УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3
MSC 60F05

О вероятностях больших уклонений комбинаторных сумм независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Линника*

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Фролов А. Н.* О вероятностях больших уклонений комбинаторных сумм независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Линника // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3. С. 545–553. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.308

Получены новые результаты об асимптотическом поведении вероятностей больших уклонений комбинаторных сумм независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Линника. Найдена зона, в которой вероятности больших уклонений эквивалентны хвосту стандартного нормального закона. Ранее подобные результаты были получены автором при выполнении условия Бернштейна. При доказательстве новых результатов использован метод усечений.

Ключевые слова: вероятности больших уклонений, комбинаторная центральная предельная теорема, комбинаторная сумма.

1. Введение. Пусть $\{(X_{nij}), 1 \leqslant i,j \leqslant n, n = 2,3,\ldots\}$ — последовательность матриц независимых случайных величин, а $\{\vec{\pi}_n = (\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(n))$, $n = 2,3,\ldots\}$ — последовательность случайных перестановок чисел $1,2,\ldots,n$. Пусть $\vec{\pi}_n$ имеет равномерное распределение на множестве всех перестановок $1,2,\ldots,n$ и не зависит от (X_{nij}) для любого n. Определим комбинаторную сумму S_n соотношением

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni\pi_n(i)}.$$

Отметим, что если распределения X_{nij} совпадают для всех $1 \leqslant j \leqslant n$ при всех n, то S_n имеет такое же распределение, как сумма независимых случайных величин. Этот случай хорошо исследован, но его следует принимать во внимание при оценке оптимальности полученных результатов.

При определенных условиях последовательность распределений нормализованных комбинаторных сумм слабо сходится к нормальному закону. Любой подобный результат называется комбинаторной центральной предельной теоремой (ЦПТ). Исследования в этом направлении начались давно. Комбинаторной ЦПТ посвящены работы Вальда и Вольфовица [1], Нётера [2], Хёффдинга [3], Мото [4], Колчина и Чистякова [5]. Позднее были получены неасимптотические оценки типа неравенств Берри — Эссеена и Эссеена. Подобные результаты получены Больтхаузеном [6], фон

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00078, https://rscf.ru/project/23-21-00078/.

Баром [7], Хо и Ченом [8], Голдстейном [9], Неммани и Санторнчостом [10], Неммани и Ратанавонгом [11], Ченом, Голдстейном и Шао [12], Ченом и Фангом [13], Фроловым [14, 15], а для случайного числа слагаемых — Фроловым [16].

Оценки в ЦПТ дают возможность получить асимптотику вероятностей больших уклонений в логарифмических зонах. Обычно в этом случае говорят об умеренных уклонениях. Такие результаты для комбинаторных сумм были получены автором в [17].

В работе автора [18] впервые были получены результаты об асимптотическом поведении вероятностей больших уклонений комбинаторных сумм в степенных зонах. Там предполагалось, что случайные величины удовлетворяют некоторому аналогу условия Бернштейна. За исключением отдельных частных случаев комбинаторные суммы не имеют независимых приращений. Поэтому классические методы теории суммирования независимых случайных величин трудно использовать. В [18] были получены оценки производящей функции моментов и ее логарифмических производных самой нормированной комбинаторной суммы, а не отдельных слагаемых. Это и позволило получить соответствующие результаты.

Условие Бернштейна — это одна из форм условия существования экспоненциального момента. Естественной задачей является получение новых результатов об асимптотике вероятностей больших уклонений при его нарушении. Этому и посвящена настоящая работа. Мы заменим условие Бернштейна более слабым условием Линника. Для доказательства результатов мы будем использовать метод усечений.

2. Результаты. Пусть $\{(X_{nij}), 1 \leqslant i, j \leqslant n, n = 2, 3, \ldots\}$ — последовательность матриц независимых случайных величин такая, что

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E} X_{nij} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E} X_{nij} = 0 \tag{1}$$

для любого n. Пусть $\{\vec{\pi}_n = (\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(n)),\ n = 2, 3, \ldots\}$ — последовательность случайных перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$. Предположим, что $\vec{\pi}_n$ имеет равномерное распределение на множестве перестановок P_n и не зависит от (X_{nij}) для любого n.

Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni\pi_n(i)}.$$

Несложно проверить, что

$$\mathbf{E} S_n = 0, \quad \mathbf{D} S_n = \mathbf{E} S_n^2 - (\mathbf{E} S_n)^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} (\mathbf{E} X_{nij})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{D} X_{nij}.$$

Таким образом, условие (1) обеспечивает центрированность комбинаторных сумм. Делая замену $\mathbf{D} X_{nij} = \mathbf{E} X_{nij}^2 - (\mathbf{E} X_{nij})^2$ в последней формуле, мы получим

$$\mathbf{D} S_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} (\mathbf{E} X_{nij})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E} X_{nij}^2.$$

Если $\mathbf{D}S_n \to \infty$, то главной частью дисперсии будет нормированная сумма вторых моментов

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}X_{nij}^2.$$

Поэтому в дальнейшем $\{B_n\}$ будет использоваться в качестве нормирующей последовательности для S_n.

Далее мы будем предполагать, что у слагаемых существуют все моменты. Положим

$$\gamma_n = \max\left\{\max_{i,j} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{B_n}}\mathbf{E}|X_{nij}|,\ \max_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E}X_{nij}^2}{B_n},\ \max_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{E}X_{nij}^2}{B_n},\ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\mathbf{E}|X_{nij}|^3}{\sqrt{n}B_n^{3/2}}\right\}. \quad (2)$$

Отметим, что $\gamma_n \geqslant 1$. Это следует из того, что $nB_n = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}X_{nij}^2 \leqslant n \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{E}X_{nij}^2$.

Следующий результат был получен в работе автора [18].

Теорема 1. *Пусть $\{M_n\}$ — неубывающая последовательность положительных постоянных такая, что для $s = 1, 2, 3$ неравенства*

$$\left|\mathbf{E}X_{nij}^k\right| \leqslant Dk!M_n^{k-s}\mathbf{E}|X_{nij}|^s \quad (3)$$

выполняются для всех $k \geqslant s$, всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и всех $n \geqslant 2$, где D — абсолютная положительная постоянная.

Тогда для любой последовательности вещественных чисел $\{u_n\}$ такой, что $u_n \to \infty$, $u_n^3 = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$ и $u_n = o(\sqrt{B_n}/M_n)$ при $n \to \infty$, выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant u_n\sqrt{B_n}\right) \sim 1 - \Phi(u_n) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad (4)$$

где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения.

Условие $u_n^3 = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$ является естественным для соотношения (4), представляющего собой точную (не логарифмическую) асимптотику больших уклонений. Если предположить, что все X_{nij} распределены одинаково, то это условие превратится в оптимальное условие $u_n = o(n^{1/6})$.

Условие (3) аналогично условию Бернштейна, являющемуся формой экспоненциального моментного условия. В [18] приведены некоторые варианты этого условия, а также примеры случайных величин, удовлетворяющих условию теоремы 1. В частности, к ним относятся ограниченные случайные величины. В последнем случае одним из важных примеров комбинаторной суммы является коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

Наш главный результат — следующая теорема. В ней условие Бернштейна заменяется более слабым условием Линника, что расширяет область ее применимости. Например, распределение Вейбулла с параметром α, возникающее, в частности, как предельное распределение в теории экстремальных порядковых статистик, при $\alpha < 1$ удовлетворяет условию Линника, но не удовлетворяет условию Бернштейна.

Теорема 2. *Пусть для некоторого $\beta \in (0, 1)$ неравенства*

$$\mathbf{E}e^{|X_{nij}|^\beta} \leqslant C\mathbf{E}|X_{nij}|^s \quad (5)$$

выполняются для $s = 1,2,3$, всех $1 \leqslant i,j \leqslant n$ и всех $n \geqslant 2$, где C — абсолютная положительная постоянная.

