого поведения материала. Нелинейная динамика продольно-изгибных колебаний балки, движущейся в осевом направлении, исследована в работе [29]. Серия работ посвящена исследованию колебаний и упругой устойчивости стержней при ударных и вибрационных нагрузках [30, 31].

Проблемы аналитического исследования связанных термоупругих колебаний рассматриваются в большом количестве монографий и статей. В работе [32] представлены редуцированные модели, позволяющие вычислительно эффективно моделировать двусторонне связанные термоупругие процессы в пластинах. В ряде работ изучаются тепловые и механические процессы в элементах конструкций при нестационарных температурных воздействиях. В [33] разработана двухтемпературная модель, описывающая оптическое возбуждение акустических колебаний в проводниках. Динамика балки Бернулли — Эйлера на упругом основании при импульсном лазерном воздействии исследуется в работе [34]. Анализ посткритического поведения балки на винклеровском основании при температурном нагружении выполнен в [35]. В работе [36] проведено исследование характера распространения термоупругих волн в балке Бернулли — Эйлера в предположениях нелокальной теории упругости и модели Грина — Нахди.

В выполненных ранее работах [37–39] рассматривалась динамика и упругая устойчивость балочного элемента МЭМС и НЭМС при кратковременных тепловых воздействиях. В [40] был исследован характер свободных продольно-изгибных колебаний стержня в случае внутреннего комбинационного резонанса между двумя изгибными и низшей продольной формами колебаний. Было показано, что начальное возмущение в продольном направлении может эффективно возбуждать изгибные формы колебаний, что в целом приводит к режиму продольно-изгибных биений со значительными амплитудами. В работе [41] был выполнен анализ процессов нелинейного модального взаимодействия между продольными и изгибными колебаниями микробалочных резонаторов при гармоническом температурном воздействии общего вида. С качественной стороны был исследован режим параметрических колебаний микробалки в условиях внутреннего кратного резонанса между некоторыми изгибной и продольной формами свободных колебаний резонатора. Обнаружена возможность генерации в системе режима продольно-изгибных биений, частота медленной огибающей которых существенным образом зависит от параметра внутренней частотной расстройки.

Настоящая статья является первой частью работы, посвященной исследованию нелинейной динамики параметрически возбуждаемых изгибных колебаний зашпеленной с двух концов микробалки — базового чувствительного элемента перспективного класса микродатчиков различных физических величин — при лазерном термооптическом воздействии в форме периодически генерируемых импульсов, действующих на некоторую часть поверхности балочного элемента. Выполняется построение аналитического решения задачи теплопроводности для установившегося гармонического распределения температуры в объеме резонатора. Определяются статические и динамические компоненты силовых факторов температурной природы — температурных осевой силы и изгибающего момента. С помощью метода Галёркина проводится дискретизация нелинейных связанных уравнений в частных производных, описывающих продольно-изгибные колебания резонатора. С применением асимптотического метода многих масштабов строится приближенное аналитическое решение

для задачи нелинейной динамики системы в условиях главного параметрического резонанса.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача об изгибных колебаниях заземленной с двух концов прямолинейной тонкой микробалки, описываемой механической моделью Бернулли — Эйлера, при лазерном термооптическом воздействии.

Графическая схема исследуемой задачи показана на рис. 1.

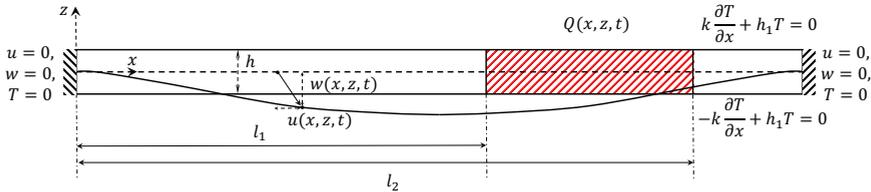


Рис. 1. Графическая схема рассматриваемой задачи.

В обозначениях рисунка: t — время; x, z — координаты в горизонтальном и вертикальном направлениях; k — коэффициент теплопроводности; T — температура в данной точке стержня; T_0 — отсчетная температура, везде далее принимаемая равной нулю; $Q(x, z, t)$ — объемное тепловыделение в материале резонатора, моделирующее лазерное термооптическое воздействие; значения продольной координаты l_1, l_2 характеризуют границы области действия лазерного источника. Условия тепловой изоляции принимаются по торцевым сечениям балочного резонатора и конвективного теплообмена на верхней и нижней поверхностях элемента с коэффициентом теплопередачи h_1 . Механические параметры системы имеют следующие обозначения: u, w — продольное и поперечное перемещения; N — продольная сила; ρ, E, α_T — плотность, модуль Юнга и коэффициент линейного температурного расширения материала; $S = bh$; L, b, h — длина стержня, ширина и высота поперечного сечения соответственно.

Связанные нелинейные уравнения продольно-изгибных колебаний тонкого стержня при температурном воздействии после выполнения процедуры обезразмеривания имеют вид [41]

$$u'' + 12\beta w'w'' = 12\beta^2 \ddot{u} + N_{\xi}^T, \quad (1)$$

$$w^{IV} + \ddot{w} + N^T w'' = -M_{\xi\xi}^T + \frac{1}{\beta} u'w'' + 6(w')^2 w'' + 12\beta \dot{u}w' \quad (2)$$

с граничными условиями

$$u(0, \tau) = w(0, \tau) = w'(0, \tau) = 0, \quad u(1, \tau) = w(1, \tau) = w'(1, \tau) = 0. \quad (3)$$

Здесь продольные u и поперечные w перемещения стержня нормированы на его толщину h ; продольная координата ξ нормирована на длину стержня L ; безразмерное время $\tau = t/t_0$, где $t_0 = \sqrt{\frac{\rho S L^4}{EJ}}$ ($J = \frac{bh^3}{12}$ — момент инерции сечения); безразмерный параметр $\beta = \frac{1}{12} \frac{h}{L}$ характеризует тонкость стержня. За производными по безразмерной продольной координате и времени сохранены обозначения $(\cdot)', (\dot{\cdot})$.

Безразмерные температурные силовые факторы, входящие в уравнения (1)–(2), связаны с размерными выражениями для осевой температурной силы

$$\tilde{N}^T \triangleq Eb\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T(x, z, t) dz \quad (4)$$

и изгибающего температурного момента

$$\tilde{M}^T \triangleq Eb\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} zT(x, z, t) dz \quad (5)$$

следующими соотношениями [41]:

$$N^T(\xi, \tau) = \frac{L^2}{EJ} \tilde{N}^T, \quad (6)$$

$$N_\xi^T(\xi, \tau) = \frac{L^2}{ESh} \tilde{N}_x, \quad (7)$$

$$M_{\xi\xi}^T(\xi, \tau) = \frac{L^4}{EJh} \tilde{M}_{xx}^T, \quad (8)$$

где нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным.

Предмет дальнейшего исследования состоит в параметрическом анализе нелинейной динамики системы (1)–(3). Важным предварительным этапом для решения этой задачи является нахождение распределения температуры в объеме микробалочного резонатора при рассматриваемых случаях термооптического воздействия.

3. Тепловая задача. 3.1. Общая постановка тепловой задачи. Нестационарное уравнение теплопроводности в рассматриваемой прямоугольной области $x \in [0; L]$, $z \in [-h/2; h/2]$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{k} Q(x, z, t), \quad (9)$$

где $\alpha = \frac{k}{\rho c}$ — температуропроводность; ρ — плотность; c — удельная теплоемкость материала; остальные обозначения представлены выше. Тепловые граничные условия для данной задачи приведены на рис. 1.

