МАТЕМАТИКА

УДК 517.3
MSC 31B15; 47G10; 44A15; 46E30

Об обобщенных потенциалах Бесселя и совершенных пополнениях*

А. Л. Джабраилов[1], *Э. Л. Шишкина*[2,3]

[1] Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова,
Российская Федерация, 364024, Грозный, ул. Шерипова, 32
[2] Воронежский государственный университет,
Российская Федерация, 394018, Воронеж, Университетская пл., 1
[3] Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
Российская Федерация, 308015, Белгород, ул. Победы, 85

Для цитирования: *Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л.* Об обобщенных потенциалах Бесселя и совершенных пополнениях // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 2. С. 200–211.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.202

Класс обобщенных потенциалов Бесселя представляет основной объект исследования данной статьи. Обобщенный потенциал Бесселя является отрицательной вещественной степенью оператора $(I-\Delta_\gamma)$, где $\Delta_\gamma = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^{\gamma_k}} \frac{\partial}{\partial x_k} x_k^{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$ — оператор Лапласа—Бесселя, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из положительных фиксированных действительных чисел. При решении различных задач для дифференциальных уравнений, доказательстве теорем вложения для некоторых классов функций и обращении интегральных операторов возникает потребность в рассмотрении функций с точностью до какого-то малого, с точки зрения рассматриваемой проблемы, множества. Часто в качестве такого малого множества берется множество лебеговой меры нуль. Однако для многих задач множества лебеговой меры нуль оказываются слишком большими, чтобы ими пренебрегать. Например, при решении граничной задачи поведение решения на границе является существенным. В связи с этим возникла потребность в конструировании полных классов допустимых функций, подходящих для решения конкретных задач. Н. Ароншайн и К. Т. Смит представили два этапа построения функционального пополнения. Первый из них — нахождение подходящего класса исключительных множеств. Второй — нахождение функций, определенных по модулю

*Работа А. Л. Джабраилова выполнена при поддержке Минобрнауки РФ по госзаданию FEGS-2020-0001.

этих исключительных классов, которые нужно присоединить, чтобы получить полный функциональный класс. Оказывается, что подходящих исключительных классов в конкретной задаче может быть бесконечно много, но каждому из них соответствует по существу одно функциональное пополнение. Ясно, что наиболее подходящим является то функциональное пополнение, исключительный класс которого наименьший, поскольку тогда функции будут определены с наилучшей возможной точностью. Всякий раз, когда существует такой минимальный исключительный класс, соответствующее функциональное пополнение называется совершенным пополнением. В этой статье совершенные пополнения строятся по норме, связанной с ядром обобщенного потенциала Бесселя.

Ключевые слова: обобщенный потенциал Бесселя, совершенное пополнение пространств.

1. Введение. Классические потенциалы Бесселя представляют собой реализацию вещественных отрицательных степеней дифференциального оператора $(I-\Delta)$ в виде

$$(G^\alpha f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{G}_\alpha(xy) f(y)dy, \qquad \alpha > 0,$$

где $\mathcal{G}_\alpha(x) = \frac{2^{\frac{2-n-\alpha}{2}}}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{K_{\frac{n-\alpha}{2}}(|x|)}{|x|^{\frac{n-\alpha}{2}}}$, K_ν — модифицированные функции Бесселя второго рода. Операторы G^α являются мощным техническим инструментом гармонического анализа и его приложений. Общая теория функциональных пополнений, разработанная Н. Ароншайном и К. Т. Смитом в [1], применяется к пространствам бесселевых потенциалов в [2]. Полученные таким образом пополнения являются важнейшими классами функций для изучения дифференциальных задач, особенно эллиптического типа. Классические потенциалы Бесселя исследовались также Т. М. Флеттом, М. Л. Гольдманом и др. (дополнительную информацию и ссылки см. в [2–4]).

В статье мы будем иметь дело с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя вида

$$(B_\gamma)_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^\gamma}\frac{\partial}{\partial t} t^\gamma \frac{\partial}{\partial t}, \qquad t > 0, \qquad \gamma \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

и рассматривать обобщенный потенциал Бесселя, который является отрицательной вещественной степенью оператора $(I - \Delta_\gamma)$, где $\Delta_\gamma = \sum\limits_{k=1}^{n} (B_{\gamma_k})_{x_k}$ — оператор Лапласа — Бесселя. Теория таких потенциалов разрабатывалась в [5–9]. В этой статье мы рассматриваем функциональный класс обобщенных потенциалов Бесселя и строим совершенным функциональным пополнением $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}$ с нормой, связанной с обобщенными потенциалами Бесселя.

2. Обобщенный потенциал Бесселя и его свойства. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}{}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \ x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\},$$

$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ является мультииндексом, состоящим из положительных фиксированных действительных чисел γ_i, $i = 1, \ldots, n$, и $|\gamma| = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$.