Пусть $\{u_n\}$ — последовательность вещественных чисел такая, что $u_n \to \infty$, $u_n^3 = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$, $u_n = o(B_n^{\beta/(2(2-\beta))})$ и $\ln(nc_n+1) = o(u_n^\beta B_n^{\beta/2})$ при $n \to \infty$, где

$$c_n = \frac{1}{n}\max_i \sum_{j=1}^n \varphi_{nij} + \frac{1}{n}\max_j \sum_{i=1}^n \varphi_{nij} + \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \varphi_{nij},$$

$$\varphi_{nij} = \mathbf{E}e^{|X_{nij}|^\beta} I\{|X_{nij}| \geqslant u_n\sqrt{B_n}\}.$$

Тогда выполняется соотношение (4).

Условие (5) выполнено, если для любого i,j,n случайная величина X_{nij} может иметь одно из k заданных распределений. Кроме того, если существуют положительные постоянные A и B такие, что $\mathbf{E}e^{|X_{nij}|^\beta} \leqslant A$ и $\mathbf{E}|X_{nij}|^s \geqslant B$ для всех i,j,n и s, то условие (5) выполнено.

Если X_{nij} одинаково распределены для всех i,j,n, то по теореме 2 соотношение (4) будет выполнено при $u_n = o(n^\alpha)$, где $\alpha = \min\{1/6, \beta/(2(2-\beta))\}$. Из работы Линника [19] известно, что в этом случае при $\beta \in (0,1/2]$ условие Линника является оптимальным для выполнения соотношения (4) в зоне $u_n = o(n^{\beta/(2(2-\beta))})$, а при $\beta > 1/2$ для этого требуются дополнительные условия. Таким образом, условия теоремы 2 неулучшаемы в этом случае.

Замечание 1. *Заключение теоремы 2 остается справедливым при $\beta = 1$. При этом нужно заменить c_n нулем.*

3. Доказательства. Перейдем к доказательствам наших результатов.

Доказательство теоремы 2. Положим $y_n = u_n\sqrt{B_n}$, $\overline{X}_{nij} = X_{nij}I\{|X_{nij}| < y_n\}$, $\tilde{X}_{nij} = X_{nij}I\{|X_{nij}| \geqslant y_n\}$ и $T_n = \sum\limits_{i=1}^n \overline{X}_{ni\pi_n(i)}$. Пусть $B_0 = \bigcap\limits_{i=1}^n \{X_{ni\pi_n(i)} = \overline{X}_{ni\pi_n(i)}\}$ и $B_1 = \bigcup\limits_{i=1}^n \{X_{ni\pi_n(i)} \neq \overline{X}_{ni\pi_n(i)}\}$. Мы имеем

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant y_n) = \mathbf{P}(\{S_n \geqslant y_n\} \cap B_0) + \mathbf{P}(\{S_n \geqslant y_n\} \cap B_1) \leqslant \mathbf{P}(T_n \geqslant y_n) + \mathbf{P}(B_1) \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{P}(T_n \geqslant y_n) + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(|X_{ni\pi_n(i)}| \geqslant y_n) = \mathbf{P}(T_n \geqslant y_n) + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}(|X_{nij}| \geqslant y_n).$$

Аналогично мы получим

$$\mathbf{P}(T_n \geqslant y_n) \leqslant \mathbf{P}(S_n \geqslant y_n) + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}(|X_{nij}| \geqslant y_n).$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$|\mathbf{P}(S_n \geqslant y_n) - \mathbf{P}(T_n \geqslant y_n)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \mathbf{P}(|X_{nij}| \geqslant y_n). \tag{6}$$

