

## Управление связанностью колебаний композитного крыла

В. М. Рябов<sup>1</sup>, Б. А. Ярцев<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,

Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

<sup>2</sup> Крыловский государственный научный центр,

Российская Федерация, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

**Для цитирования:** Рябов В. М., Ярцев Б. А. Управление связанностью колебаний композитного крыла // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 344–356. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.214>

Обсуждается возможность управления связанностью затухающих изгибно-крутильных колебаний композитного крыла за счет использования моноклиных структур армирования обшивки. Декомпозиция потенциальной энергии деформации и кинетической энергии собственных форм на связанные и несвязанные составляющие позволила в качестве мер связанности мод колебаний ввести два коэффициента, интегрально учитывающие влияние геометрии и структуры армирования на параметры динамического отклика конструкции. Первый из этих коэффициентов характеризует упругую, а второй — инерционную связанности мод собственных колебаний. Выполнены численные исследования влияния ориентации образующих обшивку слоев существенно анизотропного углепластика на величины собственных частот, коэффициентов механических потерь, коэффициентов упругой и инерционной связанности для нескольких низших тонов собственных изгибно-крутильных колебаний крыла. Совместный анализ полученных результатов позволил установить, что для каждой пары изгибно-крутильных мод колебаний существуют диапазоны изменения углов ориентации слоев армирующего материала, в которых инерционная связанность, обусловленная несимметрией профиля поперечного сечения относительно главных осей инерции, уменьшается (вплоть до полного подавления) за счет возникновения упругой связанности в материале обшивки. Указанные диапазоны характеризуются двумя основными признаками: 1) минимальным различием величин собственных частот рассматриваемой пары изгибно-крутильных мод колебаний и 2) принадлежностью собственных частот изгибно-крутильных колебаний отрезку, ограничиваемому соответствующими парциальными собственными частотами рассматриваемой пары мод колебаний.

*Ключевые слова:* композитное крыло, связанные колебания, упругая связанность, инерционная связанность, собственная частота, коэффициент механических потерь.

1. В последние десятилетия нарастает интерес к проблеме создания адаптивных композитных конструкций, обеспечивающих наилучшее согласование с неоднородным потоком жидкости или газа [1]. Первая адаптивная конструкция была предложена Мунком, который использовал эффект изгибно-крутильного взаимодействия для минимизации угла атаки деревянных лопастей и увеличения силы тяги пропеллера за счет рациональной ориентации древесных волокон [2, 3]. В дальнейшем подобные решения применялись при создании композитных несущих поверхностей

летательных аппаратов, позволяющих управлять величиной критических скоростей флаттера или дивергенции за счет оптимизации структур армирования [4]. Успехи, достигнутые в авиационной технике, инициировали аналогичные работы в других отраслях, в частности при создании конструкций «зеленой» энергетики. Оптимизация структур армирования адаптирующихся к условиям набегающего потока композитных лопастей ветровой и приливной турбин продемонстрировала возможность снижения возникающих в них напряжений за счет обусловленной изгибно-крутильной связанностью корректировки угла закручивания, приводящей к уменьшению угла атаки и, следовательно, возможности создания более экономичной турбины [5–8]. Еще одной перспективной областью применения адаптивных конструкций являются композитные лопасти судовых гребных винтов [9]. Использование таких лопастей сопровождается снижением амплитуд колебаний упора, увеличением критической скорости кавитации и повышением КПД движителя за счет пассивной корректировки формы лопасти [10].

Востребованность адаптивных композитных крыльевых конструкций породила множество исследований влияния изгибно-крутильной связанности на параметры их статического [11–21] и динамического [22–42] отклика. Однако до сих пор отсутствуют количественные критерии оценки степени изгибно-крутильной связанности, интегрально учитывающие как геометрию конструкции, так и механические свойства материала. Попытка заполнить отмеченный пробел предпринята в данной работе.

**2.** В первом приближении крыло, работающее в набегающем потоке жидкости или газа, можно рассматривать как тонкостенный стержень замкнутого профиля, упругая ось которого не совпадает с линией центров масс. Поэтому его колебания всегда будут связанными, представляющими собой комбинацию изгиба и кручения [43]. При обтекании такой конструкции потоком жидкости или газа возникают динамические силы, возбуждающие ее колебания. Если скорость обтекания мала, то колебания демпфируются. Однако после достижения определенной скорости потока динамические силы могут приводить к отрицательному затуханию, следствием которого является возникновение интенсивных изгибно-крутильных автоколебаний (флаттера). Изгибно-крутильное движение крыла, возникающее за счет сил инерции, называется инерционным взаимодействием. Если линия центров масс крыла совпадает с его упругой осью, то инерционное взаимодействие исчезает. Так как в большинстве случаев чисто изгибные и чисто крутильные колебания крыльев устойчивы, то ясно, что эффективным способом предотвращения флаттера является подавление инерционного изгибно-крутильного взаимодействия. При создании крыльев из легких сплавов для подавления инерционной связанности наибольшее распространение получил усложняющий конструкцию способ массовой балансировки [43]. Более перспективным подходом к решению данной проблемы представляется использование композитов, позволяющих создавать эффективные конструкции крыла. В настоящей работе этот подход демонстрируется на примере консольного тонкостенного стержня замкнутого (авиационного) профиля, математическая модель собственных затухающих колебаний которого изложена в [34, 40, 41]. Основной целью исследования является поиск структуры армирования крыла, обеспечивающей минимизацию инерционного изгибно-крутильного взаимодействия, возникающего при его собственных колебаниях.

Ранее было показано [20, 21, 34, 40, 41], что в зависимости от угла ориентации армирующих слоев  $\theta$  относительно упругой оси композитного тонкостенного стержня

при  $\theta \neq 0^\circ, 90^\circ$ , в нем возникает упругое изгибно-крутильное взаимодействие. Степень изгибно-крутильной связанности определяется анизотропией материала слоев. Следовательно, в композитном крыле помимо массовой балансировки появляется дополнительная возможность управления уровнем инерционной связанности изгиба с кручением за счет упругой связанности, возникающей в материале обшивки.