Конечной целью решения тепловой задачи, а именно — нахождение установившегося гармонического распределения температуры при заданной форме периодического лазерного воздействия, является определение температурных силовых и моментных факторов возбуждения механических колебаний резонатора.

Отметим, что в практически значимом случае термооптической генерации параметрических изгибных колебаний полное решение нестационарной тепловой задачи в объеме микробалки является излишним — достаточно найти распределение температурной осевой силы (4) по длине резонатора. Это может быть выполнено путем формулирования задачи непосредственно для функции $N^T(x, t)$ (знак \sim в обозначениях для размерных функций $\tilde{N}^T(x, t)$ и $\tilde{M}^T(x, t)$ в разделе 3 опускается).

Умножим уравнение (9) на $Eb\alpha_T$, проинтегрируем его по координате z от $-h/2$ до $h/2$ и получим

$$\frac{\partial^2 N^T}{\partial x^2} + Eb\alpha_T \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{-h/2}^{h/2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial N^T}{\partial t} = -\frac{Eb\alpha_T}{k} \tilde{Q}(x, t), \quad (10)$$

где $\tilde{Q}(x, t) = \int_{-h/2}^{h/2} Q(x, z, t) dz$.

С учетом граничных условий конвекции второе слагаемое в уравнении (10) может быть преобразовано к следующему виду:

$$Eb\alpha_T \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{-h/2}^{h/2} = -\frac{Eb\alpha_T h_1}{k} [T|_{h/2} + T|_{-h/2}] \cong -\frac{2Eb\alpha_T h_1}{k} \theta(x, t) = -\frac{2h_1}{hk} N^T. \quad (11)$$

Вышеприведенная цепочка выкладок содержит приближенное равенство, отражающее отождествление средней по толщине балки температуры с полусуммой значений температуры на нижней и верхней ее поверхностях.

Таким образом, уравнение для определения осевой температурной силы принимает вид

$$\frac{\partial^2 N^T}{\partial x^2} - m_T^2 N^T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial N^T}{\partial t} = F^T(x, t), \quad (12)$$

где $m_T^2 = \frac{2h_1}{hk}$, $F^T(x, t) = -\frac{Eb\alpha_T}{k} \tilde{Q}(x, t)$.

В рассматриваемом случае граничные условия для этой задачи имеют вид

$$N^T = 0, \quad x = 0, L. \quad (13)$$

3.2. Моделирование и анализ периодического лазерного воздействия.

Рассмотрим лазерное термооптическое воздействие в форме периодически генерируемых гауссовых импульсов, действующих на некоторую часть поверхности балочного элемента. Одиночный импульс моделируется объемным тепловыделением вида [42]

$$Q_G(x, z, t) = H(t) [H(l_2 - x) - H(l_1 - x)] \frac{R_a L_0}{\delta t_p^2} t \exp\left(-\frac{t}{t_p}\right) \exp\left(\frac{z - h/2}{\delta}\right), \quad (14)$$

где $H(\cdot)$ — функция Хевисайда; L_0 — интенсивность лазерного воздействия; R_0 — коэффициент поглощения энергии; t_p — длительность импульса; δ — глубина проникновения излучения в материал.

Обозначим через T_q, Ω период и частоту следования импульсов соответственно, $T_q = \frac{2\pi}{\Omega}$.

Пример получаемой таким образом последовательности лазерных импульсов показан на рис. 2.

Обозначим как $f(t)$ часть периодического теплового нагружения (14), характеризующую зависимость импульса от времени:

$$f(t) = \frac{1}{t_p^2} t \exp\left(-\frac{t}{t_p}\right). \quad (15)$$

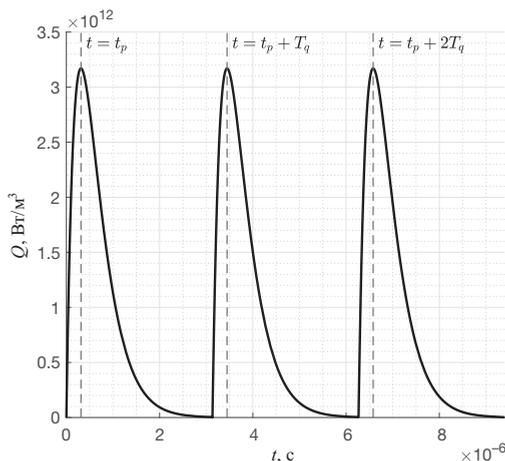


Рис. 2. Пример последовательности лазерных импульсов. Объемное тепловыделение у поверхности резонатора.

Выполним разложение периодического сигнала формы $f(t)$ в ряд Фурье:

$$F(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j \cos(j\Omega t) + b_j \sin(j\Omega t)] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j \exp(ij\Omega t), \quad (16)$$

где

$$a_j = \frac{2}{T_q} \int_0^{T_q} f(\tau) \cos(j\Omega\tau) d\tau, \\ b_j = \frac{2}{T_q} \int_0^{T_q} f(\tau) \sin(j\Omega\tau) d\tau, \quad (17)$$

$$c_j = \bar{c}_{-j} = \frac{1}{T_q} \int_0^{T_q} f(\tau) \exp(-ij\Omega\tau) d\tau = \frac{1}{2} (a_j - ib_j).$$

Явные выражения для коэффициентов разложения a_j, b_j имеют вид

$$a_j = -\frac{2T_q \exp(-T_q/t_p) [T_q^2 (t_p + T_q - t_p \exp(T_q/t_p)) - 4\pi^2 j^2 t_p^2 (t_p - T_q - t_p \exp(T_q/t_p))]}{t_p (T_q^2 + 4\pi^2 j^2 t_p^2)^2}, \\ b_j = -\frac{4\pi j T_q \exp(-T_q/t_p) [2T_q t_p + T_q^2 - 2T_q t_p \exp(T_q/t_p) + 4\pi^2 j^2 t_p^2]}{(T_q^2 + 4\pi^2 j^2 t_p^2)^2}. \quad (18)$$

Не зависящая от времени компонента воздействия, которой соответствует коэффициент разложения a_0 , приведет к появлению ненулевого статического распределения температуры в объеме резонатора; гармонические компоненты отвечают за характер установившегося периодического изменения температуры относительно статического распределения. Исследуя в дальнейшем характер резонансных колебаний балочного резонатора, мы будем учитывать в разложении (16) только статическую компоненту ($j = 0$) и гармонику с низшей частотой Ω ($j = 1$).