Для всех $1 \leqslant i,j \leqslant n$ положим $\overline{a}_{nij} = \mathbf{E}\overline{X}_{nij}$, $\overline{\sigma}^2_{nij} = \mathbf{D}\overline{X}_{nij}$,

$$\overline{a}_{ni.} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \overline{a}_{nij}, \quad \overline{a}_{n.j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \overline{a}_{nij}, \quad \overline{a}_{n..} = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \overline{a}_{nij}, \quad \mu_{nij} = \overline{a}_{ni.} + \overline{a}_{n.j} - \overline{a}_{n..}.$$

Обозначим $Y_{nij} = \overline{X}_{nij} - \mu_{nij}$, $R_n = \sum\limits_{i=1}^n Y_{ni\pi_n(i)}$, $\overline{B}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i,j=1}^n \mathbf{E}Y^2_{nij}$.

Покажем сначала, что выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(R_n \geqslant u_n\sqrt{B_n}) \sim 1-\Phi(u_n) \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{7}$$

Для этого мы применим теорему 1, а при проверке ее условий мы используем следующий результат.

Лемма 1. *Пусть $y>0$, $\beta\in(0,1)$, $\mu\in(-1,1)$, $\alpha>0$ и $a\in(0,1)$. Пусть X — случайная величина и $\overline{X}=XI\{|X|<y\}$. Предположим, что $\mathbf{E}e^{|X|^\beta}\leqslant \alpha\mathbf{E}|\overline{X}-\mu|^s$ при $s=1,2,3$ и $|\mu|\leqslant M\ln 2$, где $M=y^{1-\beta}/a$.*

Тогда

$$|\mathbf{E}(\overline{X}-\mu)^k|\leqslant C(a,\beta)\alpha k! M^{k-s}\mathbf{E}|\overline{X}-\mu|^s$$

для всех $k>s$ при $s=1,2,3$, где $C(a,\beta)=8(2+3^{1/\beta}((1-a)\beta)^{-1/\beta})$.

Доказательство. Для всех z из круга $|z|\leqslant ay^{\beta-1}=1/M$ и $s=1,2,3$ мы имеем

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{E}(\overline{X}-\mu)^s e^{z(\overline{X}-\mu)}|\leqslant \mathbf{E}|\overline{X}-\mu|^s e^{|z|(|\overline{X}|+|\mu|)}\leqslant 2^{s-1}e^{|z||\mu|}\mathbf{E}(|\overline{X}|^s+|\mu|^s)e^{|z||\overline{X}|}\leqslant\\
&\leqslant 8\mathbf{E}(|X|^s+1)e^{|z||\overline{X}|^\beta y^{1-\beta}}\leqslant 8\mathbf{E}|X|^s e^{a|X|^\beta}+8\mathbf{E}e^{a|\overline{X}|^\beta}\leqslant\\
&\leqslant 8\mathbf{E}e^{|X|^\beta}\sup_{x\geqslant 0}x^s e^{(a-1)x^\beta}+8\mathbf{E}e^{|X|^\beta}I\{|X|<y\}+8\mathbf{P}(|X|\geqslant y)\leqslant\\
&\leqslant 8\left(\frac{s^{1/\beta}}{((1-a)\beta)^{1/\beta}}+2\right)\mathbf{E}e^{|X|^\beta}\leqslant C(a,\beta)\alpha\mathbf{E}|\overline{X}-\mu|^s.
\end{aligned}$$

В силу неравенств Коши для коэффициентов разложения аналитической функции $\mathbf{E}(\overline{X}-\mu)^s e^{z(\overline{X}-\mu)}$ мы получаем требуемое. □

Покажем, что условие (3) выполнено для Y_{nij} с $M_n=y_n^{1-\beta}/a$. Учитывая условие (5), нам достаточно показать, что $|\mu_{nij}|\leqslant M_n\ln 2$ и $\mathbf{E}|X_{nij}|^s\leqslant\alpha\mathbf{E}|\overline{X}_{nij}-\mu_{nij}|^s$ при $s=1,2,3$.