В результате упругого изгибно-крутильного взаимодействия в каждом поперечном сечении крыла при изгибе возникает дополнительный крутящий момент, а при кручении — дополнительный изгибающий момент. В зависимости от величины угла  $\theta$  эти дополнительные моменты могут либо увеличивать, либо уменьшать уровень инерционной изгибно-крутильной связанности конструкции. Появление дополнительных моментов влечет за собой изменение координат центра изгиба поперечного сечения, т. е. изменяет положение упругой оси. Вопросы определения координат центра изгиба анизотропных стержней замкнутого профиля посвящены работы [12, 14], в которых показано, что эти координаты не являются константами, а меняются вдоль оси стержня. Поэтому применение классических локальных оценок теории аэроупругости, связанных с рассмотрением геометрических характеристик поперечного сечения [43], в данном случае нецелесообразно, поскольку они не позволяют получить интегральную характеристику уровня изгибно-крутильной связанности крыла в целом.

Оценку изгибно-крутильной связанности анизотропного композитного крыла получим путем декомпозиции потенциальной энергии деформации  $U$  и кинетической энергии  $T$  его свободных колебаний:

$$U = U_1 + U_2, \quad T = T_1 + T_2,$$

где  $U_1, U_2, T_1, T_2$  — несвязанная и связанная составляющие потенциальной энергии деформации и кинетической энергии соответственно, определяемые зависимостями:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^l [c_{11}(u'_0)^2 + c_{22}(\Theta'_{0y})^2 + c_{33}(\Theta'_{0z})^2 + c_{44}(\Phi''_0)^2 + c_{55}(v'_0 + \Theta_{0z})^2 + c_{66}(w'_0 + \Theta_{0y})^2 + c_{77}(\Phi'_0)^2] dx, \quad (1)$$

$$U_2 = \int_0^l [c_{12}u'_0\Theta'_{0y} + c_{13}u'_0\Theta'_{0z} + c_{14}u'_0\Phi''_0 + c_{15}u'_0(v'_0 + \Theta_{0z}) + c_{16}u'_0(w'_0 + \Theta_{0y}) + c_{17}u'_0\Phi'_0 + c_{23}\Theta'_{0y}\Theta'_{0z} + c_{24}\Theta'_{0y}\Phi''_0 + c_{25}\Theta'_{0y}(v'_0 + \Theta_{0z}) + c_{26}\Theta'_{0y}(w'_0 + \Theta_{0y}) + c_{27}\Theta'_{0y}\Phi'_0 + c_{34}\Theta'_{0z}\Phi''_0 + c_{35}\Theta'_{0z}(v'_0 + \Theta_{0z}) + c_{36}\Theta'_{0z}(w'_0 + \Theta_{0y}) + c_{37}\Theta'_{0z}\Phi'_0 + c_{45}\Phi''_0(v'_0 + \Theta_{0z}) + c_{46}\Phi''_0(w'_0 + \Theta_{0y}) + c_{47}\Phi'_0\Phi''_0 + c_{56}(v'_0 + \Theta_{0z})(w'_0 + \Theta_{0y}) + c_{57}\Phi'_0(v'_0 + \Theta_{0z}) + c_{67}\Phi'_0(w'_0 + \Theta_{0y})] dx, \quad (2)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l [m_{11}(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) + m_{22}\Theta_{0y}^2 + m_{33}\Theta_{0z}^2 + m_{77}\Phi_0^2 + m_{44}(\Phi'_0)^2] dx, \quad (3)$$

$$T_2 = \omega^2 \int_0^l [m_{12}u_0\Theta_{0y} + m_{13}u_0\Theta_{0z} + m_{14}u_0\Phi'_0 + m_{23}\Theta_{0y}\Theta_{0z} + m_{24}\Theta_{0y}\Phi'_0 + m_{34}\Theta_{0z}\Phi'_0 + m_{57}v_0\Phi_0 + m_{67}w_0\Phi_0] dx. \quad (4)$$

Здесь  $u_0, v_0, w_0, \Phi_0, \Theta_{0y}, \Theta_{0z}$  — линейные и угловые перемещения оси крыла;  $c_{kl} = \text{Re } c_{kl} + i \cdot \text{Im } c_{kl} = \text{Re } c_{kl} [1 + i \cdot \eta_{kl}]$  — элементы комплексной матрицы жесткости

крыла и  $m_{mn}$  — элементы вещественной матрицы масс крыла, получаемые путем интегрирования по замкнутому контуру поперечного сечения [40].

Для записи уравнений затухающих колебаний композитного крыла используется вариационный принцип Гамильтона:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U) dt = 0. \quad (5)$$

Подставляя выражения (1)–(4) в (5), производя преобразования, включающие интегрирование по частям, и учитывая, что крыло движется по квазигармоническому закону, сведем задачу о затухающих колебаниях конструкции к алгебраической проблеме комплексных собственных значений. Для ее формирования применяется метод Рунге с использованием многочленов Лежандра в качестве координатных функций. В итоге приходим к системе

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = 0.$$

Сначала, после отбрасывания мнимых частей в исходной информации, находится вещественное решение этого уравнения. Затем, используя в качестве начальных значений найденные вещественные собственные частоты и добавив к ним ожидаемую долю комплексной части, вычисляем комплексные собственные частоты из уравнения

$$\det (\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0$$

методом Чебышёва итераций третьего порядка, обобщающего классический метод Ньютона [40]. Одновременно с собственными частотами определяются собственные формы каждой моды колебаний крыла. По найденным собственным формам, используя соотношения (1)–(4), легко вычисляются несвязанные и связанные составляющие потенциальной энергии деформации и кинетической энергии  $U_{1i}$ ,  $U_{2i}$ ,  $T_{1i}$ ,  $T_{2i}$  для каждой  $i$ -й моды колебаний.