3.3. Нахождение установившегося гармонического распределения температуры. 3.3.1. *Статическая подзадача.* Статическая компонента установившегося распределения температуры в объеме резонатора $T_s(x, z; \Omega)$ определяется уравнением

$$\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} = -\frac{1}{k} Q_s(x, z; \Omega) \quad (19)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} T_s &= 0 \text{ at } x = 0, L; \\ \pm k \frac{\partial T_s}{\partial z} + h_1 T_s &= 0 \text{ at } z = \pm \frac{h}{2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Не зависящая от времени составляющая объемного тепловыделения $Q_s(x, z; \Omega)$ в соответствии с (14)–(18) имеет вид

$$Q_s(x, z; \Omega) = [H(l_2 - x) - H(l_1 - x)] \frac{R_a L_0 a_0}{2\delta} \exp\left(\frac{z - h/2}{\delta}\right). \quad (21)$$

Решение задачи (19)–(20) получим с использованием функции Грина для рассматриваемой комбинации граничных условий:

$$T_s(x, z; \Omega) = \frac{1}{k} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_{X_{11}Z_{33}}^s(x, z|x', z') Q_s(x', z'; \Omega) dz' dx', \quad (22)$$

где в обозначениях [43] функция Грина имеет вид

$$G_{X_{11}Z_{33}}^s(x, z|x', z') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Z_m(z)Z_m(z')}{N_m^z} P_m^s(x, x'). \quad (23)$$

Координатные функции $Z_m(z)$ имеют вид

$$Z_m(z) = B \sin\left(\frac{\beta_m(z + h/2)}{h}\right) + \beta_m \cos\left(\frac{\beta_m(z + h/2)}{h}\right), \quad (24)$$

где $B = \frac{h_1 h}{k}$, а β_m являются корнями трансцендентного уравнения

$$\tan(\beta_m) = \frac{2\beta_m B}{\beta_m^2 - B^2}. \quad (25)$$

Нормировочные коэффициенты N_m^z определяются выражением

$$N_m^z = h \left(\frac{1}{2} (B^2 + \beta_m^2) + \frac{\tan(\beta_m)}{1 + \tan^2(\beta_m)} \left\{ \frac{1}{2\beta_m} (\beta_m^2 - B^2) + B \tan(\beta_m) \right\} \right). \quad (26)$$

Координатные функции $P_m^s(x, x')$ имеют вид

$$P_m^s(x, x') = \frac{e^{-\sigma_m(2L - |x - x'|)} - e^{-\sigma_m(2L - x - x')} + e^{-\sigma_m|x - x'|} - e^{-\sigma_m(x + x')}}{2\sigma_m(1 - e^{-2\sigma_m L})}, \quad (27)$$

где $\sigma_m = \beta_m/h$.

Как отмечено выше в разделе 3.1, распределение статической компоненты температурных осевых усилий по длине балки $N^{TS}(x; \Omega)$ может быть найдено непосредственно из решения краевой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N^{TS}}{\partial x^2} - m_T^2 N^{TS} &= F^{TS}(x; \Omega), \\ N^{TS} &= 0 \text{ at } x = 0, L, \end{aligned} \quad (28)$$

где $F^{TS}(x; \Omega) = -\frac{Eb\alpha_T}{k} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_s(x, z; \Omega) dz$.

Решение может быть представлено как

$$N^{TS}(x; \Omega) = - \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_{X11}^{ms}(x|x') F^{TS}(x'; \Omega) dx', \quad (29)$$

где функция Грина G_{X11}^{ms} определяется выражением

$$G_{X11}^{ms}(x, x') = \frac{e^{-m_T(2L-|x-x'|)} - e^{-m_T(2L-x-x')} + e^{-m_T|x-x'|} - e^{-m_T(x+x')}}{2m_T(1 - e^{-2m_T L})}. \quad (30)$$

3.3.2. Гармоническая подзадача. Установившееся гармоническое распределение температуры в объеме резонатора $T_d(x, z, t; \Omega)$ в указанных выше предположениях определяется гармоническим решением уравнения

$$\frac{\partial^2 T_d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_d}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T_d}{\partial t} = -\frac{1}{k} Q_d(x, z, t; \Omega), \quad (31)$$

где учитываемая нижняя гармоника лазерного воздействия Q_d описывается выражением

$$Q_d(x, z, t; \Omega) = [H(l_2 - x) - H(l_1 - x)] \frac{R_a L_0}{\delta} [a_1 \cos(\Omega t) + b_1 \sin(\Omega t)] e^{\frac{z-h/2}{\delta}}. \quad (32)$$

Граничные условия имеют вид, аналогичный (20).

В комплексной форме гармоническая задача может быть переформулирована следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}_d}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}_d}{\partial z^2} - \sigma^2 \tilde{T}_d = -\frac{1}{k} \tilde{Q}_d, \quad (33)$$

где $\sigma^2 = i\Omega/\alpha$ и

$$\tilde{Q}_d = [H(l_2 - x) - H(l_1 - x)] \frac{R_a L_0}{\delta} e^{\frac{z-h/2}{\delta}} (a_1 - ib_1). \quad (34)$$

Физическое распределение температуры при этом представляется как

$$T_d(x, z, t; \Omega) = \text{Re} \left\{ \tilde{T}_d(x, z; \Omega) e^{i\Omega t} \right\} = T_d^{amp} \cos(\Omega t + T_d^{phase}), \quad (35)$$

где амплитуда и сдвиг фазы гармонического изменения температуры определяются выражениями

$$T_d^{amp}(x, z; \Omega) = \sqrt{\tilde{T}_d \tilde{T}_d^*}, \quad T_d^{phase}(x, z; \Omega) = \text{atan} \left(\frac{\text{Im} \tilde{T}_d}{\text{Re} \tilde{T}_d} \right). \quad (36)$$

Решение гармонической задачи (33)–(34) с помощью функции Грина может быть представлено следующим образом [43]:

$$\tilde{T}_d(x, z, \Omega) = \frac{\alpha}{k} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_{X_{11}Z_{33}}^d(x, z|x', z'; \Omega) \tilde{Q}_d(x', z'; \Omega) dz' dx'. \quad (37)$$

Здесь функция Грина $G_{X_{11}Z_{33}}^d(x, z|x', z'; \Omega)$ имеет вид (23) с заменой в функциях $P_m^s(x, x')$ параметров σ_m на $\nu_m = \sqrt{\sigma^2 + \beta_m^2/h^2}$.

Распределение гармонической компоненты температурных осевых усилий по длине балки $N^{TD}(x; \Omega)$ может быть найдено непосредственно из решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{N}^{TD}}{\partial x^2} - (m_T^2 + \sigma^2) \tilde{N}^{TD} &= \tilde{F}^{TD}(x; \Omega), \\ \tilde{N}^{TD} &= 0 \text{ at } x = 0, L, \end{aligned} \quad (38)$$

где $\tilde{F}^{TD}(x; \Omega) = -\frac{Eb\alpha_T}{k} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tilde{Q}_d(x, z; \Omega) dz$. При этом

$$N^{TD}(x, t; \Omega) = \text{Re} \left\{ \tilde{N}^{TD}(x; \Omega) e^{i\Omega t} \right\}. \quad (39)$$

Решение краевой задачи (38) может быть представлено как

$$\tilde{N}^{TD}(x; \Omega) = - \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_{X_{11}}^{md}(x|x') \tilde{F}^{TD}(x; \Omega) dx', \quad (40)$$

где функция Грина $G_{X_{11}}^{md}$ имеет вид (30) с заменой m_T на $\nu = \sqrt{m_T^2 + \sigma^2}$.