Функции xe^{-x^β}, $x^2e^{-x^\beta}$ и $x^3e^{-x^\beta}$ убывают при $x\geqslant x_0>0$. Далее мы считаем, что $y_n>x_0$.

Принимая во внимание условие (1), для всех i мы имеем

$$n|\overline{a}_{ni.}|\leqslant|\sum_{j=1}^n\mathbf{E}\overline{X}_{nij}|=|\sum_{j=1}^n\mathbf{E}\tilde{X}_{nij}|\leqslant\sum_{j=1}^n\mathbf{E}|X_{nij}|I\{|X_{nij}|\geqslant y_n\}\leqslant y_n e^{-y_n^\beta}\sum_{j=1}^n\varphi_{nij}. \tag{8}$$

Аналогично мы получим

$$n|\overline{a}_{n.j}|\leqslant y_n e^{-y_n^\beta}\sum_{i=1}^n\varphi_{nij} \ \text{ для всех } j \quad\text{и}\quad n^2|\overline{a}_{n..}|\leqslant y_n e^{-y_n^\beta}\sum_{i,j=1}^n\varphi_{nij}. \tag{9}$$

Следовательно,

$$\max_{i,j}|\mu_{nij}|\leqslant c_n y_n e^{-y_n^\beta}=\varepsilon_n=o(1). \tag{10}$$

Далее, для $s=1,2,3$ и всех i и j неравенства

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}|\tilde{X}_{nij}|^s=\mathbf{E}|X_{nij}|^s I\{|X_{nij}|\geqslant y_n\}\leqslant y_n^s e^{-y_n^\beta}\varphi_{nij}\leqslant\\
&\leqslant y_n^3 e^{-y_n^\beta}C\mathbf{E}|X_{nij}|^s\leqslant 0.05\mathbf{E}|X_{nij}|^s,
\end{aligned}$$

$$|\mu_{nij}|^s \leqslant 0.05C^{-1} \leqslant 0.05C^{-1}\mathbf{E}e^{|X_{nij}|^\beta} \leqslant 0.05\mathbf{E}|X_{nij}|^s \tag{11}$$

выполнены для всех достаточно больших n. Поэтому

$$\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leqslant 3^{s-1}(\mathbf{E}|\overline{X}_{nij}-\mu_{nij}|^s + \mathbf{E}|\tilde{X}_{nij}|^s + |\mu_{nij}|^s) \leqslant 9\mathbf{E}|\overline{X}_{nij}-\mu_{nij}|^s + 0.9\mathbf{E}|X_{nij}|^s.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leqslant 90\mathbf{E}|\overline{X}_{nij}-\mu_{nij}|^s$. Кроме того, $\mathbf{E}|\overline{X}_{nij}-\mu_{nij}|^s \leqslant 4(\mathbf{E}|\overline{X}_{nij}|^s + |\mu_{nij}|^s) \leqslant 5\mathbf{E}|X_{nij}|^s$. Таким образом, для $s=1,2,3$ и всех i и j неравенства

$$0.2\mathbf{E}|\overline{X}_{nij}-\mu_{nij}|^s \leqslant \mathbf{E}|X_{nij}|^s \leqslant 90\mathbf{E}|\overline{X}_{nij}-\mu_{nij}|^s \tag{12}$$

выполнены для всех достаточно больших n. Следовательно, по лемме 1 условие (3) выполнено для Y_{nij} с $M_n = y_n^{1-\beta}/a$.

Оценим теперь разность дисперсий B_n и $\overline{B}_n$. Мы имеем

$$B_n - \overline{B}_n = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n (\mathbf{E}X_{nij}^2 - \mathbf{E}Y_{nij}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n (\mathbf{E}X_{nij}^2 - \mathbf{E}(\overline{X}_{nij}-\mu_{nij})^2) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n (\mathbf{E}\tilde{X}_{nij}^2 - 2\mu_{nij}\mathbf{E}\overline{X}_{nij} + \mu_{nij}^2) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}\tilde{X}_{nij}^2 - \frac{2}{n}\sum_{i,j=1}^n \mu_{nij}\overline{a}_{nij} + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \mu_{nij}^2.$$