В качестве обобщенной меры изгибно-крутильной связанности для каждой моды колебаний композитного крыла введем два коэффициента:

$$K_{U_i} = \frac{\operatorname{Re} U_{2i}}{\operatorname{Re} U_{1i} + \operatorname{Re} U_{2i}}, \quad K_{T_i} = \frac{\operatorname{Re} T_{2i}}{\operatorname{Re} T_{1i} + \operatorname{Re} T_{2i}}.$$

Первый из этих коэффициентов  $K_{U_i}$ , представляющий собой отношение вещественной части связанной составляющей потенциальной энергии деформации  $\operatorname{Re} U_{2i}$  к вещественной части полной потенциальной энергии деформации  $\operatorname{Re} U_i = \operatorname{Re} U_{1i} + \operatorname{Re} U_{2i}$ , характеризует уровень упругой связанности  $i$ -й моды колебаний. Второй коэффициент  $K_{T_i}$ , определяемый как отношение вещественной части связанной составляющей кинетической энергии  $\operatorname{Re} T_{2i}$  к вещественной части полной кинетической энергии  $\operatorname{Re} T_i = \operatorname{Re} T_{1i} + \operatorname{Re} T_{2i}$ , характеризует уровень инерционной связанности  $i$ -й моды колебаний. Введение коэффициентов  $K_{U_i}$  и  $K_{T_i}$ , интегрально учитывающих влияние профиля поперечного сечения, состава и структуры армирования конструкции на параметры ее динамического отклика, позволяет определять степень изгибно-крутильной связанности каждой моды колебаний крыла и, следовательно, намечать конструктивные пути ее минимизации.

**3.** Численные исследования влияния ориентации армирования на степень изгибно-крутильной связанности на отрезке  $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$  выполнялись для нескольких низших тонов колебаний композитного крыла ( $L = 1.5$  м,  $c = 0.3$  м,  $b = 0.046$  м,  $h = 0.005$  м). Идентификация мод колебаний осуществлялась по виду собственных функций. Рассматривались две структуры армирования:  $[-\theta]_n$  и  $[\theta]_n$  (рис. 1). Считалось, что обшивка крыла изготовлена из однонаправленного углепластика HMS/DX-209 ( $\rho = 1580$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_{11} = 191(1 + i \cdot 7.8 \cdot 10^{-4})$  ГПа,  $E_{22} = 5(1 + i \cdot 6.7 \cdot 10^{-3})$  ГПа,  $G_{12} = G_{13} = 3(1 + i \cdot 1.16 \cdot 10^{-2})$  ГПа,  $G_{23} = 2.5(1 + i \cdot 1.15 \cdot 10^{-2})$  ГПа,  $\nu_{12} = 0.279$ ). Все армирующие слои по толщине обшивки ориентировались под углом  $\theta$  к направлению глобальной оси  $x$  (рис. 1). Начало системы координат располагалось в центре сдвига корневого сечения крыла при ориентации всех армирующих слоев вдоль оси стержня ( $\theta = 0^\circ$ ). В этом случае плоскость поперечного сечения крыла является плоскостью изотропии, и координаты центра сдвига вычислялись по приближенным соотношениям [44]:

$$y_s = -\frac{2A_0}{I_y} \frac{\oint_s \left[ \int_0^s \frac{ds}{h} \right] z h ds}{\oint_s \frac{ds}{h}} + \frac{1}{I_y} \oint_s \left[ \int_0^s r_n ds \right] z h ds,$$

$$z_s = \frac{2A_0}{I_z} \frac{\oint_s \left[ \int_0^s \frac{ds}{h} \right] y h ds}{\oint_s \frac{ds}{h}} - \frac{1}{I_z} \oint_s \left[ \int_0^s r_n ds \right] y h ds,$$

использование которых позволяет минимизировать число отличных от нуля элементов матрицы жесткости крыла. Здесь  $A_0$  — площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром поперечного сечения  $s$ ;  $I_y, I_z$  — моменты инерции поперечного сечения относительно осей  $y$  и  $z$  соответственно;  $r_n$  — проекция радиуса-вектора точки контура поперечного сечения на внешнюю нормаль.

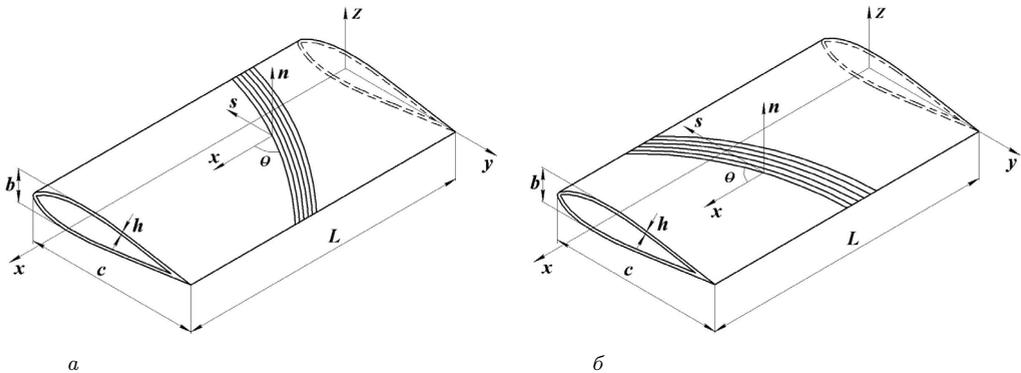


Рис. 1. Схемы армирования композитного крыла: а — структура армирования  $[-\theta]_n$ ; б — структура армирования  $[\theta]_n$ .

Результаты расчета собственных частот  $f_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), коэффициентов механических потерь  $\eta_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), а также коэффициентов упругой  $K_{U_i}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) и инерционной  $K_{T_i}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) связанностей мод колебаний рассматриваемой конструкции

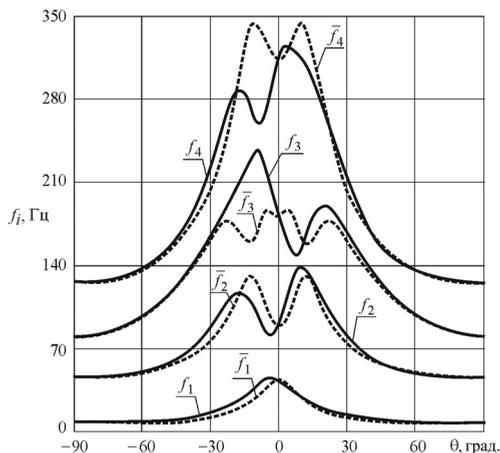


Рис. 2. Зависимость собственных частот низших тонов колебаний композитного крыла от угла ориентации армирующих слоев  $\theta$ .

в зависимости от угла ориентации слоев армирующего материала  $\theta$  приведены на рис. 2–5.