3.4. Определение температурных силовых и моментных факторов воздействия на микробалку. Итак, установившееся гармоническое распределение температуры в объеме резонатора имеет вид

$$T(x, z, t; \Omega) = T_s(x, z; \Omega) + T_d^{amp}(x, z; \Omega) \cos \left[\Omega t + T_d^{phase}(x, z; \Omega) \right]. \quad (41)$$

В соответствии с (4)–(5) температурная осевая сила и температурный изгибающий момент могут быть записаны как

$$N^T(x, t; \Omega) = N^{TS}(x; \Omega) + N^{TD}(x, t; \Omega), \quad (42)$$

$$M^T(x, t; \Omega) = M^{TS}(x; \Omega) + M^{TD}(x, t; \Omega), \quad (43)$$

где статические N^{TS}, M^{TS} и динамические N^{TD}, M^{TD} компоненты теплового воздействия имеют вид

$$N^{TS}(x; \Omega) = Eb\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_s(x, z; \Omega) dz, \quad (44)$$

$$M^{TS}(x; \Omega) = Eb\alpha_T \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z T_s(x, z; \Omega) dz, \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
N^{TD}(x, t; \Omega) &= Eb\alpha_T \int_{-\frac{\hbar}{2}}^{\frac{\hbar}{2}} T_d^{amp}(x, z; \Omega) \cos \left[T_d^{phase}(x, z; \Omega) \right] dz \cdot \cos(\Omega t) - \\
&\quad - Eb\alpha_T \int_{-\frac{\hbar}{2}}^{\frac{\hbar}{2}} T_d^{amp}(x, z; \Omega) \sin \left[T_d^{phase}(x, z; \Omega) \right] dz \cdot \sin(\Omega t),
\end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
M^{TD}(x, t; \Omega) &= Eb\alpha_T \int_{-\frac{\hbar}{2}}^{\frac{\hbar}{2}} z T_d^{amp}(x, z; \Omega) \cos \left[T_d^{phase}(x, z; \Omega) \right] dz \cdot \cos(\Omega t) - \\
&\quad - Eb\alpha_T \int_{-\frac{\hbar}{2}}^{\frac{\hbar}{2}} z T_d^{amp}(x, z; \Omega) \sin \left[T_d^{phase}(x, z; \Omega) \right] dz \cdot \sin(\Omega t).
\end{aligned} \tag{47}$$

Подчеркнем, что приведенные выше выражения для температурных осевых усилий (44), (46) в случае достаточно тонких балок могут быть эффективно аппроксимированы более простыми выражениями (29), (39).

4. Механическая задача. 4.1. Построение приближенного аналитического решения. Полученное решение тепловой задачи позволяет перейти к исследованию нелинейной динамики резонатора.

С использованием введенных обозначений уравнения (1)–(2) продольно-изгибных колебаний резонатора в безразмерной форме примут вид

$$u'' + 12\beta w'w'' = 12\beta^2 \ddot{u} + N_\xi^{TS}(x; \Omega) + N_\xi^{TD}(x, \tau; \Omega), \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
w^{IV} + \ddot{w} + [N^{TS}(\xi; \Omega) + N^{TD}(\xi, \tau; \Omega)] w'' &= \\
= -M_{\xi\xi}^{TS}(\xi; \Omega) - M_{\xi\xi}^{TD}(\xi, \tau; \Omega) + \frac{1}{\beta} u'w'' + 6(w')^2 w'' + 12\beta \dot{u}w',
\end{aligned} \tag{49}$$

где учтены соотношения (6)–(8).

В работе [41] был выполнен качественный анализ процессов нелинейного модального взаимодействия между продольными и изгибными колебаниями в системе, описываемой уравнениями (48)–(49), без конкретизации вида температурных факторов, соответствующих рассматриваемым сценариям лазерного воздействия. Отметим здесь лишь основные положения применяемой аналитической методики.

Для исследования нелинейной динамики системы (48)–(49) применяется процедура Галёркина по рассматриваемым формам продольных и изгибных колебаний:

$$u(\xi, \tau) = \phi_n(\xi) U_n(\tau), \quad w(\xi, \tau) = \psi_l(\xi) W_l(\tau), \tag{50}$$

где n и l – номера форм продольных и поперечных колебаний, находящихся в условиях внутреннего субкратного резонанса 1 : 2. Ограничения на значения этих параметров, обусловленные применением механической модели балки Бернулли – Эйлера, обсуждаются в вышеупомянутой статье [41].

Изучая сценарий параметрического возбуждения, пренебрежем в уравнении (49) моментными температурными факторами $M_{\xi\xi}^{TS}(\xi; \Omega)$ и $M_{\xi\xi}^{TD}(\xi, \tau; \Omega)$.

С учетом условий нормировки

$$\int_0^1 \phi_n^2 d\xi = \int_0^1 \psi_l^2 d\xi = 1 \tag{51}$$

редуцированные уравнения продольно-изгибных колебаний стержня примут вид

$$\ddot{U}_n + \bar{\omega}_n^2 U_n = \frac{A_1}{\beta} W_l^2 + \frac{1}{12\beta^2} [F_u^S(\Omega) + F_u^D(\tau; \Omega)], \quad (52)$$

$$\ddot{W}_l + [\omega_l^2 + k_w^S(\Omega) + k_w^D(\tau; \Omega)] W_l = \frac{B_1}{\beta} U_n W_l + 6B_2 W_l^3 + 12B_3 \beta \ddot{U}_n W_l, \quad (53)$$

где

$$A_1 = \int_0^1 \psi_l' \psi_l'' \phi_n d\xi, \quad B_1 = \int_0^1 \psi_l \psi_l'' \phi_n' d\xi, \quad B_2 = \int_0^1 \psi_l \psi_l'^2 \psi_l'' d\xi, \quad B_3 = \int_0^1 \psi_l \psi_l' \phi_n d\xi, \quad (54)$$

$$F_u^S(\Omega) = - \int_0^1 N_\xi^{TS}(\xi; \Omega) \phi_n d\xi, \quad F_u^D(\tau; \Omega) = - \int_0^1 N_\xi^{TD}(\xi, \tau; \Omega) \phi_n d\xi, \quad (55)$$

$$k_w^S(\Omega) = \int_0^1 N^{TS}(\xi; \Omega) \psi_l \psi_l'' d\xi, \quad k_w^D(t; \Omega) = \int_0^1 N^{TD}(\xi, \tau; \Omega) \psi_l \psi_l'' d\xi. \quad (56)$$

Представим решение уравнения (52) в виде

$$U_n = U_n^S + U_n^{(d)}(\tau), \quad (57)$$

где статическое деформированное состояние стержня в продольном направлении U_n^S находится из соотношения

$$\bar{\omega}_n^2 U_n^S(\Omega) = \frac{1}{12\beta^2} F_u^S(\Omega). \quad (58)$$

Обозначим в дальнейшем $U_n^{(d)} \equiv U_n$. Система (52)–(53) примет вид

$$\ddot{U}_n + 2\bar{\omega}_n \xi_u \dot{U}_n + \bar{\omega}_n^2 U_n = \frac{A_1}{\beta} W_l^2 + \frac{1}{12\beta^2} [f_u^{\cos}(\Omega) \cos(\Omega\tau) + f_u^{\sin}(\Omega) \sin(\Omega\tau)], \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \ddot{W}_l + 2\omega_l \xi_w \dot{W}_l + \left[\omega_l^2 + k_w^S(\Omega) - \frac{B_1}{\beta} U_n^{(s)}(\Omega) + f_w^{\cos}(\Omega) \cos(\Omega\tau) + f_w^{\sin}(\Omega) \sin(\Omega\tau) \right] W_l = \\ = \frac{B_1}{\beta} U_n W_l + 6B_2 W_l^3 + 12B_3 \beta \ddot{U}_n W_l. \end{aligned} \quad (60)$$

В системе (59)–(60) учитывается наличие линейного вязкого трения с коэффициентами относительного затухания ξ_u, ξ_w ; параметры $f_u^{\cos}(\Omega), f_u^{\sin}(\Omega)$ и $f_w^{\cos}(\Omega), f_w^{\sin}(\Omega)$ характеризуют амплитуды синус- и косинус-гармоник функций $F_u^D(\tau; \Omega)$ и $k_w^D(\tau; \Omega)$ соответственно. Числовые значения всех приведенных параметров теплового воздействия определяются на основе полученного решения температурной задачи (см. раздел 3).