Далее,

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \mu_{nij}\overline{a}_{nij} = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \overline{a}_{ni.}\overline{a}_{nij} + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \overline{a}_{n.j}\overline{a}_{nij} - \overline{a}_{n..}\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^n \overline{a}_{nij} =$$
$$= \sum_{i=1}^n \overline{a}_{ni.}^2 + \sum_{j=1}^n \overline{a}_{n.j}^2 - n\overline{a}_{n..}^2$$

В силу соотношений (8)–(11) мы получим

$$\sum_{i=1}^n \overline{a}_{ni.}^2 \leqslant n\varepsilon_n^2, \quad \sum_{j=1}^n \overline{a}_{n.j}^2 \leqslant n\varepsilon_n^2, \quad n\overline{a}_{n..}^2 \leqslant n\varepsilon_n^2, \quad \sum_{i,j=1}^n \mu_{nij}^2 \leqslant n^2\varepsilon_n^2,$$
$$\sum_{i,j=1}^n \mathbf{E}\tilde{X}_{nij}^2 \leqslant y_n n^2 \varepsilon_n. \tag{13}$$

Следовательно,

$$|B_n - \overline{B}_n| \leqslant 8y_n n\varepsilon_n.$$

Кроме того,

$$y_n n\varepsilon_n(1-\Phi(u_n))^{-1} = \exp\{-y_n^\beta + 2\ln y_n + \ln(nc_n) + \frac{u_n^2}{2} + \ln\Big(\sqrt{2\pi}u_n\Big)\} =$$
$$= \exp\{-y_n^\beta + o(u_n^\beta B_n^{\beta/2})\} \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{14}$$

В частности, $B_n \sim \overline{B}_n$. Учитывая неравенства (12), мы заключаем, что величина $\overline{\gamma}$, определенная по формуле (2) с заменой X_{nij} на Y_{nij}, удовлетворяет соотношению $\gamma_n = O(\overline{\gamma}_n)$ при $n \to \infty$.

По теореме 1 соотношение (7) выполнено для любой последовательности вещественных чисел $\{u_n\}$ такой, что $u_n \to \infty$, $u_n^3 = o(\sqrt{n}/\overline{\gamma}_n) = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$ и $u_n = o(\sqrt{\overline{B}_n}/M_n) = o(B_n^{\beta/(2(2-\beta))})$ при $n \to \infty$.

Далее, мы имеем

$$\mathbf{P}(T_n \geqslant y_n) = \mathbf{P}(R_n + n\overline{a}_{n..} \geqslant y_n) = \mathbf{P}(R_n \geqslant v_n\sqrt{\overline{B}_n}),$$

где

$$v_n = \frac{y_n - n\overline{a}_{n..}}{\sqrt{\overline{B}_n}} = \frac{u_n\sqrt{\overline{B}_n + O(y_n n\varepsilon_n)} + O(n\varepsilon_n)}{\sqrt{\overline{B}_n}} \sim u_n \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Так как

$$\frac{v_n^2}{2} = \frac{u_n^2(\overline{B}_n + O(y_n n\varepsilon_n)) + O(u_n\sqrt{\overline{B}_n} n\varepsilon_n)}{2\overline{B}_n} = \frac{u_n^2}{2} + o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

мы заключаем, что $1 - \Phi(v_n) \sim 1 - \Phi(u_n)$ при $n \to \infty$. Учитывая (7), мы получим

$$\mathbf{P}(T_n \geqslant y_n) = \mathbf{P}(R_n \geqslant v_n\sqrt{\overline{B}_n}) \sim 1 - \Phi(u_n) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из неравенств (6) и (13) и соотношения (14) следует, что

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant y_n) = \mathbf{P}(T_n \geqslant y_n) + O(y_n n\varepsilon_n) = (1 - \Phi(u_n))(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема полностью доказана. □

Доказательство замечания 1. Если $\beta = 1$, то по лемме 1 с $\overline{X} = X$ и $\mu = 0$ (усечение и центрирование в этом случае не требуются) условие (3) выполнено с $M_n = 1/a$. Замечание 1 следует из теоремы 1. Условия на c_n в этом случае излишни. □

Автор выражает благодарность рецензентам за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению текста статьи.