На рис. 2 помимо графиков зависимостей  $f_i = f_i(\theta)$  также нанесены графики зависимостей парциальных собственных частот  $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ . Величины парциальных собственных частот определялись по «свободным» комплексным модулям упругости  $E_{xx} = E_{xx}(\theta)$  и «свободным» комплексным модулям межслойного сдвига  $G_{xz} = G_{xz}(\theta)$ ,  $G_{yz} = G_{yz}(\theta)$ , в то время как «свободный» комплексный модуль сдвига в плоскости армирования  $G_{xy} = G_{xy}(\theta)$  заменялся «чистым» комплексным модулем сдвига в плоскости армирования  $\bar{G}_{xy}(\theta) = G_{xy}(\theta)/[1 - \mu_{xy,x}(\theta) \cdot \mu_{x,xy}(\theta)]$ , соответствующим полному запрещению изгибных деформаций при кручении крыла. Здесь  $\mu_{x,xy}(\theta)$ ,  $\mu_{xy,x}(\theta)$  — коэффициенты взаимного влияния первого и второго рода слоя композита. Понятия «свободных» и «чистых» модулей введены Фойгтом [45].

Совместный анализ всех приведенных зависимостей позволяет заключить, что изменения угла ориентации армирующих слоев  $\theta \in [-90^\circ, 90^\circ]$  сопровождаются изменениями функций  $f_i = f(\theta)$ ,  $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$ ,  $\eta_i = \eta_i(\theta)$ ,  $K_{U_i} = K_{U_i}(\theta)$ ,  $K_{T_i} = K_{T_i}(\theta)$ . При  $|\theta| \in [0^\circ, 45^\circ]$  происходит корректировка степени инерционной изгибно-крутильной связанности собственных форм изгибно-крутильных колебаний крыла за счет возникающей в обшивке дополнительной упругой изгибно-крутильной связанности.

Показателем повышения или понижения степени инерционной изгибно-крутильной связанности взаимодействующих мод колебаний является взаимное расположение зависимостей связанных  $f_i = f_i(\theta)$  и парциальных  $\bar{f}_i = \bar{f}_i(\theta)$  собственных частот при изменении угла  $\theta$ . Если на отрезке  $[\theta_m, \theta_n]$  ( $m < n$ ) для пары связанных частот  $f_i(\theta)$ ,  $f_{i+1}(\theta)$  ( $f_i(\theta) < f_{i+1}(\theta)$ ) выполняются неравенства  $f_i(\theta) \geq \bar{f}_i(\theta)$  и  $f_{i+1}(\theta) \leq \bar{f}_{i+1}(\theta)$  ( $f_i(\theta) < f_{i+1}(\theta)$ ), то инерционная изгибно-крутильная связанность  $i$ -й и  $(i+1)$ -й мод колебаний крыла понижается. Если на отрезке  $[\theta_m, \theta_n]$  для пары связанных частот справедливы неравенства  $f_i(\theta) \leq \bar{f}_i(\theta)$  и  $f_{i+1}(\theta) \geq \bar{f}_{i+1}(\theta)$ , то инерционная изгибно-крутильная связанность  $i$ -й и  $(i+1)$ -й мод колебаний крыла возрастает. В частности, на отрезке  $\theta \in [-10^\circ, 0^\circ]$  справедливы неравенства  $f_1(\theta) \geq \bar{f}_1(\theta)$ ,  $f_2(\theta) \leq \bar{f}_2(\theta)$ , следовательно, на нем происходит корректировка собственных форм

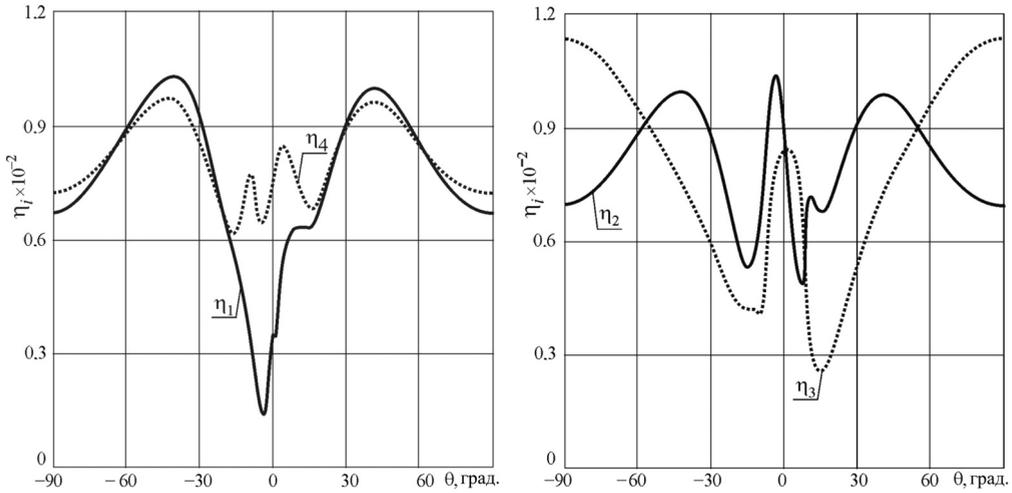


Рис. 3. Зависимость коэффициентов механических потерь низших тонов колебаний композитного крыла от угла ориентации армирующих слоев  $\theta$ .

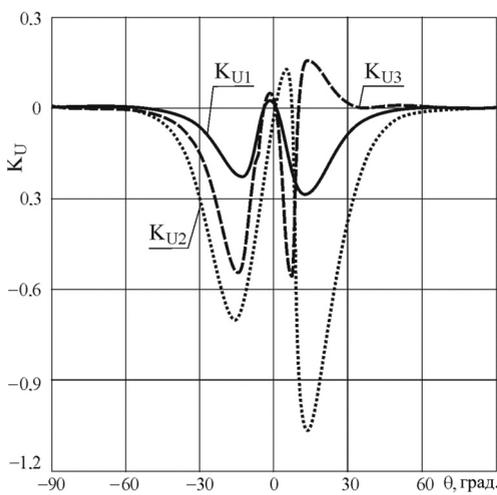


Рис. 4. Зависимость коэффициентов упругой связанности низших тонов колебаний композитного крыла от угла ориентации армирующих слоев  $\theta$ .