В конкретном рассматриваемом случае главного параметрического резонанса

$$\Omega = 2\omega_l + \sigma_\Omega, \quad (61)$$

где σ_Ω — частотная расстройка лазерного излучения по отношению к удвоенной частоте изгибных колебаний резонатора.

Для построения приближенного аналитического решения нелинейной системы (59)–(60) применяется асимптотический метод многих масштабов. Общий вид решения для медленно эволюционирующих амплитудно-фазовых переменных системы был получен в работе [41]. В принятых обозначениях нулевое асимптотическое приближение имеет вид

$$\begin{aligned} U_{0n} &= A_u(\tau_1, \tau_2) e^{i\bar{\omega}_n \tau_0} + \bar{A}_u(\tau_1, \tau_2) e^{-i\bar{\omega}_n \tau_0}, \\ W_{0l} &= A_w(\tau_1, \tau_2) e^{i\omega_l \tau_0} + \bar{A}_w(\tau_1, \tau_2) e^{-i\omega_l \tau_0}, \end{aligned} \quad (62)$$

где комплексные амплитуды колебаний могут быть записаны как

$$A_{u,w}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} a_{u,w}(\tau_1, \tau_2) e^{i\beta_{u,w}(\tau_1, \tau_2)}. \quad (63)$$

Здесь $a_{u,w}$ и $\beta_{u,w}$ — подлежащие определению амплитуды и сдвиги фаз колебаний как функции медленных переменных τ_1, τ_2 ($\tau_k = \varepsilon^k \tau$ — различные масштабы времени).

Условия отсутствия секулярных слагаемых в решениях уравнений для старших приближений позволяют записать систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно величин a_u, a_w, χ_u, χ_w :

$$\begin{aligned} 24\beta^2 \bar{\omega}_n \frac{da_u}{d\tau} &= 6A_1 \beta a_w^2 \sin(\chi_w) - 24\beta^2 \bar{\omega}_n^2 \xi_u a_u - f_u^{\sin} \cos(\chi_u) + f_u^{\cos} \sin(\chi_u), \\ 4\beta \omega_l \frac{da_w}{d\tau} &= -a_w (\beta f_w^{\cos} \sin(\chi_u - \chi_w) - \beta f_w^{\sin} \cos(\chi_u - \chi_w) + B_1 a_u \sin(\chi_w) + \\ &\quad + 4\beta \xi_w \omega_l^2 - 12B_3 \beta^2 \bar{\omega}_n^2 a_u \sin(\chi_w)), \\ 24\beta^2 \bar{\omega}_n a_u \frac{d\chi_u}{d\tau} &= 24\beta^2 \bar{\omega}_n (\sigma_\Omega + \sigma_\omega) a_u + 6A_1 \beta a_w^2 \cos(\chi_w) + f_u^{\cos} \cos(\chi_u) + f_u^{\sin} \sin(\chi_u), \\ 24\beta^2 \omega_l^3 \bar{\omega}_n a_u \frac{d\chi_w}{d\tau} &= \omega_l^3 f_u^{\cos} \cos(\chi_u) + \omega_l^3 f_u^{\sin} \sin(\chi_u) - 6B_1^2 \bar{\omega}_n (U_n^{(s)})^2 a_u - \\ &\quad - 6\beta^2 \bar{\omega}_n (k_w^S)^2 a_u + 24\beta^2 \omega_l^2 \bar{\omega}_n (k_w^S + \omega_l \sigma_\omega) a_u + 6A_1 \beta \omega_l^3 a_w^2 \cos(\chi_w) + \\ &\quad + 12\beta^2 \omega_l^2 \bar{\omega}_n a_u (f_w^{\cos} \cos(\chi_u - \chi_w) + f_w^{\sin} \sin(\chi_u - \chi_w)) + \\ &\quad + 144B_3 \beta^3 \omega_l^2 \bar{\omega}_n^3 a_u^2 \cos(\chi_w) + 12B_1 \beta \bar{\omega}_n U_n^{(s)} (k_w^S - 2\omega_l^2) a_u - \\ &\quad - 108B_2 \beta^2 \omega_l^2 \bar{\omega}_n a_u a_w^2 - 12B_1 \beta \omega_l^2 \bar{\omega}_n a_u^2 \cos(\chi_w), \end{aligned} \quad (64)$$

где модифицированные фазовые переменные χ_u, χ_w связаны с β_u, β_w соотношениями

$$\begin{aligned} \chi_u &= -\beta_u + (\sigma_\Omega + \sigma_\omega) \tau, \\ \chi_w &= 2\beta_w - \beta_u + \sigma_\omega \tau. \end{aligned} \quad (65)$$

Стационарным колебательным режимам термооптически возбуждаемого микрорезонатора соответствуют особые точки автономной динамической системы (64). Качественному исследованию динамики этой системы с учетом конкретных характеристик лазерного воздействия, найденных в разделе 3, посвящена вторая часть настоящей работы.

5. Заключение. В настоящей статье представлена односторонне связанная термоупругая модель механически нелинейных колебаний микробалочного резонатора

при гармоническом лазерном термооптическом воздействии. Найдено аналитическое решение задачи теплопроводности для установившегося гармонического распределения температуры в объеме резонатора. Определены статические и динамические компоненты силовых факторов температурной природы — температурных осевой силы и изгибающего момента. С помощью метода Галёркина выполнена дискретизация нелинейных связанных уравнений в частных производных, описывающих продольно-изгибные колебания резонатора. С применением асимптотического метода многих масштабов получено приближенное аналитическое решение для задачи нелинейной динамики системы в условиях главного параметрического резонанса.

Литература

1. Vorobyev R. I., Sergeichev I. V., Karabutov A. A., Mironova E. A., Savateeva E. V., Akhatov I. Sh. Application of the Optoacoustic Method to Assess the Effect of Voids on the Crack Resistance of Structural Carbon Plastics. *Acoust. Phys.* **66**, 132–136 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1063771020020153>
2. Yan G., Raetz S., Chigarev N., Blondeau Ja., Gusev V. E., Tournat V. Cumulative fatigue damage in thin aluminum films evaluated non-destructively with lasers via zero-group-velocity Lamb modes. *NDT & E International* **116**, 102323 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2020.102323>
3. Pan Yu., Rossignol C., Audoin B. Acoustic waves generated by a laser line pulse in cylinders; Application to the elastic constants measurement. *J. Acoust. Soc. Am.* **115** (4), 1537–1545 (2004). <https://doi.org/10.1121/1.1651191>
4. Chow G., Uchaker E., Cao G., Wang Ju. Laser-induced surface acoustic wave: An alternative method to nanoindentation for the mechanical characterization of porous nanostructured thin film electrode media. *Mechanics of Materials* **91**, 333–342 (2015). <https://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2015.10.005>
5. Champion A., Bellouard Y. Direct volume variation measurements in fused silica specimens exposed to femtosecond laser. *Optical Materials Express* **2**, 789–798 (2012). <https://doi.org/10.1364/OME.2.000789>
6. Otsuka P. H., Mezil S., Matsuda O., Tomoda M., Maznev A. A., Gan T., Fang N., Boechler N., Gusev V. E., Wright O. B. Time-domain imaging of gigahertz surface waves on an acoustic metamaterial. *New Journal of Physics* **20**, 013026 (2018). <https://doi.org/10.1088/1367-2630/AA9298>
7. Li C., Guan G., Zhang F., Nabi G., Wang R. K., Huang Z. Laser induced surface acoustic wave combined with phase sensitive optical coherence tomography for superficial tissue characterization: a solution for practical application. *Biomedical Optics Express* **5** (5), 1403–1418 (2014). <https://doi.org/10.1364/BOE.5.001403>
8. Phinney L. M., Klody K. A., Sackos Jo. T., Walraven Je. A. Damage of MEMS thermal actuators heated by laser irradiation. *Reliability, Packaging, Testing and Characterization of MEMS/MOEMS IV. Proceedings of MOEMS-MEMS Micro and Nanofabrication*, 2005, San Jose, California, United States, 5716, 81–88 (2005). <https://doi.org/10.1117/12.594408>
9. Serrano J. R., Phinney L. M. Displacement and Thermal Performance of Laser-Heated Asymmetric MEMS Actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems* **17** (1), 166–174 (2008). <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2007.911945>
10. Mai A., Bunce C., Hübner R., Pahner D., Dauderstädt U. A. In situ bow change of Al-alloy MEMS micromirrors during 248-nm laser irradiation. *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS and MOEMS* **15** (3), 035502 (2016). <https://doi.org/10.1117/1.JMM.15.3.035502>
11. Zook J. D., Burns D. W., Herb W. R., Guckel H., Kang J. W., Ahn Y. Optically excited self-resonant microbeams. *Sensors and Actuators A: Physical* **52** (1), 92–98 (1996). [https://doi.org/10.1016/0924-4247\(96\)80131-2](https://doi.org/10.1016/0924-4247(96)80131-2)
12. Yang T., Bellouard Y. Laser-induced transition between nonlinear and linear resonant behaviors of a micromechanical oscillator. *Phys. Rev. Applied* **7**, 064002 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.7.064002>
13. Dolleman R. J., Hourri S., Chandrashekar A., Alijani F., van der Zant H. S. J., Steeneken P. G. Opto-thermally excited multimode parametric resonance in graphene membranes. *Sci. Rep.* **8**, 9366 (2018). <https://doi.org/10.1038/s41598-018-27561-4>
14. Zehnder A. T., Rand R. H., Krylov S. Locking of electrostatically coupled thermo-optically driven MEMS limit cycle oscillators. *International Journal of Non-linear Mechanics* **102**, 92–100 (2018). <https://doi.org/10.1016/J.IJNONLINMEC.2018.03.009>

15. Bhaskar A., Shayak B., Rand R. H., Zehnder A. T. Synchronization characteristics of an array of coupled MEMS limit cycle oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **128**, 103634 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103634>
16. Morozov N. F., Tovstik P. E. Dynamic loss of stability of a rod under longitudinal load lower than the Eulerian load. *Dokl. Phys.* **58**, 510–513 (2013). <https://doi.org/10.1134/S102833581311013X>
17. Carvalho E. C., Goncalves P. B., Rega G. Multiple internal resonances and nonplanar dynamics of a cruciform beam with low torsional stiffness. *International Journal of Solids and Structures* **121**, 117–134 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.05.020>
18. Ribeiro E. A. R., Lenci S., Mazzilli C. E. N. Modal localisation in a beam modelled as a continuous system: A discussion on the use of auxiliary oscillators. *Journal of Sound and Vibration* **485**, 115595 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115595>
19. Lenci S. Isochronous beams by an inclined Roller Support. *Journal of Applied Mechanics* **85** (9), 091008 (2018). <https://doi.org/10.1115/1.4040453>
20. Lacarbonara W., Rega G., Nayfeh A. H. Resonant nonlinear normal modes. Part I: analytical treatment for structural one-dimensional systems. *Int. J. Non-Linear Mech.* **38** (6), 851–872 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(02\)00033-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00033-1)
21. Manevitch L. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains. *Arch. Appl. Mech.* **77**, 301–312 (2007). <https://doi.org/10.1007/s00419-006-0081-1>
22. Kambali P. N., Pandey A. K. Nonlinear coupling of transverse modes of a fixed-fixed microbeam under direct and parametric excitation. *Nonlinear Dynamics* **87**, 1271–1294 (2017). <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3114-5>
23. Clementi F., Lenci S., Rega G. 1 : 1 internal resonance in a two d.o.f. complete system: a comprehensive analysis and its possible exploitation for design. *Meccanica* **55**, 1309–1332 (2020). <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01171-9>
24. Ruzziconi L., Jaber N., Kosuru L., Bellaredj M. L., Younis M. I. Experimental and theoretical investigation of the 2 : 1 internal resonance in the higher-order modes of a MEMS microbeam at elevated excitations. *Journal of Sound and Vibration* **499**, 115983 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.115983>
25. Leamy M. J., Gottlieb O. Internal resonances in whirling strings involving longitudinal dynamics and material non-linearities. *Journal of Sound and Vibration* **236**, 683–703 (2000). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3039>
26. Kovruguine D. A., Maugin G. A., Potapov A. I. Multiwave nonlinear couplings in elastic structures. Part I. One-dimensional examples. *International Journal of Solids and Structures* **39**, 5571–5583 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00365-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00365-7)
27. Kovruguine D. A., Maugin G. A., Potapov A. I. Multiwave non-linear couplings in elastic structures. Part II: Two-dimensional example. *Journal of Sound and Vibration* **263** (5), 1055–1069 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00274-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00274-8)
28. Srinil N., Rega G. Nonlinear longitudinal/transversal modal interactions in highly extensible suspended cables. *Journal of Sound and Vibration* **310**, 230–242 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.07.056>
29. Yang X.-D., Zhang W. Nonlinear dynamics of axially moving beam with coupled longitudinal-transversal vibrations. *Nonlinear Dynamics* **78**, 2547–2556 (2014). <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1609-5>
30. Беляев А. К., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П. Устойчивость гибкого вертикального стержня на вибрирующем основании. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5** (63), вып. 3, 477–488 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.311>
31. Беляев А. К., Ма Ч.-Ч., Морозов Н. Ф., Товстик П. Е., Товстик Т. П., Шурпапов А. О. Динамика стержня при продольном ударе телом. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (62), вып. 3, 506–515 (2017).
32. Saetta E., Settini V., Rega G. Minimal thermal modeling of two-way thermomechanically coupled plates for nonlinear dynamics investigation. *Journal of Thermal Stresses* **43** (3), 345–371 (2020). <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1704669>
33. Indeitsev D. A., Osipova E. V. A Two-temperature model of optical excitation of acoustic waves in conductors. *Dokl. Phys.* **62** (3), 136–140 (2017). <https://doi.org/10.1134/S1028335817030065>
34. Sun Y., Liu S., Rao Z., Li Y., Yang J. Thermodynamic response of beams on Winkler foundation irradiated by moving laser pulses. *Symmetry* **10** (8), 328 (2018). <https://doi.org/10.3390/sym10080328>
35. Wen C., Tang L., Yang G. Buckling and post-buckling of pinned Euler beams on weakened Winkler foundation under thermal loading. *Journal of Thermal Stresses* **43** (5), 529–542 (2020). <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1734128>

36. Gu B., He T. Investigation of thermoelastic wave propagation in Euler—Bernoulli Beam via nonlocal strain gradient elasticity and G-N Theory. *Journal of Vibration Engineering & Technologies* **9** (5), 715–724 (2021). <https://doi.org/10.1007/s42417-020-00277-4>
37. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Shtukin L. V. Stability of the Bernoulli—Euler Beam in coupled electric and thermal fields. *Dokl. Phys.* **63**, 342–347 (2018). <https://doi.org/10.1134/S1028335818080086>
38. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Semenov B. N., Shtukin L. V. Bernoulli—Euler beam under action of a moving thermal source: characteristics of the dynamic behavior. *Dokl. Phys.* **64**, 185–188 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1028335819040050>
39. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Shtukin L. V. Stability of the Bernoulli—Euler Beam under the action of a moving thermal source. *Dokl. Phys.* **65**, 67–71 (2020). <https://doi.org/10.1134/S102833582002007X>
40. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. Nonlinear interaction of longitudinal and transverse vibrations of a rod at an internal combinational resonance in view of opto-thermal excitation of N/MEMS. *Journal of Sound and Vibration* **509**, 116247 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116247>
41. Морозов Н. Ф., Индейцев Д. А., Лукин А. В., Попов И. А., Штукин Л. В. Нелинейное модальное взаимодействие продольных и изгибных колебаний балочного резонатора при периодическом тепловом нагружении. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 2, 317–337 (2022). <https://doi.org/21638/spbu01.2022.212>
42. Tang D. W., Araki N. Wavy, wavelike, diffusive thermal responses of finite rigid slabs to high-speed heating of laser-pulses. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **42**, 855–860 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(98\)00244-0](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00244-0)
43. Cole K., Beck J., Haji-Sheikh A., Litkouhi B. *Heat Conduction Using Green's Functions*. Taylor & Francis (2011).

Статья поступила в редакцию 28 июля 2022 г.;
доработана 7 октября 2022 г.;
рекомендована к печати 17 ноября 2022 г.

Контактная информация:

Морозов Никита Федорович — д-р физ.-мат. наук, проф.; n.morozov@spbu.ru
Индейцев Дмитрий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, проф. (1948–2022)
Лукин Алексей Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доц.; lukin_av@spbstu.ru
Попов Иван Алексеевич — ведущий инженер; popov_ia@spbstu.ru
Штукин Лев Васильевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; lvtvsh4749@gmail.com

On opto-thermally excited parametric oscillations of microbeam resonators. I*

N. F. Morozov^{1,2}, *D. A. Indeitsev*^{† 2,3}, *A. V. Lukin*³, *I. A. Popov*³, *L. V. Shtukin*^{2,3}

¹ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

² Institute for Problems of Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61, Bolshoi pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

³ Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, ul. Politekhniceskaya, St. Petersburg, 195251, Russian Federation

For citation: Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. On opto-thermally excited parametric oscillations of microbeam resonators. I. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 315–333. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.212> (In Russian)

The present article is the first part of the work devoted to investigation of the nonlinear dynamics of parametrically excited flexural vibrations of a clamped-clamped microbeam — the basic sensitive element of a promising class of microsensors of various physical quantities — under laser thermo-optical action in the form of periodically generated pulses acting

*This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-01-00537).

on a certain part of the surface of the beam element. An analytical solution of the heat transfer problem is found for the steady harmonic distribution of temperature in the volume of the resonator. The static and dynamic components of temperature-induced axial force and bending moment are determined. Using the Galerkin method, the discretization of nonlinear coupled partial differential equations describing the longitudinal-flexural oscillations of the resonator is performed. Using the asymptotic method of multiple time-scales, an approximate analytical solution is obtained for the nonlinear dynamics problem under the conditions of primary parametric resonance.

Keywords: nonlinear dynamics, parametric oscillations, Bernoulli—Euler beam, modal interaction, laser-induced opto-thermal excitation.

References

1. Vorobyev R. I., Sergeichev I. V., Karabutov A. A., Mironova E. A., Savateeva E. V., Akhatov I. Sh. Application of the Optoacoustic Method to Assess the Effect of Voids on the Crack Resistance of Structural Carbon Plastics. *Acoust. Phys.* **66**, 132–136 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1063771020020153>
2. Yan G., Raetz S., Chigarev N., Blondeau Ja., Gusev V. E., Tournat V. Cumulative fatigue damage in thin aluminum films evaluated non-destructively with lasers via zero-group-velocity Lamb modes. *NDT & E International* **116**, 102323 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2020.102323>
3. Pan Yu., Rossignol C., Audoin B. Acoustic waves generated by a laser line pulse in cylinders; Application to the elastic constants measurement. *J. Acoust. Soc. Am.* **115** (4), 1537–1545 (2004). <https://doi.org/10.1121/1.1651191>
4. Chow G., Uchaker E., Cao G., Wang Ju. Laser-induced surface acoustic waves: An alternative method to nanoindentation for the mechanical characterization of porous nanostructured thin film electrode media. *Mechanics of Materials* **91**, 333–342 (2015). <https://doi.org/10.1016/J.MECHMAT.2015.10.005>
5. Champion A., Bellouard Y. Direct volume variation measurements in fused silica specimens exposed to femtosecond laser. *Optical Materials Express* **2**, 789–798 (2012). <https://doi.org/10.1364/OME.2.000789>
6. Otsuka P. H., Mezil S., Matsuda O., Tomoda M., Maznev A. A., Gan T., Fang N., Boechler N., Gusev V. E., Wright O. B. Time-domain imaging of gigahertz surface waves on an acoustic metamaterial. *New Journal of Physics* **20**, 013026 (2018). <https://doi.org/10.1088/1367-2630/AA9298>
7. Li C., Guan G., Zhang F., Nabi G., Wang R. K., Huang Z. Laser induced surface acoustic wave combined with phase sensitive optical coherence tomography for superficial tissue characterization: a solution for practical application. *Biomedical Optics Express* **5** (5), 1403–1418 (2014). <https://doi.org/10.1364/BOE.5.001403>
8. Phinney L. M., Klody K. A., Sackos Jo. T., Walraven Je. A. Damage of MEMS thermal actuators heated by laser irradiation. *Reliability, Packaging, Testing and Characterization of MEMS/MOEMS IV. Proceedings of MOEMS-MEMS Micro and Nanofabrication*, 2005, San Jose, California, United States, 5716, 81–88 (2005). <https://doi.org/10.1117/12.594408>
9. Serrano J. R., Phinney L. M. Displacement and Thermal Performance of Laser-Heated Asymmetric MEMS Actuators. *Journal of Microelectromechanical Systems* **17** (1), 166–174 (2008). <https://doi.org/10.1109/JMEMS.2007.911945>
10. Mai A., Bunce C., Hübner R., Pahner D., Dauderstädt U. A. In situ bow change of Al-alloy MEMS micromirrors during 248-nm laser irradiation. *Journal of Micro/Nanolithography, MEMS and MOEMS* **15** (3), 035502 (2016). <https://doi.org/10.1117/1.JMM.15.3.035502>
11. Zook J. D., Burns D. W., Herb W. R., Guckel H., Kang J. W., Ahn Y. Optically excited self-resonant microbeams. *Sensors and Actuators A: Physical* **52** (1), 92–98 (1996). [https://doi.org/10.1016/0924-4247\(96\)80131-2](https://doi.org/10.1016/0924-4247(96)80131-2)
12. Yang T., Bellouard Y. Laser-induced transition between nonlinear and linear resonant behaviors of a micromechanical oscillator. *Phys. Rev. Applied* **7**, 064002 (2017). <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.7.064002>
13. Dolleman R. J., Houry S., Chandrashekar A., Alijani F., van der Zant H. S. J., Steeneken P. G. Opto-thermally excited multimode parametric resonance in graphene membranes. *Sci. Rep.* **8**, 9366 (2018). <https://doi.org/10.1038/s41598-018-27561-4>
14. Zehnder A. T., Rand R. H., Krylov S. Locking of electrostatically coupled thermo-optically driven MEMS limit cycle oscillators. *International Journal of Non-linear Mechanics* **102**, 92–100 (2018). <https://doi.org/10.1016/J.IJNONLINMEC.2018.03.009>

15. Bhaskar A., Shayak B., Rand R. H., Zehnder A. T. Synchronization characteristics of an array of coupled MEMS limit cycle oscillators. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **128**, 103634 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2020.103634>
16. Morozov N. F., Tovstik P. E. Dynamic loss of stability of a rod under longitudinal load lower than the Eulerian load. *Dokl. Phys.* **58**, 510–513 (2013). <https://doi.org/10.1134/S102833581311013X>
17. Carvalho E. C., Goncalves P. B., Rega G. Multiple internal resonances and nonplanar dynamics of a cruciform beam with low torsional stiffness. *International Journal of Solids and Structures* **121**, 117–134 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.05.020>
18. Ribeiro E. A. R., Lenci S., Mazzilli C. E. N. Modal localisation in a beam modelled as a continuous system: A discussion on the use of auxiliary oscillators. *Journal of Sound and Vibration* **485**, 115595 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115595>
19. Lenci S. Isochronous beams by an inclined Roller Support. *Journal of Applied Mechanics* **85** (9), 091008 (2018). <https://doi.org/10.1115/1.4040453>
20. Lacarbonara W., Rega G., Nayfeh A. H. Resonant nonlinear normal modes. Part I: analytical treatment for structural one-dimensional systems. *Int. J. Non-Linear Mech.* **38** (6), 851–872 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0020-7462\(02\)00033-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7462(02)00033-1)
21. Manevitch L. New approach to beating phenomenon in coupled nonlinear oscillatory chains. *Arch. Appl. Mech.* **77**, 301–312 (2007). <https://doi.org/10.1007/s00419-006-0081-1>
22. Kambali P. N., Pandey A. K. Nonlinear coupling of transverse modes of a fixed-fixed microbeam under direct and parametric excitation. *Nonlinear Dynamics* **87**, 1271–1294 (2017). <https://doi.org/10.1007/s11071-016-3114-5>
23. Clementi F., Lenci S., Rega G. 1 : 1 internal resonance in a two d.o.f. complete system: a comprehensive analysis and its possible exploitation for design. *Meccanica* **55**, 1309–1332 (2020). <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01171-9>
24. Ruzziconi L., Jaber N., Kosuru L., Bellaredj M. L., Younis M. I. Experimental and theoretical investigation of the 2 : 1 internal resonance in the higher-order modes of a MEMS microbeam at elevated excitations. *Journal of Sound and Vibration* **499**, 115983 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.115983>
25. Leamy M. J., Gottlieb O. Internal resonances in whirling strings involving longitudinal dynamics and material non-linearities. *Journal of Sound and Vibration* **236**, 683–703 (2000). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2000.3039>
26. Kovruguine D. A., Maugin G. A., Potapov A. I. Multiwave nonlinear couplings in elastic structures. Part I. One-dimensional examples. *International Journal of Solids and Structures* **39**, 5571–5583 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00365-7](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00365-7)
27. Kovruguine D. A., Maugin G. A., Potapov A. I. Multiwave non-linear couplings in elastic structures. Part II: Two-dimensional example. *Journal of Sound and Vibration* **263** (5), 1055–1069 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00274-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00274-8)
28. Srinil N., Rega G. Nonlinear longitudinal/transversal modal interactions in highly extensible suspended cables. *Journal of Sound and Vibration* **310**, 230–242 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.07.056>
29. Yang X.-D., Zhang W. Nonlinear dynamics of axially moving beam with coupled longitudinal-transversal vibrations. *Nonlinear Dynamics* **78**, 2547–2556 (2014). <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1609-5>
30. Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Stability of a Flexible Vertical Rod on a Vibrating Support. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5** (63), iss. 3, 477–488 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.311> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **51**, iss. 1, 296–304 (2018). <https://doi.org/10.3103/S1063454118030020>].
31. Belyaev A. K., Ma C.-C., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P., Shurpatov A. O. Dynamics of a rod undergoing a longitudinal impact by a body. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (62), iss. 3, 506–515 (2017). (In Russian). [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **50**, iss. 3, 310–317 (2017). <https://doi.org/10.3103/S1063454117030050>].
32. Saetta E., Settini V., Rega G. Minimal thermal modeling of two-way thermomechanically coupled plates for nonlinear dynamics investigation. *Journal of Thermal Stresses* **43** (3), 345–371 (2020). <https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1704669>
33. Indeitsev D. A., Osipova E. V. A Two-temperature model of optical excitation of acoustic waves in conductors. *Dokl. Phys.* **62** (3), 136–140 (2017). <https://doi.org/10.1134/S1028335817030065>
34. Sun Y., Liu S., Rao Z., Li Y., Yang J. Thermodynamic response of beams on Winkler foundation irradiated by moving laser pulses. *Symmetry* **10** (8), 328 (2018). <https://doi.org/10.3390/sym10080328>

35. Wen C., Tang L., Yang G. Buckling and post-buckling of pinned Euler beams on weakened Winkler foundation under thermal loading. *Journal of Thermal Stresses* **43** (5), 529–542 (2020). <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1734128>
36. Gu B., He T. Investigation of thermoelastic wave propagation in Euler—Bernoulli Beam via nonlocal strain gradient elasticity and G-N Theory. *Journal of Vibration Engineering & Technologies* **9** (5), 715–724 (2021). <https://doi.org/10.1007/s42417-020-00277-4>
37. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Shtukin L. V. Stability of the Bernoulli—Euler Beam in coupled electric and thermal fields. *Dokl. Phys.* **63**, 342–347 (2018). <https://doi.org/10.1134/S1028335818080086>
38. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Semenov B. N., Shtukin L. V. Bernoulli—Euler beam under action of a moving thermal source: characteristics of the dynamic behavior. *Dokl. Phys.* **64**, 185–188 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1028335819040050>
39. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Privalova O. V., Shtukin L. V. Stability of the Bernoulli—Euler Beam under the action of a moving thermal source. *Dokl. Phys.* **65**, 67–71 (2020). <https://doi.org/10.1134/S102833582002007X>
40. Morozov N. F., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. Nonlinear interaction of longitudinal and transverse vibrations of a rod at an internal combinational resonance in view of opto-thermal excitation of N/MEMS. *Journal of Sound and Vibration* **509**, 116247 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116247>
41. Morozov N. I., Indeitsev D. A., Lukin A. V., Popov I. A., Shtukin L. V. Nonlinear modal interaction between longitudinal and bending vibrations of a beam resonator under periodic thermal loading. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 2, 317–337 (2022). <https://doi.org/10.1134/S106345412202008X>. (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 2, 212–228 (2022). <https://doi.org/10.1134/S106345412202008X>].
42. Tang D. W., Araki N. Wavy, wavelike, diffusive thermal responses of finite rigid slabs to high-speed heating of laser-pulses. *International Journal of Heat and Mass Transfer* **42**, 855–860 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(98\)00244-0](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(98)00244-0)
43. Cole K., Beck J., Haji-Sheikh A., Litkouhi B. *Heat Conduction Using Green's Functions*. Taylor & Francis (2011).

Received: July 28, 2022
 Revised: October 7, 2022
 Accepted: November 17, 2022

Authors' information:

Nikita F. Morozov — n.morozov@spbu.ru
 Dmitriy A. Indeitsev (1948–2022)
 Alexei V. Lukin — lukin_av@spbstu.ru
 Ivan A. Popov — popov_ia@spbstu.ru
 Lev V. Shtukin — lvtvsh4749@gmail.com