Пусть Ω — конечное или бесконечное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}^n_+$ и $\overline{\Omega}_+ = \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}^n_+$, где $\overline{\mathbb{R}}{}^n_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}$. Мы будем работать с классом функций $C^m(\Omega_+)$, состоящим из m раз, дифференцируемых на Ω_+ функций. Обозначим через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i непрерывно продолжаются до $x_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Класс $C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ пусть состоит из всех функций из $C^m(\overline{\Omega}_+)$ таких, что $\frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}}\big|_{x_i=0} = 0$ для всех неотрицательных целых чисел $k \leq \frac{m-1}{2}$. В дальнейшем будем использовать обозначение C^m_{ev} для $C^m_{ev}(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$. Положим $C^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+) = \bigcap C^m_{ev}(\overline{\Omega}_+)$, где пересечение берется по всем конечным m и $C^\infty_{ev}(\overline{\mathbb{R}}_+) = C^\infty_{ev}$.

Пусть $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ — пространство всех функций $f \in C^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+)$ с конечным носителем. Будем использовать обозначение $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\overline{\Omega}_+) = \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$ и $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}(\overline{\mathbb{R}}_+) = \overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}$.

Пусть $L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+) = L^\gamma_p$, $1 \leq p < \infty$ состоит из всех измеримых функций на $\mathbb{R}^n_+$, четных по каждой из переменных x_i, $i = 1, \ldots, n$, таких, что

$$\|f\|_{L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)} = \|f\|_{p,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p} < \infty, \qquad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f \in L^\gamma_1(\mathbb{R}^n_+)$ определяется как

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi) = \mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(x)\, \mathbf{j}_\gamma(x;\xi) x^\gamma dx, \qquad \mathbf{j}_\gamma(x;\xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i - 1}{2}}(x_i \xi_i).$$

Символ j_ν используется для обозначения нормированной функции Бесселя первого рода $j_\nu(x) = \dfrac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu}\, J_\nu(x)$, где J_ν — функция Бесселя первого рода.

Пусть $f \in L^\gamma_1(\mathbb{R}_+)$ — функция ограниченной вариации в окрестности точки x непрерывности f. Тогда при $\gamma > 0$ формула обращения преобразования имеет вид

$$\mathbf{F}^{-1}_\gamma[\widehat{f}(\xi)](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \mathbf{j}_\gamma(x,\xi) \widehat{f}(\xi) \xi^\gamma\, d\xi.$$

Подпространство пространства быстроубывающих (шварцевых) функций S_{ev} имеет вид

$$S_{ev} = \left\{ f \in C^\infty_{ev} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n_+} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n_+ \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ — целые неотрицательные числа, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $D^\beta = D^{\beta_1}_{x_1} \ldots D^{\beta_n}_{x_n}$, $D_{x_j} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Многомерный обобщенный сдвиг определяется равенством

$$({}^\gamma\mathbf{T}^y_x f)(x) = {}^\gamma\mathbf{T}^y_x f(x) = ({}^{\gamma_1}T^{y_1}_{x_1} \ldots {}^{\gamma_n}T^{y_n}_{x_n} f)(x), \tag{2}$$

где каждый одномерный обобщенный сдвиг ${}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i}$, i=$1, \ldots, n$ действует по формуле

$$({}^{\gamma_i}T^{y_i}_{x_i} f)(x) =$$
$$= c(\gamma_i) \int\limits_0^\pi f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\varphi_i}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \ \sin^{\gamma_i - 1}\varphi_i \, d\varphi_i,$$

где $c(\gamma_i) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}$. Далее будем использовать обозначение $C(\gamma) = \pi^{-\frac{n}{2}} \prod\limits_{i=1}^n \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}$.

Обобщенная свертка, порожденная многомерным обобщенным сдвигом ${}^\gamma\mathbf{T}^y_x$, имеет вид

$$(f \cdot g)_\gamma(x) = (f \cdot g)_\gamma = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} f(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x g)(x) y^\gamma \, dy. \tag{3}$$

Обобщенный потенциал Бесселя задается соотношением (см. [5–7])

$$u = (\mathbf{G}^\alpha_\gamma \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} G^\gamma_\alpha(y)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x \varphi(x)) y^\gamma dy, \tag{4}$$

где
$$G^\gamma_\alpha(x) = \mathbf{F}^{-1}_\gamma[(1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}](x) \tag{5}$$
является обобщенным ядром Бесселя. В [5] пространство $\mathbf{B}^\alpha_\gamma(L^\gamma_p) = \{u{:}u{=}\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi, \varphi{\in}L^\gamma_p\}$ с нормой $\|u\|_{\mathbf{B}^\alpha_\gamma(L^\gamma_p)} = \|\varphi\|_{L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)}$ было введено с использованием B-гиперсингулярных интегралов. В большом обзоре [6], в частности, указывается связь пространства Соболева — Лиувилля и пространства потенциалов Бесселя. В [7] было показано, что

$$G^\gamma_\alpha(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|), \tag{6}$$

где $K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}$ — модифицированная функция Бесселя второго рода.

Поскольку G^γ_α интегрируема с весом x^γ (см. [6, 7]), ее преобразование Ханкеля существует для каждого ξ. Ядро G^γ_α является аналитическим при $\alpha > 0$ как функция от α. Из (5) путем аналитического продолжения получаем, что преобразование Ханкеля обобщенного ядра Бесселя для $\alpha > 0$ равно $\mathbf{F}_\gamma[G^\gamma_\alpha](\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}$.

Введем функцию

$$\omega_{\alpha,\gamma}(|x|) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod\limits_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} |x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|). \tag{7}$$

Оператор $\mathbf{G}^\alpha_\gamma$ может быть представлен в терминах обобщенной свертки (3) с $\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)$:
$$\mathbf{G}^\alpha_\gamma \varphi = \left(\frac{\omega_{\alpha,\gamma}(|x|)}{|x|^{n+|\gamma|-\alpha}} * \varphi\right)_\gamma, \qquad \alpha > 0.$$

Основные свойства обобщенного потенциала Бесселя:

1) полугрупповое свойство $\mathbf{G}^\alpha_\gamma \mathbf{G}^\beta_\gamma \varphi = \mathbf{G}^{\alpha+\beta}_\gamma \varphi$, $\varphi \in L^\gamma_p$;

2) $\mathbf{G}^0_\gamma\varphi=\varphi$, $\varphi\in L^\gamma_p$;
3) $\mathbf{F}_\gamma(\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi)(x)=(1+|\xi|^2)^{-\alpha/2}\mathbf{F}_\gamma[\varphi](x)$, $\varphi\in S_{ev}$;
4) $\mathbf{G}^{\alpha+2k}_\gamma(I-\Delta_\gamma)^k\varphi=\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi$, $\varphi\in S_{ev}$.

Из свойства 4 следует, в частности, что функция $f(x)=\mathbf{G}^{2k}_\gamma\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^{\,n}_+$, есть решение уравнения $(I-\Delta_\gamma)^k f(x)=\varphi(x)$, $k=1,2,\ldots$.

Пример. *Решение задачи*

$$f(x)-\Delta_\gamma f(x)=\mathbf{j}_\gamma(x,\xi),\qquad f(0)=\frac{1}{1+|\xi|^2}$$

имеет вид $f(x)=(\mathbf{G}^2_\gamma)_x\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)=\dfrac{\mathbf{j}_\gamma(x,\xi)}{1+|\xi|^2}$.

В [8] показано, что при $\alpha>0$, $1\le p\le\infty$, $\varphi\in L^\gamma_p$ обобщенный потенциал Бесселя $\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi$ почти для всех x совпадает с интегралом

$$\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int\limits_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-t}u_\gamma(x,t)dt, \tag{8}$$

где $u_\gamma(x,t)$ — обобщенный интеграл Гаусса—Вейерштрасса вида

$$u_\gamma(x,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}W_\gamma(y,t)({}^\gamma\mathbf{T}^y_x\varphi(x))y^\gamma dy,\ W_\gamma(x,t)=C_{n,\gamma}\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{t^{\frac{n+|\gamma|}{2}}},\ C_{n,\gamma}=\frac{2^{-|\gamma|}}{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.$$

Причем функция $u_\gamma(x,t)$ есть решение задачи Коши $u_t=\Delta_\gamma u$, $u=u(x,t)$, $u(x,0)=\varphi(x)$, на $S=\mathbb{R}^n_+\times(0,b)$ при $\varphi\in C^0_{ev}(S)$.

2. Функциональный класс обобщенных потенциалов Бесселя. Банахово пространство интегрируемых или обобщенных функций на n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, обобщающее обычное соболевское пространство функций, производные которых принадлежат L_p-классам, представляет собой пространство потенциалов Бесселя. Если Δ обозначает оператор Лапласа, то пространство потенциалов Бесселя $\mathbf{B}^\alpha$ можно определить как пространство функций (или обобщенных функций) f таких, что $(I-\Delta)^{\alpha/2}f$ принадлежит пространству Лебега L_p, нормированное соответствующей нормой Лебега. Оператор $(I-\Delta)^{\alpha/2}=\mathbf{G}^{-\alpha}$ является при $\alpha>0$ разновидностью дробного дифференцирования, определяется при помощи какой-либо регуляризации (см. [6]). Пространство бесселевых потенциалов было изучено в [2].

Мы рассмотрим пространство обобщенных потенциалов Бесселя

$$\mathbf{B}^\alpha_\gamma=\{u{:}u{=}\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi,\ \varphi\in L^\gamma_p\}$$

с нормой $\|u\|_{\mathbf{B}^\alpha_\gamma(L^\gamma_p)}=\|\varphi\|_{L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)}$. Пространство $\mathbf{B}^\alpha_\gamma$ обобщенных потенциалов Бесселя было впервые введено Л. Н. Ляховым в [5] с использованием подхода Стейна—Лизоркина. В [5] введенные ранее Л. Н. Ляховым B-гиперсингулярные интегралы и B-потенциалы Рисса были применены для построения нормы в $\mathbf{B}^\alpha_\gamma$. Мы используем другой подход для введения нормы в $\mathbf{B}^\alpha_\gamma$, основанный на работах Н. Ароншайна и К. Т. Смита [2].

Пространства обобщенных бесселевых потенциалов произвольного порядка α необходимы для определения классов решений краевой задачи вида

$$Au = f \ \text{ в } \ D, \qquad B_i u = 0 \ \text{ на } \ \partial D,$$

где A — эллиптический оператор, содержащий дифференциальные операторы Бесселя (1), в частности A может представлять собой оператор Лапласа—Бесселя Δ_γ.