Литература

1. Wald A., Wolfowitz J. Statistical tests based on permutations of observations. *Ann. Math. Statist.* **15**, 358–372 (1944).

2. Noether G. E. On a theorem by Wald and Wolfowitz. *Ann. Math. Statist.* **20**, 455–458 (1949).

3. Hoeffding W. A combinatorial central limit theorem. *Ann. Math. Statist.* **22**, 558–566 (1951).

4. Motoo M. On Hoeffding's combinatorial central limit theorem. *Ann. Inst. Statist. Math.* **8**, 145–154 (1957).

5. Колчин В. Ф., Чистяков В. П. Об одной комбинаторной предельной теореме. *Теория вероятностей и ее применение* **18** (4), 767–777 (1973).

6. Bolthausen E. An estimate of the remainder in a combinatorial central limit theorem. *Zeitschrift für Wahrsch. und Verwandte Geb.* **66**, 379–386 (1984).

7. von Bahr B. Remainder term estimate in a combinatorial central limit theorem. *Zeitschrift für Wahrsch. und Verwandte Geb.* **35**, 131–139 (1976).

8. Ho S. T., Chen L. H. Y. An L_p bounds for the remainder in a combinatorial central limit theorem. *Ann. Probab.* **6**, 231–249 (1978).

9. Goldstein L. Berry-Esseen bounds for combinatorial central limit theorems and pattern occurrences, using zero and size biasing. *J. Appl. Probab.* **42**, 661–683 (2005).

10. Neammanee K., Suntornchost J. A uniform bound on a combinatorial central limit theorem. *Stoch. Anal. Appl.* **3**, 559–578. (2005).

11. Neammanee K., Rattanawong P. A constant on a uniform bound of a combinatorial central limit theorem. *J. Math. Research* **1**, 91–103 (2009).

12. Chen L. H. Y., Goldstein L., Shao Q. M. *Normal approximation by Stein's method.* Springer (2011).

13. Chen L. H. Y., Fang X. On the error bound in a combinatorial central limit theorem. *Bernoulli* **21** (1), 335–359 (2015).

14. Frolov A. N. Esseen type bounds of the remainder in a combinatorial CLT. *J. Statist. Planning and Inference* **149**, 90–97 (2014).

15. Frolov A. N. Bounds of the remainder in a combinatorial central limit theorem. *Statist. Probab. Letters* **105**, 37–46 (2015).

16. Фролов А. Н. О вероятностях умеренных уклонений комбинаторных сумм. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **2** (60), вып. 1, 60–67 (2015).

17. Frolov A. N. On Esseen type inequalities for combinatorial random sums. *Communications in Statistics-Theory and Methods* **46** (12), 5932–5940 (2017).

18. Frolov A. N. On large deviations for combinatorial sums. *J. Statist. Planning and Inference* **217**, 24–32 (2022).

19. Линник Ю. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин I, II, III. *Теория вероятностей и ее применение* **6** (2), 145–163 (1961); **6** (4), 377–391 (1961); **7** (2), 121–134 (1962).

Статья поступила в редакцию 2 января 2023 г.;
доработана 18 января 2023 г.;
рекомендована к печати 16 февраля 2023 г.

Контактная информация:

Фролов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

On probabilities of large deviations of combinatorial sums of independent random variables satisfying Linnik's condition*

A. N. Frolov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Frolov A. N. On probabilities of large deviations of combinatorial sums of independent random variables satisfying Linnik's condition. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 3, pp. 545–553.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.308 (In Russian)

We derive new results on asymptotic behaviour for probabilities of large deviations of combinatorial sums of independent random variables satisfying Linnik's condition. We find zones in which these probabilities are equivalent to the tail of the standard normal law. The author earlier obtained such results under Bernstein's condition. The truncations method is applied in proofs of results.