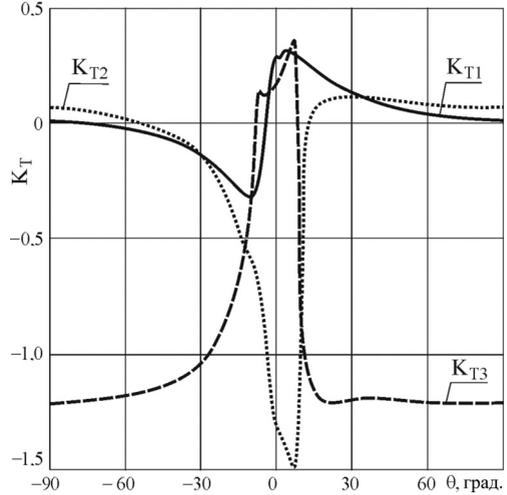


Рис. 5. Зависимость коэффициентов инерционной связанности низших тонов колебаний композитного крыла от угла ориентации армирующих слоев  $\theta$ .

изгибно-крутильных колебаний. При  $\theta \approx -4^\circ$  коэффициент инерционной связанности  $K_{T1}(-4^\circ) = 0$  и коэффициент упругой связанности  $K_{U1}(-4^\circ) = 0$ , т. е. инерционная изгибно-крутильная связанность первой моды колебаний крыла полностью подавлена. Это утверждение также хорошо иллюстрирует график функции  $\eta_1 = \eta_1(\theta)$  (рис. 3), подтверждающий вывод о том, что при  $\theta \approx -4^\circ$  собственная форма первой моды колебаний крыла чисто изгибная. Дальнейшее убывание угла  $\theta < -4^\circ$  сопровождается изменениями  $|K_{T1}(\theta)|$  и  $|K_{U1}(\theta)|$ , которые становятся равны нулю лишь при  $\theta = -90^\circ$ . На этом же отрезке  $\theta \in [-90^\circ, 0^\circ]$   $|K_{U2}(\theta)| \neq 0$ , а функция

$K_{T2} = K_{T2}(\theta)$  меняет знак при  $\theta \approx -54^\circ$  не в результате подавления инерционной изгибно-крутильной связанности аналогичной упругой связанностью, а за счет изменения соотношений между величинами изгибной, крутильной и изгибно-крутильной жесткостей.

Переходя к анализу результатов на отрезке  $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  отметим, что  $|K_{T1}(\theta)| > 0$  при всех значениях  $\theta$ , за исключением  $\theta = 90^\circ$ . Значит, инерционная изгибно-крутильная связанность первой моды колебаний крыла не исчезает. В свою очередь, при  $\theta \approx 14^\circ$   $K_{T2}(14^\circ) = 0$ , а функция  $K_{U2} = K_{U2}(14^\circ)$  достигает глобального экстремума. Следовательно, при  $\theta \approx 14^\circ$  собственная форма второй моды колебаний крыла чисто изгибная. Подавление изгибно-крутильной связанности является результатом взаимодействия второй и третьей мод колебаний, о чем свидетельствует справедливость неравенств  $f_2(\theta) \geq \bar{f}_2(\theta)$ ,  $f_3(\theta) \leq \bar{f}_3(\theta)$  на отрезке  $\theta \in [0^\circ, 19^\circ]$ . Увеличение угла  $\theta > 14^\circ$  сопровождается изменениями  $|K_{T2}(\theta)|$  и  $|K_{U2}(\theta)|$ , которые становятся равны нулю лишь при  $\theta = 90^\circ$ .

Процесс подавления изгибно-крутильной связанности более высоких мод колебаний описывается аналогично.

4. Обобщая полученные результаты, можно утверждать, что при создании композитного крыла целесообразно использовать существенно анизотропные материалы, открывающие возможность управления инерционной изгибно-крутильной связанностью колебаний за счет взаимных трансформаций собственных форм взаимодействующих мод. Для минимизации объема вычислений при проведении оптимизации состава и структуры армирования крыла целесообразно использовать введенные коэффициенты упругой и инерционной связанности, позволяющие существенно сузить область варьирования углов ориентации армирующих слоев. Анализ результатов исследования двух структур армирования позволил установить, что полное подавление инерционной изгибно-крутильной связанности первой моды колебаний крыла, с которой и связано возникновение флаттера, возможно лишь при отрицательных значениях угла ориентации армирующих слоев.

## Литература

1. Daynes S., Weaver P. M. Review Stiffness tailoring using prestress in adaptive composite structures. *Composite Structures* **106**, 282–287 (2013).
2. Munk M. M. Patent US 2484308 A. *Propeller containing diagonally disposed fibrous material*. Publ. October, 11. 1949.
3. Munk M. M. Patent US 2599718 A. *Laminated propeller*. Publ. June, 10. 1952.
4. Jones R. M. *Mechanics of composite materials. Second edition*. Taylor & Francis (1999).
5. Hayat K., de Lecea A. G. M., Moriones C. D., Ha S. K. Flutter performance of bend-twist coupled large-scale wind turbine blades. *Journal of Sound and Vibration* **370**, 149–162 (2016).
6. Wang L., Kolios A., Nishino T., Delafin P.-L., Bird T. Structural optimisation of vertical-axis wind turbine composite blades based on finite element analysis and genetic algorithm. *Composite Structures* **153**, 123–138 (2016).
7. Motley M. R., Barber R. B. Passive control of marine hydrokinetic turbine blades. *Composite Structures* **110**, 133–139 (2014).
8. Li W., Zhou H., Liu H., Lin Y., Xu Q. Review on the blade design technologies of tidal current turbine. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **63**, 414–422 (2016).
9. Azzam A., Li W. Theoretical and experimental methods on bend-twist coupling and damping properties with the relationship to lay-up of the composite propeller marine: A review. *International Journal of Engineering Science and Technology* **4** (6), 2907–2917 (2012).
10. Young Y. L. Dynamic hydroelastic scaling of self-adaptive composite marine rotors. *Composite Structures* **92**, 97–106 (2010).

11. Bauchau O. A., Coffenberry B. S., Rehfield L. W. Composite box beam analysis; theory and experiments. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* **6**, 25–35 (1987).
12. Libove C. Stresses and rate of twist in single-cell thin-walled beams with anisotropic walls. *AIAA Journal* **26** (9), 1107–1118 (1988).
13. Bauchau O. A., Hong C. H. Nonlinear composite beam theory. Transactions of the ASME. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 156–163 (1988).
14. Rehfield L. W., Atilgan A. R. Shear center and elastic axis and their usefulness for composite thin-walled beams. *Proceedings of the American Society for Composites. Fourth Technical Conference*, 179–188. Blacksburg, Virginia (1989).
15. Altenbach J., Altenbach H., Matzdorf V. A generalized Vlasov theory for thin-walled composite beam structures. *Mechanics of Composite Materials* **30** (1), 57–71 (1994).
16. Lentz W. K., Armanios E. A., Badir A. M. Constrained optimization of thin-walled composite beams with coupling. *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 37<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. A Collection of Technical Papers*. Part IV. April, 15–17, 2326–2334 (1996).
17. Mitra M., Gopalakrishnan S., Bhat M. S. A new convergent thin walled composite beam element for analysis of box beam structures. *International Journal of Solids and Structures* **41**, 1491–1518 (2004).
18. Yu W., Liao L., Hodges D. H., Volovoi V. V. Theory of initially twisted, composite, thin-walled beams. *Thin-Walled Structures* **43**, 1296–1311 (2005).
19. Shan L., Qiao P. Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite open channel beams. *Composite Structures* **68**, 211–224 (2005).
20. Murray R. E., Doman D. A., Pegg M. J. Finite element modeling and effects of material uncertainties in a composite laminate with bend-twist coupling. *Composite Structures* **121**, 362–376 (2015).
21. Librescu L., Song O. *Thin-walled composite beams. Theory and application*. Springer (2006).
22. Bank L. C., Kao C. H. The influence of geometric and material design variables on the free vibration of thin-walled composite material beams. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design* **111**, 290–297 (1989).
23. Koo K. N., Lee I. Aeroelastic behavior of a composite plate wing with structural damping. *Computers and Structures* **50** (2), 167–176 (1994).
24. Armanios E. A., Badir A. M. Free vibration analysis of anisotropic thin-walled closed-section beams. *AIAA Journal* **33** (10), 1905–1910 (1995).
25. Centolanza L. R., Smith E. C., Kumar B. Refined structural modeling and structural dynamics of elastically tailored composite rotor blades. *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 37<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. A Collection of Technical Papers*. Part IV. April 15–17, 2002–2012 (1996).
26. Qin Z., Librescu L. Aeroelastic instability of aircraft wings modelled as anisotropic composite thin-walled beams in incompressible flow. *Journal of Fluids and Structures* **18**, 43–61 (2003).
27. Oh S.-Y., Song O., Librescu L. Effects of pretwist and presetting on coupled bending vibrations of rotating thin-walled composite beams. *International Journal of Solids and Structures* **40**, 1203–1224 (2003).
28. Masaki Kameyama, Hisao Fukunaga. Optimum design of composite plate wings for aeroelastic characteristics using lamination parameters. *Computers and Structures* **85**, 213–224 (2007).
29. Piovan M. T., Filipich C. P., Cortinez V. H. Exact solutions for coupled free vibrations of tapered shear-flexible thin-walled composite beams. *Journal of Sound and Vibration* **316**, 298–316 (2008).
30. Santiuste C., Sanchez-Saez S., Barbero E. Dynamic analysis of bending-torsion coupled composite beams using the flexibility influence function method. *International Journal of Mechanical Sciences* **50**, 1611–1618 (2008).
31. Vo T. P., Lee J., Ahn N. On sixfold coupled vibrations of thin-walled composite box beams. *Composite Structures* **89**, 524–535 (2009).
32. Mirtalaie S. H., Hajabasi M. A. Study of coupled lateral-torsion free vibrations of laminated composite beam: analytical approach. *World Academy of Science, Engineering and Technology* **54**, 699–704 (2011).
33. Mirtalaie S. H., Mohammadi M., Hajabasi M. A., Hejripour F. Coupled lateral-torsion free vibrations analysis of laminated composite beam using differential quadrature method. *World Academy of Science, Engineering and Technology* **67**, 117–122 (2012).
34. Рябов В. М., Ярцев Б. А. Собственные закружающие колебания композитных конструкций. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 32–38 (2012).
35. Motley M. R., Kramer M. R., Young Y. L. Free surface and solid boundary effects on the free vibration of cantilevered composite plates. *Composite Structures* **96**, 365–375 (2013).

36. Sina S. A., Haddadpour H. Axial-torsional vibrations of rotating pretwisted thin walled composite beams. *International Journal of Mechanical Sciences* **80**, 93–101 (2014).
37. Kim N. I., Lee J. Divergence and flutter behavior of Beck's type of laminated box beams. *International Journal of Mechanical Sciences* **84**, 91–101 (2014).
38. Szekrényes A. Coupled flexural-longitudinal vibration of delaminated composite beams with local stability analysis. *Journal of Sound and Vibration* **333**, 5141–5164 (2014).
39. Sayyad A. S., Ghugal Y. M. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results. *Composite Structures* **129**, 177–201 (2015).
40. Рябов В. М., Ярцев Б. А. Собственные затухающие колебания анизотропных коробчатых стержней из полимерных композиционных материалов. 1. Постановка задачи. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **3** (61), вып. 2, 221–229 (2016). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.206>
41. Рябов В. М., Ярцев Б. А. Собственные затухающие колебания анизотропных коробчатых стержней из полимерных композиционных материалов. 2. Численный эксперимент. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **3** (61), вып. 3, 429–439 (2016). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.311>
42. Рябов В. М., Ярцев Б. А. Неклассические колебания моноклинной композитной полосы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 4, 695–708 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.415>
43. Фын Я. Ц. *Введение в теорию аэроупругости*, пер. с англ. Москва, Физматлит (1959).
44. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*, пер. с англ. Москва, Мир (1987).
45. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig, Berlin, Teubner (1928).

Статья поступила в редакцию 27 сентября 2022 г.;  
доработана 25 октября 2022 г.;  
рекомендована к печати 17 ноября 2022 г.

#### Контактная информация:

Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; [v.ryabov@spbu.ru](mailto:v.ryabov@spbu.ru)  
Ярцев Борис Александрович — д-р техн. наук; [boris\\_yar@mail.ru](mailto:boris_yar@mail.ru)

## Composite wing vibration coupling control

V. M. Ryabov<sup>1</sup>, B. A. Yartsev<sup>2</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation  
<sup>2</sup> Krylov State Research Center, 44, Moskovskoye shosse, St. Petersburg, 196158, Russian Federation

**For citation:** Ryabov V. M., Yartsev B. A. Composite wing vibration coupling control. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 344–356. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.214> (In Russian)

The paper discusses the possibility to control coupled bending-twisting vibrations of composite wing by means of the monoclinic structures in the reinforcement of the plating. Decomposing the potential straining energy and kinetic energy of natural vibration modes into interacting and non-interacting parts, it became possible to introduce the two coefficients that integrally consider the effect of geometry and reinforcement structure upon the dynamic response parameters of the wing. The first of these coefficients describes the elastic coupling of the natural vibration modes, the second coefficient describes the inertial one. The paper describes the numerical studies showing how the orientation of considerably anisotropic CRP layers in the plating affects natural frequencies, loss factors, coefficients of elastic and inertial coupling for several lower tones of natural bending-twisting vibrations of the wing. Besides, for each vibration mode, partial values of the above mentioned dynamic

response parameters were determined by means of the relationships for orthotropic structures where instead of “free” shearing modulus in the reinforcement plant, “pure” shearing modulus is used. Joint analysis of the obtained results has shown that each pair of bending-twisting vibration modes has its orientation angle ranges of the reinforcing layers where the inertial coupling caused by asymmetry of the cross-section profile with respect to the main axes of inertia decreases, down to the complete extinction, due to the generation of the elastic coupling in the plating material. These ranges are characterized by the two main features: 1) the difference in the natural frequencies of the investigated pair of bending-twisting vibration modes is the minimum and 2) natural frequencies of bending-twisting vibrations belong to a stretch restricted by corresponding partial natural frequencies of the investigated pair of vibration modes. This result is of practical importance because it enables approximate analysis of real composite wings with complex geometry in the existing commercial software packages.

*Keywords:* composite wing, coupled vibrations, elastic coupling, inertial connectivity, natural frequency, loss factors.

## References

1. Daynes S., Weaver P.M. Review Stiffness tailoring using prestress in adaptive composite structures. *Composite Structures* **106**, 282–287 (2013).
2. Munk M.M. Patent US 2484308 A. *Propeller containing diagonally disposed fibrous material*. Publ. October, 11. 1949.
3. Munk M.M. Patent US 2599718 A. *Laminated propeller*. Publ. June, 10. 1952.
4. Jones R. M. *Mechanics of composite materials. Second edition*. Taylor & Francis (1999).
5. Hayat K., de Lecea A. G. M., Moriones C. D., Ha S. K. Flutter performance of bend-twist coupled large-scale wind turbine blades. *Journal of Sound and Vibration* **370**, 149–162 (2016).
6. Wang L., Kolios A., Nishino T., Delafin P.-L., Bird T. Structural optimisation of vertical-axis wind turbine composite blades based on finite element analysis and genetic algorithm. *Composite Structures* **153**, 123–138 (2016).
7. Motley M. R., Barber R. B. Passive control of marine hydrokinetic turbine blades. *Composite Structures* **110**, 133–139 (2014).
8. Li W., Zhou H., Liu H., Lin Y., Xu Q. Review on the blade design technologies of tidal current turbine. *Renewable and Sustainable Energy Reviews* **63**, 414–422 (2016).
9. Azzam A., Li W. Theoretical and experimental methods on bend-twist coupling and damping properties with the relationship to lay-up of the composite propeller marine: A review. *International Journal of Engineering Science and Technology* **4** (6), 2907–2917 (2012).
10. Young Y. L. Dynamic hydroelastic scaling of self-adaptive composite marine rotors. *Composite Structures* **92**, 97–106 (2010).
11. Bauchau O. A., Coffenberry B. S., Rehfield L. W. Composite box beam analysis; theory and experiments. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* **6**, 25–35 (1987).
12. Libove C. Stresses and rate of twist in single-cell thin-walled beams with anisotropic walls. *AIAA Journal* **26** (9), 1107–1118 (1988).
13. Bauchau O. A., Hong C. H. Nonlinear composite beam theory. Transactions of the ASME. *Journal of Applied Mechanics* **55**, 156–163 (1988).
14. Rehfield L. W., Atilgan A. R. Shear center and elastic axis and their usefulness for composite thin-walled beams. *Proceedings of the American Society for Composites. Fourth Technical Conference*, 179–188. Blacksburg, Virginia (1989).
15. Altenbach J., Altenbach H., Matzdorf V. A generalized Vlasov theory for thin-walled composite beam structures. *Mechanics of Composite Materials* **30** (1), 57–71 (1994).
16. Lentz W. K., Armanios E. A., Badir A. M. Constrained optimization of thin-walled composite beams with coupling. *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 37<sup>th</sup> Structures. Structural Dynamics and Materials Conference. A Collection of Technical Papers*. Part IV. April, 15–17, 2326–2334 (1996).
17. Mitra M., Gopalakrishnan S., Bhat M. S. A new convergent thin walled composite beam element for analysis of box beam structures. *International Journal of Solids and Structures* **41**, 1491–1518 (2004).
18. Yu W., Liao L., Hodges D. H., Volovoi V. V. Theory of initially twisted, composite, thin-walled beams. *Thin-Walled Structures* **43**, 1296–1311 (2005).

19. Shan L., Qiao P. Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite open channel beams. *Composite Structures* **68**, 211–224 (2005).
20. Murray R. E., Doman D. A., Pegg M. J. Finite element modeling and effects of material uncertainties in a composite laminate with bend-twist coupling. *Composite Structures* **121**, 362–376 (2015).
21. Librescu L., Song O. *Thin-walled composite beams. Theory and application*. Springer (2006).
22. Bank L. C., Kao C. H. The influence of geometric and material design variables on the free vibration of thin-walled composite material beams. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design* **111**, 290–297 (1989).
23. Koo K. N., Lee I. Aeroelastic behavior of a composite plate wing with structural damping. *Computers and Structures* **50** (2), 167–176 (1994).
24. Armanios E. A., Badir A. M. Free vibration analysis of anisotropic thin-walled closed-section beams. *AIAA Journal* **33** (10), 1905–1910 (1995).
25. Centolanza L. R., Smith E. C., Kumar B. Refined structural modeling and structural dynamics of elastically tailored composite rotor blades. *Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 37<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. A Collection of Technical Papers*. Part IV. April 15–17, 2002–2012 (1996).
26. Qin Z., Librescu L. Aeroelastic instability of aircraft wings modelled as anisotropic composite thin-walled beams in incompressible flow. *Journal of Fluids and Structures* **18**, 43–61 (2003).
27. Oh S.-Y., Song O., Librescu L. Effects of pretwist and presetting on coupled bending vibrations of rotating thin-walled composite beams. *International Journal of Solids and Structures* **40**, 1203–1224 (2003).
28. Masaki Kameyama, Hisao Fukunaga. Optimum design of composite plate wings for aeroelastic characteristics using lamination parameters. *Computers and Structures* **85**, 213–224 (2007).
29. Piovani M. T., Filipich C. P., Cortinez V. H. Exact solutions for coupled free vibrations of tapered shear-flexible thin-walled composite beams. *Journal of Sound and Vibration* **316**, 298–316 (2008).
30. Santiuste C., Sanchez-Saez S., Barbero E. Dynamic analysis of bending-torsion coupled composite beams using the flexibility influence function method. *International Journal of Mechanical Sciences* **50**, 1611–1618 (2008).
31. Vo T. P., Lee J., Ahn N. On sixfold coupled vibrations of thin-walled composite box beams. *Composite Structures* **89**, 524–535 (2009).
32. Mirtalaie S. H., Hajabasi M. A. Study of coupled lateral-torsion free vibrations of laminated composite beam: analytical approach. *World Academy of Science, Engineering and Technology* **54**, 699–704 (2011).
33. Mirtalaie S. H., Mohammadi M., Hajabasi M. A., Hejripour F. Coupled lateral-torsion free vibrations analysis of laminated composite beam using differential quadrature method. *World Academy of Science, Engineering and Technology* **67**, 117–122 (2012).
34. Ryabov V. M., Yartsev B. A. Coupled damping vibrations of composite structures. *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **45** (4), 168–173 (2012).
35. Motley M. R., Kramer M. R., Young Y. L. Free surface and solid boundary effects on the free vibration of cantilevered composite plates. *Composite Structures* **96**, 365–375 (2013).
36. Sina S. A., Haddadpour H. Axial-torsional vibrations of rotating pretwisted thin walled composite beams. *International Journal of Mechanical Sciences* **80**, 93–101 (2014).
37. Kim N. I., Lee J. Divergence and flutter behavior of Beck's type of laminated box beams. *International Journal of Mechanical Sciences* **84**, 91–101 (2014).
38. Szekrényes A. Coupled flexural-longitudinal vibration of delaminated composite beams with local stability analysis. *Journal of Sound and Vibration* **333**, 5141–5164 (2014).
39. Sayyad A. S., Ghugal Y. M. On the free vibration analysis of laminated composite and sandwich plates: A review of recent literature with some numerical results. *Composite Structures* **129**, 177–201 (2015).
40. Ryabov V. M., Yartsev B. A. Natural damped vibrations of anisotropic box beams of polymer composite materials: I. Statement of the problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (61), iss. 2, 221–229 (2016). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.206> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **49**, iss. 2, 130–137 (2016). <https://doi.org/10.3103/S1063454116020126>].
41. Ryabov V. M., Yartsev B. A. Natural damped vibrations of anisotropic box beams of polymer composite materials: II. Numerical experiments. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (61), iss. 3, 429–439 (2016). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.311> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **49**, iss. 3, 260–268 (2016). <https://doi.org/10.3103/S1063454116030110>].

42. Ryabov V. M., Yartsev B. A. Nonclassical vibrations of a monoclinic composite strip. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 4, 695–708 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.415> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **54**, iss. 4, 437–446 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1063454121040166>].

43. Fung Y. C. *An introduction to the theory of aeroelasticity*. New York, John Wiley and Sons (1955). [Rus. ed.: Fung Y. C. *Vvedenie v teoriyu aerouprugosti*. Moscow, Fizmatlit Publ. (1959)].

44. Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon Press (1982). [Rus. ed.: Washizu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti*. Moscow, Mir Publ. (1987)].

45. Voigt W. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Leipzig, Berlin, Teubner (1928).

Received: September 27, 2022

Revised: October 25, 2022

Accepted: November 17, 2022

#### Authors' information:

Victor M. Ryabov — [v.ryabov@spbu.ru](mailto:v.ryabov@spbu.ru)

Boris A. Yartsev — [boris\\_yar@mail.ru](mailto:boris_yar@mail.ru)

## ХРОНИКА

23 ноября 2022 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступили ст. преп. А. В. Орехов, канд. хим. наук, доцент Ю. М. Артемьев и канд. физ.-мат. наук, доцент Г. В. Павилайнен (СПбГУ) с докладом на тему «Математическая модель фотокаталитической усталости полимерных нанокомпозитов».

#### Краткое содержание доклада:

Рассматривается математическое моделирование изменения механических свойств полимерных нанокомпозитов, содержащих фотоактивные компоненты. Механизмы процессов фотодеградации связаны с полупроводниковой природой фотокатализаторов, которая предполагает возможность их перехода в электрон-возбужденное состояние при поглощении квантов света. Выход из такого состояния происходит через окислительно-восстановительные реакции с молекулами-соседями, а эти реакции, в свою очередь, могут вызывать изменения в полимере, которые снижают его механическую прочность. Под фотокаталитической усталостью (ФКУ) понимается частный случай фотодеградации этих полимеров, связанный только с изменением их прочности. Возможным подходом к математическому моделированию процессов ФКУ может быть использование уравнений для кривых многоциклового усталости металлов, в которых количество циклов нагружения заменяется на время экспозиции. Экспериментальные параметры математической модели ФКУ вычисляются одним из методов Монте-Карло.