Простейшая норма на $\mathbf{B}_\gamma^\alpha$ задается при помощи весового интеграла Дирихле порядка α формулой

$$d_{\alpha,\gamma}(u) = \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |\xi|^{4\alpha} |\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)|^2 \xi^\gamma d\xi. \tag{9}$$

В [9] показано, что пространство $\overset{\circ}{C}{}_{ev}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, нормированное $\sqrt{d_{\alpha,\gamma}}$, не может быть функциональным пространством. Одна из простейших норм на $\overset{\circ}{C}{}_{ev}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$, эквивалентная $\sqrt{d_{\alpha,\gamma}}$, имеет вид

$$\|u\|_{\alpha,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} (1+|\xi|^2)^{2\alpha} |\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)|^2 \xi^\gamma d\xi \right)^{1/2}. \tag{10}$$

Далее мы покажем, что норма (10) может быть представлена с помощью сверточных ядер (7), порождающих обобщенный потенциал Бесселя.

Теорема 1. *Норма $\|u\|_{\alpha,\gamma}$ допускает следующее представление:*

$$\|u\|_{\alpha,\gamma}^2 = 2^{|\gamma|-n+1} \prod_{i=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) \times$$
$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|\,{}^\gamma\mathbf{T}_x^y u(x) + u(y)|^2}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}} (\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|) - \omega_{-4\alpha,\gamma}(0)) x^\gamma dx\, y^\gamma dy - \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|\,{}^\gamma\mathbf{T}_x^y u(x) - u(y)|^2}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}} (\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|) + \omega_{-4\alpha,\gamma}(0)) x^\gamma dx\, y^\gamma dy \right). \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\gamma_{n+1} \geq 0$ произвольное. Рассмотрим выражение

$$\mathbf{J} = \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{|j_{\frac{\gamma_{n+1}-1}{2}}(z_0) u(x) - u(y)|^2}{[\,{}^\gamma\mathbf{T}_x^y |x|^2 + z_0^2]^{\frac{n+|\gamma'|+1+4\alpha}{2}}} x^\gamma dx\, y^\gamma dy\, z_0^{\gamma_{n+1}} dz_0.$$

Преобразуем интеграл $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \int\limits_0^\infty z_0^{\gamma_{n+1}} dz_0 \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} \frac{x^\gamma dx}{[|x|^2 + z_0^2]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^n} |j_{\frac{\gamma_{n+1}-1}{2}}(z_0)\,{}^\gamma\mathbf{T}_x^y u(x) - u(y)|^2 y^\gamma dy =$$

$$
= \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty dz_0\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{x^\gamma dx}{[|x|^2+z_0^2]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}\times
$$

$$
\times\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}|j_{\frac{\gamma_{n+1}-1}{2}}(z_0)\mathbf{j}_\gamma(x;\xi)-1|^2\,|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)|^2\xi^\gamma d\xi.
$$

Полагая $(x,z_0)=\widetilde{z}$, $\widetilde{\xi}=(\xi,1)$, $\gamma'=(\gamma,\gamma_{n+1})$, будем иметь

$$
\mathbf{J}=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\mathcal{B}(\xi)\,|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)|^2\xi^\gamma d\xi,
$$

где

$$
\mathcal{B}(\xi)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\frac{|\mathbf{j}_{\gamma'}(\widetilde{z};\widetilde{\xi})-1|^2}{|\widetilde{z}|^{n+|\gamma'|+1+4\alpha}}\widetilde{z}^{\gamma'}d\widetilde{z}.
$$

Произведя в $\mathcal{B}(\xi)$ замену переменных $\widetilde{z}=z/|\widetilde{\xi}|$, получим

$$
\mathcal{B}(\xi)=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\frac{|\mathbf{j}_{\gamma'}(\widetilde{z};\widetilde{\xi})-1|^2}{|\widetilde{z}|^{n+|\gamma'|+1+4\alpha}}\widetilde{z}^{\gamma'}d\widetilde{z}=
$$

$$
=\frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}(1+|\xi|^2)^{2\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}_+}\frac{\left|\mathbf{j}_{\gamma'}\left(z;\frac{\widetilde{\xi}}{|\widetilde{\xi}|}\right)-1\right|^2}{|z|^{n+|\gamma'|+1+4\alpha}}z^{\gamma'}dz
$$

и в силу равенства Парсеваля для преобразования Ханкеля

$$
\mathbf{J}=D(n,\gamma',\alpha)\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(1+|\xi|^2)^{2\alpha}\,|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)|^2\xi^\gamma d\xi,
$$

где

$$
D(n,\gamma',\alpha)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{\gamma_{n+1}+1}{2}\right)}{2^{1-\gamma_{n+1}}}C(n+1,\gamma',\alpha),
$$

$$
C(n+1,\gamma',\alpha)=\frac{2^{1-|\gamma'|-4\alpha}\pi}{\sin(2\alpha\pi)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma'|+1}{2}+2\alpha\right)\prod\limits_{i=1}^{n+1}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}.
$$

Значит, для произвольного $\gamma_{n+1}\geq 0$ получим

$$
\|u\|^2_{\alpha,\gamma}=\frac{1}{D(n,\gamma',\alpha)}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|j_{\frac{\gamma_{n+1}-1}{2}}(z_0)u(x)-u(y)|^2}{[\,^\gamma\mathbf{T}^y_x|x|^2+z_0^2]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}x^\gamma dx\,y^\gamma dy\,z_0^{\gamma_{n+1}}dz_0.
$$

Переходя к $\gamma_{n+1}=0$ и полагая

$$
E(n,\gamma,\alpha)=D(n,\gamma',\alpha)|_{\gamma_{n+1}=0}=\frac{\pi\sqrt{\pi}2^{-|\gamma|-4\alpha}}{\sin(2\alpha\pi)\Gamma(2\alpha+1)\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha+1}{2}\right)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)},
$$

запишем

$$\|u\|^2_{\alpha,\gamma}=\frac{1}{E(n,\gamma,\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|e^{\frac{iz_0}{2}}u(x)-e^{-\frac{iz_0}{2}}u(y)|^2}{[\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x|x|^2+z_0^2]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}x^\gamma dx\,y^\gamma dy\,dz_0=$$

$$=\frac{1}{E(n,\gamma,\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)-u(y)|^2\cos^2\frac{z_0}{2}}{[|x|^2+z_0^2]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}x^\gamma dx\,y^\gamma dy\,dz_0+$$

$$+\frac{1}{E(n,\gamma,\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}\frac{|\,{}^\gamma\mathbf{T}^y_x u(x)+u(y)|^2\sin^2\frac{z_0}{2}}{[|x|^2+z_0^2]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}x^\gamma dx\,y^\gamma dy\,dz_0. \qquad (12)$$

Используя формулу 2.5.9.4 из [10] и (7), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^2\frac{z_0}{2}dz_0}{[|x|^2+z_0^2]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}2^{1-n-4\alpha}\Gamma(-2\alpha)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha+1}{2}\right)}(\omega_{-4\alpha,\gamma}(0)+\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{z_0}{2}dz_0}{[|x|^2+z_0^2]^{\frac{n+|\gamma|+1+2\alpha}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}2^{1-n-4\alpha}\Gamma(-2\alpha)\prod\limits_{i=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{|x|^{n+|\gamma|+4\alpha}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+4\alpha+1}{2}\right)}(\omega_{-4\alpha,\gamma}(0)-\omega_{-4\alpha,\gamma}(|x|)).$$

Подставляя вычисленные интегралы в (12) и упрощая константу, получим представление (11). □

Отметим, что возможны два подхода к определению класса обобщенных потенциалов Бесселя $\mathbf{B}^\alpha_\gamma(L^\gamma_p)$ порядка α в $\mathbb{R}^n_+$. Первый состоит в том, что $u\in\mathbf{B}^\alpha_\gamma(L^\gamma_p)$, если u является обобщенной сверткой $(G^\gamma_\alpha\cdot\varphi)_\gamma$ для некоторого $\varphi\in L^\gamma_p(\mathbb{R}^n_+)$. Этот подход был представлен в [3], где использовались B-гиперсингулярные интегралы. Второй подход заключается во введении в $\mathbf{B}^\alpha_\gamma(L^\gamma_p)$ нормы

$$\|u\|^2_{\alpha,\gamma}=\int\limits_{\mathbb{R}^n_+}(1+|\xi|^2)^{2\alpha}|\mathbf{F}_\gamma[u](\xi)|^2\xi^\gamma d\xi, \qquad (13)$$

которая может быть записана с использованием ядра свертки, порождающего обобщенный потенциал Бесселя. Норма $\|u\|_{\alpha,\gamma}$ наиболее удобна для изучения класса обобщенных потенциалов Бесселя в $\mathbb{R}^n_+$.

3. Совершенное функциональное пополнение класса $\mathcal{F}^\gamma_\alpha$. В этом разделе мы исследуем нормированный функциональный класс $\mathcal{F}^\gamma_\alpha$, полученный введением в класс $\overset{\circ}{C}{}^\infty_{ev}$ нормы $\|u\|_{\alpha,\gamma}$ вида (13), и покажем, что нормированный функциональный класс $\mathcal{F}^\gamma_\alpha$ имеет совершенное функциональное пополнение. При $\alpha>0$ исключительным классом совершенного пополнения является класс множеств, на которых потенциал $\mathbf{G}^\alpha_\gamma\varphi$ функции $\varphi\in L^\gamma_2$ может быть неопределен. Функции в насыщенном совершенном пополнении равны такому потенциалу, за исключением исключительного множества.

Абстрактное множество $\mathcal{E}$, в котором определены функции линейного функционального класса $\mathcal{F}$, называется *базисным множеством* $\mathcal{F}$.

Исключительным классом в базисном множестве $\mathcal{E}$ называется класс $\mathcal{A}$ подмножеств множества $\mathcal{E}$, удовлетворяющий двум свойствам:

— эредитарности: если $A \subset \mathcal{A}$ и $B \in A$, то $B \in \mathcal{A}$,

— σ-аддитивности: если $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, то и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Будем говорить, что любое предложение истинно, exc. $\mathcal{A}$, если набор точек, при котором оно неверно, принадлежит исключительному классу $\mathcal{A}$.

Линейный функциональный класс $\mathcal{F}$ является *линейным функциональным классом* по отношению к $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}$ является исключительным классом, который содержит исключительное множество каждого f из $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ является функциональным классом по отношению к $\mathcal{A}$ (будем писать в этом случае rel. $\mathcal{A}$), то $\mathcal{A}$ называется исключительным классом для $\mathcal{F}$, а множества из $\mathcal{A}$ — исключительными множествами.

Если существует наименьший исключительный класс $\mathcal{A}$, относительно которого $\mathcal{F}$ имеет функциональное пополнение, то насыщенное пополнение rel. $\mathcal{A}$ называется *совершенным пополнением* $\mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ является функциональным классом rel. $\mathcal{A}$, то таким же является класс $\mathcal{F}'$ всех функций, определенных exc. $\mathcal{A}$ и равных exc. $\mathcal{A}$ некоторой функции из $\mathcal{F}$. В этом случае класс $\mathcal{F}'$ называется *насыщенным расширением* $\mathcal{F}$ rel. $\mathcal{S}$.

Для $\alpha > 0$ обозначим через $\mathcal{A}^{\gamma}_{2\alpha}$ класс всех множеств A таких, что для некоторой функции $\varphi \in L^{\gamma}_2$, такой, что при $\varphi \geq 0$ выполняется условие

$$A \subset \bigcup_x \{x \in \mathbb{R}^n_+ : (\mathbf{G}^{2\alpha}_{\gamma}\varphi)(x) = +\infty\}.$$

Пусть $\mathbf{P}^{\alpha}_{\gamma}$ обозначает класс всех функций u, определенных exc. $\mathcal{A}^{\gamma}_{2\alpha}$, таких, что для некоторой функции $\varphi \in L^2_{\gamma}$ выполняется равенство

$$u(x) = (\mathbf{G}^{2\alpha}_{\gamma}\varphi)(x)\,\mathrm{exc.}\,\mathcal{A}^{\gamma}_{2\alpha}.$$

Поскольку ядро $G^{\gamma}_{\alpha}(x) \in L^{\gamma}_1(\mathbb{R}^n_+)$, то для любой $\varphi \in L^{\gamma}_2$ функция $(\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x)$ определена и конечна почти всюду и $(\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x) \in L^{\gamma}_2$. В частности, каждое множество из $\mathcal{A}^{\gamma}_{2\alpha}$ имеет весовую меру Лебега нуль. Кроме того, преобразование Ханкеля $(\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x)$ имеет вид $\mathbf{F}_{\gamma}(\mathbf{G}^{\alpha}_{\gamma}\varphi)(x) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}\mathbf{F}_{\gamma}[\varphi](x)$. В силу последнего равенства и равенства Парсеваля для преобразования Ханкеля имеем

$$\|\mathbf{G}^{2\alpha}_{\gamma}\varphi\|_{\alpha,\gamma} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\mathbf{F}_{\gamma}[\varphi](x)|^2 \xi^{\gamma} d\xi\right)^{1/2} = c||\varphi||_{L^{\gamma}_2}, \qquad \varphi \in L^{\gamma}_2,$$

что доказывает следующую лемму.

Лемма 1. *Для $\varphi \in L^{\gamma}_2$ следующие условия эквивалентны:*
1) $\varphi = 0$ везде, за исключением множеств весовой лебеговой меры нуль;
2) $\mathbf{G}^{2\alpha}_{\gamma}\varphi \equiv 0$;
3) $\mathbf{G}^{2\alpha}_{\gamma}\varphi = 0\,\mathrm{exc.}\,\mathcal{A}_{2\alpha}$;
4) $\mathbf{G}^{2\alpha}_{\gamma}\varphi = 0$ везде, за исключением множеств весовой лебеговой меры нуль;
5) $\|\mathbf{G}^{2\alpha}_{\gamma}\varphi\|_{\alpha,\gamma} = 0$.

Лемма 2. *Класс $\mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$ является исключительным классом. Класс $\mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$ есть полное функциональное пространство относительно $\mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$.*

Доказательство. Для того чтобы доказать, что $\mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$ является исключительным классом, надо доказать, что $\mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$ является эредитарным (т. е. что если $A \in \mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$ и $B \subset A$, то $B \in \mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$) и σ-аддитивным. Если $A \in \mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$ и $B \subset A$, то для некоторой функции $\varphi \in L_2^{\gamma}$, такой, что $\varphi \geq 0$ выполняется условие

$$B \subset A \subset \bigcup_x \{x \in \mathbb{R}_+^n : (\mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi)(x) = +\infty\},$$

что и означает, что $B \in \mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$. Далее пусть $A_n \in \mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$ и пусть $\varphi_n \geq 0$ — функция, такая, что

$$A_n \subset \bigcup_x \{x \in \mathbb{R}_+^n : (\mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi_n)(x) = +\infty\}, \qquad ||\varphi_n||_{L_2^{\gamma}} \leq \frac{1}{2^{n+|\gamma|}}.$$

Тогда, если $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$ и $\varphi = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n$, ясно, что $\varphi \geq 0$ — функция в L_2^{γ} такая, что выполнено условие

$$A \subset \bigcup_x \{x \in \mathbb{R}_+^n : (\mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi)(x) = +\infty\},$$

поэтому $A \in \mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$. □

Теорема 2. *Класс $\mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$ есть полное функциональное пространство относительно $\mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$.*

Доказательство. Из приведенной леммы следует, что $\mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$ — нормированный функциональный класс rel. $\mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$, т. е. условия $u = 0$ exc. $\mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$ и $\|u\|_{\alpha,\gamma} = 0$ эквивалентны. Из $\|\mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi\|_{\alpha,\gamma} = c||\varphi||_{L_2^{\gamma}}$, $\varphi \in L_2^{\gamma}$ следует, что $\mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$ является полным, кроме того, он насыщен. Остается только доказать свойство функционального пространства.

Из любой последовательности, сходящейся к нулю, можно выбрать такую подпоследовательность $\{u_n\}$, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ||u_n||_{\alpha,\gamma} < \infty$. Если $u_n = \mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi_n$, за исключением множества $A_n \in \mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$, то положим $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|$. Тогда $\varphi \in L_2^{\gamma}$ и $\mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi(x) \to 0$ для всех $x \notin A_0 = \bigcup\limits_x \{x \in \mathbb{R}_+^n : (\mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi)(x) = +\infty\}$. Поскольку $u_n \to 0$ для всех $x \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$. Это доказывает, что $\mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$ есть полное функциональное пространство относительно $\mathcal{A}_{2\alpha}^{\gamma}$. □

Теорема 3. *Класс $\mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$ есть совершенное функциональное пополнение класса $\mathcal{F}_{\alpha}^{\gamma}$.*

Доказательство. Покажем, что $\mathcal{F}_{\alpha}^{\gamma} \subset \mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$. Пусть $u \in \mathcal{F}_{\alpha}^{\gamma}$ и $\mathbf{F}_{\gamma}\varphi = (1 + |\xi|^2)^{\alpha}\mathbf{F}_{\gamma}u$, $\varphi = \mathbf{F}_{\gamma}^{-1}\varphi$. Так как $u \in \overset{\circ}{C}{}_{ev}^{\infty}(\mathbb{R}_+^n)$, то $\mathbf{F}_{\gamma}\varphi \in L_1^{\gamma}$ и $\mathbf{F}_{\gamma}\varphi \in L_2^{\gamma}$, тогда $\varphi \in L_1^{\gamma}$, $\varphi \in L_2^{\gamma}$ непрерывна и ограничена. Следовательно, $\mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi$ непрерывна и принадлежит $\mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$. Так как $\mathbf{F}_{\gamma}u = \mathbf{F}_{\gamma}\mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi$, то $u = \mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi$ за исключением весовой лебеговой меры нуль, но так как обе функции непрерывны, то $u = \mathbf{G}_{\gamma}^{2\alpha}\varphi$ везде, таким образом, $u \in \mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$, и, следовательно, $\mathcal{F}_{\alpha}^{\gamma} \subset \mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$. Обозначим через $\overline{\mathcal{F}_{\alpha}^{\gamma}}$ замыкание $\mathcal{F}_{\alpha}^{\gamma}$ в $\mathbf{P}_{\gamma}^{\alpha}$. Тогда

$\overline{\mathcal{F}_\alpha^\gamma}$ является функциональным пополнением $\mathcal{F}_\alpha^\gamma$. Нужно показать, что $\overline{\mathcal{F}_\alpha^\gamma} = \mathbf{P}_\gamma^\alpha$ и что это пополнение совершенно. Так как для каждого $u \in \mathbf{P}_\gamma^\alpha$ норма $||u||_{\alpha,\gamma}$ конечна, то каждое $u \in \mathbf{P}_\gamma^\alpha$ равно некоторому $v \in \overline{\mathcal{F}_\alpha^\gamma}$ всюду, за исключение множества лебеговой меры нуль. Однако и u, и v находятся в $\mathbf{P}_\gamma^\alpha$, поэтому из того, что u равно v всюду, за исключением множества лебеговой меры нуль, следует $||u-v||_{\alpha,\gamma} = 0$ и, следовательно, $u = v\,\text{exc.}\,\mathcal{A}_{2\alpha}^\gamma$. Таким образом, $\overline{\mathcal{F}_\alpha^\gamma} = \mathbf{P}_\gamma^\alpha$. □

Литература

1. Aronszajn N., Smith K. T. Functional spaces and functional completion. *Ann. Inst. Fourier* **6**, 125–185 (1956).

2. Aronszajn N., Smith K. T. Theory of Bessel Potentials, I. *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **11**, 385–475 (1961).

3. Flett T. M. Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces. *Proc. London Math. Soc.* **3** (22), 385–451 (1971).

4. Goldman M. L. On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz Potentials. *Complex Variables and Elliptic Equations* **55** (8–10), 817–832 (2010).

5. Ляхов Л. Н., Половинкина М. В. Пространство весовых потенциалов Бесселя. *Дифференциальные уравнения и динамические системы: сборник статей. Труды МИАН* **250**, 192–197 (2005).

6. Кудрявцев Л. Д., Никольский С. М. Пространства дифференцируемых функций многих переменных и теоремы вложения. *Анализ — 3. Итоги науки и техн. Сер.: Соврем. пробл. мат. фундам. направления* **26**, 5–157 (1988).

7. Shishkina E., Ekincioğlu I., Keskin C. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. *Integral Transforms and Special Functions* **32** (12), 932–947 (2021). https://doi.org/10.1080/10652469.2020.1867983

8. Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. Связь обобщенных потенциалов Бесселя и решения сингулярного уравнения теплопроводности. *Прикладная математика и физика* **54** (2), 89–97 (2022).

9. Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. Теория пространств обобщенных потенциалов Бесселя. *Владикавказский математический журнал* **24** (3), 62–77 (2022).

10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. *Интегралы и ряды*: в 3 т. Т. 1. Элементарные функции. Москва, Физматлит (2003).

Статья поступила в редакцию 29 сентября 2022 г.;
доработана 15 ноября 2022 г.;
рекомендована к печати 17 ноября 2022 г.

Контактная информация:

Джабраилов Ахмед Лечаевич — ст. преп.; ahmed_0065@mail.ru
Шишкина Элина Леонидовна — д-р физ.-мат. наук, доц., проф.; ilina_dico@mail.ru

On the generalized Bessel potential and perfect functional completion*

A. L. Dzhabrailov[1], *E. L. Shishkina*[2,3]

[1] Kadyrov Chechen State University, 32, ul. Sheripova, Grozny, 364024, Russian Federation
[2] Voronezh State University, 1, Universitetskaya pl., Voronezh, 394018, Russian Federation
[3] Belgorod State National Research University, 85, ul. Pobedy, Belgorod, 308015, Russian Federation

For citation: Dzhabrailov A. L., Shishkina E. L. On the generalized Bessel potential and perfect functional completion. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 2, pp. 200–211. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.202 (In Russian)

*The work of A. L. Dzhabrailov was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation under the state task FEGS-2020-0001.

The class of generalized Bessel potentials is the main object of study in this article. The generalized Bessel potential is a negative real power of the operator $(I-\Delta_\gamma)$, where $\Delta_\gamma = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k^{\gamma_k}} \frac{\partial}{\partial x_k} x_k^{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$ — Laplace — Bessel operator, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ — multi-index consisting of positive fixed real numbers. When solving various problems for differential equations, proving embedding theorems for some classes of functions, and inverting integral operators, there is a need to consider functions up to some small, from the point of view of the problem under consideration, set. Often a set of Lebesgue measure zero is taken as such a small set. However, often the sets of Lebesgue measure zero turn out to be too large to be neglected. For example, when solving a boundary problem, the behavior of the solution on the boundary is essential. In this regard, there was a need to construct complete classes of admissible functions suitable for solving specific problems. N. Aronshine and K. Smith presented two stages of constructing a functional completion. The first of these is finding a suitable class of exceptional sets. The second is to find the functions defined modulo these exceptional classes that need to be attached to get a complete functional class. It turns out that there can be infinitely many suitable exceptional classes in a particular problem, but each of them corresponds essentially to one functional completion. It is clear that the most suitable functional completion is the one whose exceptional class is the smallest, since then the functions will be defined with the best possible accuracy. Whenever such a minimal exceptional class exists, the corresponding functional completion is called a perfect completion. In this paper, perfect completions are constructed from the norm associated with the kernel of the generalized Bessel potential.

Keywords: generalized Bessel potential, perfect completion of spaces.

References

1. Aronszajn N., Smith K. T. Functional spaces and functional completion. *Ann. Inst. Fourier* **6**, 125–185 (1956).

2. Aronszajn N., Smith K. T. Theory of Bessel Potentials, I. *Ann. Inst. Fourier* **11**, 385–475 (1961).

3. Flett T. M. Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces. *Proc. London Math. Soc.* **3** (22), 385–451 (1971).

4. Goldman M. L. On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz Potentials. *Complex Variables and Elliptic Equations* **55** (8–10), 817–832 (2010).

5. Lyakhov L. N., Polovinkina M. V. The space of weighted Bessel potentials. *Proc. Steklov Math. Inst. Differential equations and dynamical systems: collected papers.* In: Trudy Mat. Inst. Steklova **250**, 192–197 (2005). (In Russian) [Eng. transl.: *Proc. Steklov Inst. Math.* **250** (2005), 178–182].

6. Kudryavtsev L. D., Nikol'skii S. M. Spaces of differentiable functions of several variables and imbedding theorems. *Analysis — 3. Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Sovremennye problemy matematiki fundamental'nyie napravleniia* **26**, 5–157 (1988).

7. Shishkina E., Ekincioğlu I., Keskin C. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation. *Integral Transforms and Special Functions* **32** (12), 932–947 (2021). https://doi.org/10.1080/10652469.2020.1867983

8. Dzhabrailov A. L., Shishkina E. L. Connection between generalized Bessel potentials and solutions to the singular heat equation. *Applied Mathematics and Physics* **54** (2), 89–97 (2022). (In Russian)

9. Dzhabrailov A. L., Shishkina E. L. The theory of spaces of generalized Bessel potentials. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* **24** (3), 62–77 (2022). (In Russian)

10. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series.* In 3 vols. Vol. 1. Elementary functions. Moscow, Fizmatlit Publ. (2003). (In Russian)

Received: September 29, 2022
Revised: November 15, 2022
Accepted: November 17, 2022

Authors' information:

Akhmed L. Dzhabrailov — ahmed_0065@mail.ru
Elina L. Shishkina — ilina_dico@mail.ru