Keywords: probabilities of large deviations, combinatorial central limit theorem, combinatorial sums.

*The research was supported by Russian Science Foundation, Project no. 23-21-00078, https://rscf.ru/project/23-21-00078/.

References

1. Wald A., Wolfowitz J. Statistical tests based on permutations of observations. *Ann. Math. Statist.* **15**, 358–372 (1944).

2. Noether G. E. On a theorem by Wald and Wolfowitz. *Ann. Math. Statist.* **20**, 455–458 (1949).

3. Hoeffding W. A combinatorial central limit theorem. *Ann. Math. Statist.* **22**, 558–566 (1951).

4. Motoo M. On Hoeffding's combinatorial central limit theorem. *Ann. Inst. Statist. Math.* **8**, 145–154 (1957).

5. Kolchin V. F., Chistyakov V. P. On a combinatorial limit theorem. *Teoriia veroiatnostei i ee primenenie* **18** (4), 767–777 (1973). (In Russian) [Engl. trans.: *Theory of Probability and its Applications* 18, (4), 728–7391974. https://doi.org/10.1137/1118093].

6. Bolthausen E. An estimate of the remainder in a combinatorial central limit theorem. *Zeitschrift für Wahrsch. und Verwandte Geb.* **66**, 379–386 (1984).

7. von Bahr B. Remainder term estimate in a combinatorial central limit theorem. *Zeitschrift für Wahrsch. und Verwandte Geb.* **35**, 131–139 (1976).

8. Ho S. T., Chen L. H. Y. An L_p bounds for the remainder in a combinatorial central limit theorem. *Ann. Probab.* **6**, 231–249 (1978).

9. Goldstein L. Berry-Esseen bounds for combinatorial central limit theorems and pattern occurrences, using zero and size biasing. *J. Appl. Probab.* **42**, 661–683 (2005).

10. Neammanee K., Suntornchost J. A uniform bound on a combinatorial central limit theorem. *Stoch. Anal. Appl.* **3**, 559–578 (2005).

11. Neammanee K., Rattanawong P. A constant on a uniform bound of a combinatorial central limit theorem. *J. Math. Research* **1**, 91–103 (2009).

12. Chen L. H. Y., Goldstein L., Shao Q. M. *Normal approximation by Stein's method.* Springer (2011).

13. Chen L. H. Y., Fang X. On the error bound in a combinatorial central limit theorem. *Bernoulli* **21** (1), 335–359 (2015).

14. Frolov A. N. Esseen type bounds of the remainder in a combinatorial CLT. *J. Statist. Planning and Inference* **149**, 90–97 (2014).

15. Frolov A. N. Bounds of the remainder in a combinatorial central limit theorem. *Statist. Probab. Letters* **105**, 37–46 (2015).

16. Frolov A. N. On the probabilities of moderate deviations for combinatorial sums. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (60), iss. 1, 60–67 (2015). (In Russian) [Engl. trans.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **48**, iss. 1, 23–28 (2015). https://doi.org/10.3103/S1063454115010045].

17. Frolov A. N. On Esseen type inequalities for combinatorial random sums. *Communications in Statistics-Theory and Methods* **46** (12), 5932–5940 (2017).

18. Frolov A. N. On large deviations for combinatorial sums. *J. Statist. Planning and Inference* **217**, 24–32 (2022).

19. Linnik Iu. V. Limit theorems for sums of independent random variables. I, II, III. *Teoriia veroiatnostei i ee primenenie* **6** (2), 145–163 (1961); **6** (4), 377–391 (1961); **7** (2), 121–134 (1962). (In Russian)

Received: January 2, 2023
Revised: January 18, 2023
Accepted: February 16, 2023

Author's information:

Andrei N. Frolov — Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru