УДК 517.537 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3
MSC 30A10, 30C10, 30C15

Неравенства для производных рациональных функций с заданными полюсами и ограниченными нулями

У. М. Ахангер, В. М. Шах

Центральный университет Кашмира,
Индия, 191201, Гандербал

Для цитирования: *Ахангер У. М., Шах В. М.* Неравенства для производных рациональных функций с заданными полюсами и ограниченными нулями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3. С. 554–567. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.309

В статье получены неравенства для производных рациональных функций с заданными полюсами и ограниченными нулями, уточняющие и обобщающие известные классические результаты. Вместо предположения о том, что рациональная функция $r(z)$ с заданными полюсами имеет в начале координат нуль порядка s, предполагается, что функция имеет нуль кратности s в любой точке внутри единичной окружности, тогда как остальные нули находятся внутри или вне круга радиуса k. Помимо обобщения некоторых неравенств для рациональных функций в статье как частные случаи уточняются полиномиальные неравенства.

Ключевые слова: неравенства, многочлены, рациональные функции, полюса, нули.

1. Введение. Пусть $\mathcal{P}_n$ — класс всех комплексных полиномов $p(z) := \sum_{j=0}^{n} c_j z^j$ степени не более n. Пусть для положительного действительного числа k $\mathcal{D}_k$ обозначает область внутри $\delta\mathcal{D}_k := \{z : |z| = k\}$, а $\overline{\mathcal{D}_k}$ является замыканием $\mathcal{D}_k$. В частности, мы пишем $\mathcal{D}$ вместо $\mathcal{D}_1$ и $M(f, 1)$ для $\max\limits_{z\in\delta\mathcal{D}}|f(z)|$. Положим для $a_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, \ldots, n$

$$w(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - a_j); \quad \mathcal{B}(z) := \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{1 - \overline{a_j}z}{z - a_j}\right)$$

и

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \left\{\frac{p(z)}{w(z)} : \quad p \in \mathcal{P}_n\right\}.$$

Таким образом, $\mathcal{R}_n$ — это множество всех рациональных функций с полюсами не более чем $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и с конечным пределом в ∞. Во всей статье предполагается, что $a_j \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}$. Далее заметим, что $\mathcal{B}(z) \in \mathcal{R}_n$. Если $p \in \mathcal{P}_n$ и p' является производной от p, то

$$M(p', 1) \le nM(p, 1). \tag{1}$$

(1) — известное точное неравенство Бернштейна (для справки см. [1, 2]). Если мы ограничимся классом полиномов $p \in \mathcal{P}_n$ таких, что $p(z) \neq 0$ при $z \in \mathcal{D}$, то неравенство (1) можно уточнить. На самом деле, Эрдош предположил, а впоследствии

Лакс доказал [3], что если $p(z)$ не обращается в нуль в $\mathcal{D}$, то

$$M(p',1) \leq \frac{n}{2} M(p,1). \tag{2}$$

Туран показал [4], что в случае, если $p(z)$ не обращается в нуль в $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}$,

$$M(p',1) \geq \frac{n}{2} M(p,1). \tag{3}$$

Для многочленов $p \in \mathcal{P}_n$, с $p(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{D}_k$, $k \geq 1$ Маликом [5] доказано

$$M(p',1) \leq \frac{n}{1+k} M(p,1), \tag{4}$$

где в случае $p(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}_k}$, $k \leq 1$, им получено неравенство

$$M(p',1) \geq \frac{n}{1+k} M(p,1). \tag{5}$$

Азиз и Шах [6] обобщили (5) и доказали, что если $p(z)$ имеет все нули в $\overline{\mathcal{D}_k}$, $k \leq 1$, с s-кратными нулями в начале координат, то

$$M(p',1) \geq \frac{n+sk}{1+k} M(p,1). \tag{6}$$

В литературе [7–9] существуют улучшения и обобщения приведенных выше результатов. Ли, Мохапатра и Родригес [8] распространили неравенства (1)–(3) на рациональные функции $r \in \mathcal{R}_n$ с заданными полюсами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ с заменой z^n на произведение Бляшке $\mathcal{B}(z)$. Расширенные варианты этих неравенств можно записать как: для $r \in \mathcal{R}_n$ и $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \leq |\mathcal{B}'(z)| M(r,1). \tag{7}$$

В случае $r(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{D}$, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \leq \frac{1}{2} |\mathcal{B}'(z)| M(r,1) \tag{8}$$

и $r(z) \neq 0$ для $z \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}$,

$$|r'(z)| \geq \frac{1}{2} \Big\{ |\mathcal{B}'(z)| - (n-m) \Big\} |r(z)|, \text{ для } z \in \delta\mathcal{D}, \tag{9}$$

где m — количество нулей, а n — количество полюсов $r(z)$.

Азиз и Шах [10] рассмотрели случай рациональных функций, не обращающихся в нуль в круге $\mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}_k}, k \leq 1$, и обобщили неравенство (9), получив следующий результат.

Теорема A. Предположим, что $r \in \mathcal{R}_n$, имеет ровно n полюсов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и все нули r лежат в $\overline{\mathcal{D}_k}, k \leq 1$, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \geq \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{2m - n(1+k)}{1+k} \right\} |r(z)|, \tag{10}$$

где m — количество нулей r.

Этот результат является точным (наилучшим из возможных), и равенство выполняется для

$$r(z) = \frac{(z+k)^m}{(z-a)^n} \text{ и } \mathcal{B}(z) = \left(\frac{1-az}{z-a}\right)^n \text{ для } z \in \delta\mathcal{D} \text{ и } \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}.$$

Недавно Вали [11] предположил, что $r(z)$ имеет в начале координат нуль кратности s, и получил следующий результат, который является обобщением и уточнением (9).

Теорема Б. Предположим, что $r \in \mathcal{R}_n$, причем r имеет n полюсов в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и все нули лежат в $\overline{\mathcal{D}}$ с s-кратными нулями в начале координат. Тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \geq \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + (s+m-n) + \frac{|c_m| - |c_s|}{|c_m| + |c_s|}\right\}|r(z)|,$$

где m — количество нулей r. Результат точен, и равенство выполняется для

$$r(z) = \frac{z^s(z^{m-s}-1)}{(z-a)^n} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{B}(z) = \left(\frac{1-az}{z-a}\right)^n$$

при $z = 1$ и $|a| > 1$.

2. Основные результаты.

Теорема 1. Пусть $r \in \mathcal{R}_n$ такое, что $r(z) = \dfrac{p(z)}{w(z)}$, где $p(z) = (z-z_0)^s \sum\limits_{j=0}^{m-s} c_j z^j$ и все нули r лежат в $\mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_k, k > 1$, кроме нуля кратности s в z_0, $|z_0| \leq 1-\rho$, тогда для $n > \eta_0$ и $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \leq \frac{1}{2}\left[|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k+|z_0|)}{(k+1)(1-|z_0|)} - \frac{n(k+1)-2m}{k+1}\frac{|r(z)|^2}{(M(r,1))^2}\right]M(r,1), \tag{11}$$

где $\rho = \dfrac{2s(k+1)}{n(k+1)+2(s-m)}$ и $\eta_0 = \dfrac{2(m+sk)}{k+1}$.

Результат является наилучшим из возможных при $z_0 = 0$, и равенство выполняется для рациональной функции

$$r(z) = \frac{z^s(z^{m-s}+k)}{(z-a)^n} \text{ и } \mathcal{B}(z) = \left(\frac{1-az}{z-a}\right)^n,$$

вычисленной при $z = 1$ и $|a| > 1$.

Если предположить, что $r(z)$ имеет n нулей и полюс порядка n при $z = a$, $|a| > 1$, то

$$w(z) = (z-a)^n \qquad \text{и} \qquad \mathcal{B}(z) = \left(\frac{1-az}{z-a}\right)^n,$$

так что

$$r(z) = \frac{p(z)}{(z-a)^n}.$$

Это дает

$$r'(z) = \frac{-np(z) + (z-a)p'(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{-D_a p(z)}{(z-a)^{n+1}},$$

где $D_a p(z)$ — полярная производная от $p(z)$ относительно точки a, которая обобщает обычную производную в том смысле, что

$$p'(z) = \lim_{a \longrightarrow \infty} \frac{D_a p(z)}{a-z}.$$

Используя эти факты в теореме 1, мы получаем следующий результат.

Следствие 1. Пусть $p \in \mathcal{P}_n$ такое, что $p(z) = (z-z_0)^s \sum\limits_{j=0}^{ns} c_j z^j$, все нули которого находятся в $\mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_k, k > 1$, кроме нуля кратность s в точке z_0, $|z_0| \leq 1-\rho'$ тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$, $a \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}$ и $n > \eta_0'$

$$|D_a p(z)| \leq \frac{1+|a|}{2}\left[n + \frac{2s(k+|z_0|)}{(k+1)(1-|z_0|)} - \frac{n(k-1)}{k+1}\frac{|p(z)|^2}{(M(p,1))^2}\right]M(p,1), \tag{12}$$

где $\rho' = 1 - \dfrac{2s(k+1)}{n(k-1)+2s}$ и $\eta_0' = \dfrac{2sk}{k-1}$.

Если мы разделим обе части (12) на $|a|$ и положим $|a| \longrightarrow \infty$, следствие 1 сведется к результату, недавно доказанному авторами [12]. Также при $z_0 = 0$, имеем следствие из теоремы 1.

Следствие 2. Пусть $r \in \mathcal{R}_n$, что $r(z) = \dfrac{p(z)}{w(z)}$, где $p(z) = z^s \sum\limits_{j=0}^{m-s} c_j z^j$ имеет все нули в $\mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_k, k > 1$, кроме нуля кратности s в начале координат, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \leq \frac{1}{2}\left[|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2sk}{k+1} - \frac{n(k+)1) - 2m}{k+1}\frac{|r(z)|^2}{(M(r,1))^2}\right]M(r,1), \tag{13}$$

где $n > \dfrac{2(m+sk)}{k+1}$.

При $s = 0$ теорема 1 сводится к результату Азиза и Заргара [13, теорема 1]. Также из теоремы 1 при $s = 0$ следует результат, отличный от результата Азиза и Заргара [13].

Следствие 3. Пусть $r \in \mathcal{R}_n$ такое, что $r(z) = \dfrac{p(z)}{w(z)}$, где $p(z) = \sum\limits_{j=0}^{m} c_j z^j$ со всеми нулями в $\mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_k, k > 1$, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \leq \frac{1}{2}\left[|\mathcal{B}'(z)| + \left\{m - n - \frac{|c_0| - k^m|c_m|}{|c_0| + k^m|c_m|}\right\}\frac{|r(z)|^2}{(M(r,1))^2}\right]M(r,1). \tag{14}$$

В следствии 3 при $m = n$, взяв $r(z) = \dfrac{p(z)}{(z-a)^n}$ и действуя как указано выше, получаем следующее.

Следствие 4. Пусть $p \in \mathcal{P}_n$, что $p(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^j$ имеет все нули в $\mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_k, k > 1$, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$ и $a \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}$

$$|D_a p(z)| \leq \frac{1+|a|}{2}\left[n - \frac{|c_0| - k^n|c_n|}{|c_0| + k^n|c_n|}\frac{|p(z)|^2}{(M(p,1))^2}\right]|p(z)|. \tag{15}$$

Если мы разделим обе части (15) на $|a|$ и положим $|a| \longrightarrow \infty$, то получим

$$|p'(z)| \leq \frac{1}{2}\left[n - \frac{|c_0| - k^n|c_n|}{|c_0| + k^n|c_n|}\frac{|p(z)|^2}{(M(p,1))^2}\right]|p(z)|.$$

Далее докажем теорему.

Теорема 2. Предположим, что $r \in \mathcal{R}_n$, что $r(z) = \dfrac{p(z)}{w(z)}$, где $p(z) := (z - z_0)^s \sum_{j=0}^{m-s} c_j z^j$, $z_0 \in \mathcal{D}$, $0 \leq s < m$ и все нули r лежат в $\overline{\mathcal{D}_k}$, а $k \leq 1$ — ноль кратности s в точке z_0, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \geq \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k-|z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)} + \frac{2m - n(k+1)}{k+1}\right\}|r(z)|.$$

Результат точен при $z_0 = 0$, а равенство имеет место для рациональной функции

$$r(z) = \frac{z^s(z^{m-s}+k)}{(z-a)^n} \text{ и } \mathcal{B}(z) = \left(\frac{1-az}{z-a}\right)^n,$$

которая вычисляется при $z = 1$ и $a \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}$.

Подставляя вместо $r(z) = \dfrac{p(z)}{(z-a)^n}$, получаем следующее.

Следствие 5. Пусть $p \in \mathcal{P}_n$ такое, что $p(z) = (z-z_0)^s \sum_{j=0}^{n-s} c_j z^j$, $z_0 \in \mathcal{D}$, все нули которого находятся в $\overline{\mathcal{D}_k}, k \leq 1$, кроме нуля кратности s в точке z_0, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$ и $a \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}$

$$|D_a p(z)| \geq \frac{|a|-1}{k+1}\left\{n + s\left(\frac{k-|z_0|}{1+|z_0|}\right)\right\}|p(z)|.$$

При $z_0 = 0$ теорема 2 сводится к результату Вали [11, теорема 2.2]. Более того, при $s = 0$ теорема 2 сводится к теореме А. Азиза и Шаха [6].

Естественно задаться вопросом: есть ли возможность уточнения теоремы 2? В связи с этим имеет место следующий результат, показывающий, что уточнение теоремы 2 возможно только в случае $c_{m-s} \neq 0$.

Теорема 3. Предположим, что $r \in \mathcal{R}_n$ такое, что $r(z) = \dfrac{p(z)}{w(z)}$, где $p(z) := (z - z_0)^s \sum_{j=0}^{m-s} c_j z^j$, $z_0 \in \mathcal{D}$, и все нули r лежат в $\overline{\mathcal{D}_k}$, $k \le 1$, с кратным нулем s в z_0, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \ge \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k - |z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)} + \frac{2m - n(k+1)}{k+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{2k}{k+1}\left(\frac{k^{m-s}|c_{m-s}| - |c_0|}{k^{m-s}|c_{m-s}| + |c_0|}\right)\right\}|r(z)|, \tag{16}$$

где m — количество нулей $r(z)$.

Следствие 6. Пусть $p \in \mathcal{P}_n$ такое, что $p(z) = (z - z_0)^s \sum_{j=0}^{n-s} c_j z^j$, все нули которого лежат в $\overline{\mathcal{D}_k}, k \le 1$, кроме нуля кратности s в z_0, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$ и $a \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathcal{D}}$

$$|D_a p(z)| \ge \frac{|a| - 1}{k+1}\left\{n + s\left(\frac{k - |z_0|}{1 + |z_0|}\right) + k\left(\frac{k^{n-s}|c_{n-s}| - |c_0|}{k^{n-s}|c_{n-s}| + |c_0|}\right)\right\}|p(z)|.$$

Разделив обе части на $|a|$ и полагая $|a| \longrightarrow \infty$, получаем следующий результат.

Следствие 7. Пусть $p \in \mathcal{P}_n$ такое, что $p(z) = (z - z_0)^s \sum_{j=0}^{n-s} c_j z^j$, все нули которого лежат в $\overline{\mathcal{D}_k}, k \le 1$, кроме нуля кратности s в z_0, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|p'(z)| \ge \frac{1}{k+1}\left\{n + s\left(\frac{k - |z_0|}{1 + |z_0|}\right) + k\left(\frac{k^{n-s}|c_{n-s}| - |c_0|}{k^{n-s}|c_{n-s}| + |c_0|}\right)\right\}|p(z)|.$$

При $k = 1$ и $s = 0$ следствие 7 сводится к результату Дубинина [14]. Более того, при $z_0 = 0$ теорема 3 сводится к следующему результату.

Следствие 8. Предположим, что $r \in \mathcal{R}_n$ такое, что $r(z) = \dfrac{p(z)}{w(z)}$, где $p(z) := z^s \sum_{j=0}^{m-s} c_j z^j$, и все нули r лежат в $\overline{\mathcal{D}_k}$, $k \le 1$, кроме нуля кратности s в начале координат, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \ge \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2(m + sk) - n(k+1)}{k+1} + \frac{2k}{k+1}\left(\frac{k^{m-s}|c_{m-s}| - |c_0|}{k^{m-s}|c_{m-s}| + |c_0|}\right)\right\}|r(z)|,$$

где m — количество нулей $r(z)$.

При $k = 1$ следствие 8 сводится к теореме B, принадлежащей Вали [11].

3. Леммы.

Лемма 1. Пусть $r \in \mathcal{R}_n$ и все нули r лежат в $\mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_k, k > 1$, кроме нуля кратности s, $0 \le s < m$ при z_0, $z_0 \in \mathcal{D}$, тогда для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \le \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s - n(1 - |z_0|)}{1 - |z_0|} + 2\sum_{j=1}^{m-s} \frac{k}{k + |z_j|}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $r \in \mathcal{R}_n$ такое, что

$$r(z) = \frac{p(z)}{w(z)},$$

где $p(z) = (z - z_0)^s q(z)$ и $q(z) = \sum_{j=0}^{ms} c_j z^j$ — многочлен степени $m - s$, все нули которого лежат в $\mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_k$. Следовательно, если $z_1, z_2, \ldots, z_{m-s}$ — нули $q(z)$, тогда $|z_j| \geq k$, $k > 1$, $j = 1, 2, \ldots, m - s$. Отсюда имеем

$$\frac{zr'(z)}{r(z)} = \frac{sz}{z - z_0} + \sum_{j=1}^{m-s} \frac{z}{z - z_j} - \frac{zw'(z)}{w(z)}.$$

Это, в частности, дает для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{sz}{z - z_0}\right) + \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{m-s} \frac{z}{z - z_j}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{w(z)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{s|z|}{|z - z_0|} + \operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{m-s} \frac{z}{z - z_j}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{w(z)}\right). \tag{17}$$

Теперь для $z_j \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_k$ и $z \in \delta\mathcal{D}$ имеем

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z - z_j}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - |z_j|e^{i\Phi}}\right) \leq \frac{1}{1 + |z_j|},$$

если

$$(1 + |z_j|)(1 - |z_j|\cos(\theta - \varphi)) \leq 1 + |z_j|^2 - 2|z_j|\cos(\theta - \varphi),$$

что верно, так как

$$\cos(\theta - \varphi) \geq -1.$$

Следовательно, для $z_j \in \mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_k$, $k > 1$, и для $z \in \delta\mathcal{D}$ имеем

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z - z_j}\right) \leq \frac{1}{1 + |z_j|} \leq \frac{k}{k + |z_j|}. \tag{18}$$

Кроме того,

$$\mathcal{B}(z) = \frac{w^*(z)}{w(z)},$$

где $w^*(z) = z^n \overline{w\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$.

Из вышесказанного следует, что

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z\mathcal{B}'(z)}{\mathcal{B}(z)}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z(w^*(z))'}{w^*(z)}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{w(z)}\right).$$

Используя то, что

$$\frac{z\mathcal{B}'(z)}{\mathcal{B}(z)} = |\mathcal{B}'(z)|, \text{ for } z \in \delta\mathcal{D},$$

получаем

$$|\mathcal{B}'(z)| = \operatorname{Re}\left(\frac{z(w^*(z))'}{w^*(z)}\right) - \operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{w(z)}\right). \tag{19}$$

Как и ранее,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z(w^*(z))'}{w^*(z)}\right) = n - \operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{w(z)}\right). \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{w(z)}\right) = \frac{n - |\mathcal{B}'(z)|}{2}. \tag{21}$$

Подставляя (18) и (21) в (15), получаем для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \le \frac{s}{1-|z_0|} + \sum_{j=1}^{m-s} \frac{k}{k+|z_j|} - \left(\frac{n - |\mathcal{B}'(z)|}{2}\right). \tag{22}$$

То есть для $z \in \delta\mathcal{D}$ имеем

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \le \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s - n(1-|z_0|)}{1-|z_0|} + 2\sum_{j=1}^{m-s} \frac{k}{k+|z_j|}\right\}.$$

Это доказывает лемму 1.

Лемма 2. Предположим, что $r \in \mathcal{R}_n$ такая, что $r(z) = \dfrac{p(z)}{w(z)}$, где $p(z) := (z-z_0)^s \sum\limits_{j=0}^{m-s} c_j z^j$, $z_0 \in \mathcal{D}$, имеет ровно n полюсов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и все нули r лежат в $\mathcal{D}_k, k \le 1$ с кратным нулем s в точке z_0 тогда для каждой точки $z \in \delta\mathcal{D}$, такой, что $r(z) \neq 0$,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \ge \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k-|z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)} + \frac{2m - n(k-1)}{k+1}\right\}.$$

Доказательство. Пусть $r \in \mathcal{R}_n$ такое, что

$$r(z) = \frac{p(z)}{w(z)}.$$

Поступая аналогично лемме 1, для $|z_j| < k, k \le 1, j = 1, 2, \ldots, m-s$ имеем

$$\frac{zr'(z)}{r(z)} = \frac{sz}{z-z_0} + \sum_{j=1}^{m-s}\left(\frac{z}{z-z_j}\right) - \frac{zw'(z)}{w(z)}.$$

Это, в частности, дает для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{sz}{z-z_0}\right) + \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{m-s}\frac{z}{z-z_j}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{zw'(z)}{w(z)}\right).$$

Теперь для $z_j \in \mathcal{D}_k, j = 1, 2, \ldots, m$ и $z \in \delta\mathcal{D}$ имеем при $k \leq 1$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z-z_j}\right) \geq \frac{1}{1+|z_j|} \geq \frac{1}{1+k}. \tag{23}$$

Используя (23), мы получаем для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \geq \frac{s}{1+|z_0|} + \frac{m-s}{k+1} - \left(\frac{n-|\mathcal{B}'(z)|}{2}\right) =$$
$$= \frac{s(k-|z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)} + \frac{2m-n(k+1)}{2(k+1)} + \frac{|\mathcal{B}'(z)|}{2}.$$

То есть для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \geq \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k-|z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)} + \frac{2m-n(k+1)}{k+1}\right\}.$$

Лемма 3. Предположим, что $r \in \mathcal{R}_n$, где $r(z) = \dfrac{p(z)}{w(z)}$, $p(z) := (z-z_0)^s \sum\limits_{j=0}^{m-s} c_j z^j$, $z_0 \in \mathcal{D}$ имеет ровно n полюсов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и все нули r лежат в $\mathcal{D}_k, k \leq 1$, кроме нуля кратности s в точке z_0, тогда для каждой точки $z \in \delta\mathcal{D}$ такой, что $r(z) \neq 0$, выполняется следующее неравенство:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \geq \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k-|z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)} + \frac{2m-n(k+1)}{k+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{2k}{k+1}\left(\frac{k^{m-s}|c_{m-s}|-|c_0|}{k^{m-s}|c_{m-s}|+|c_0|}\right)\right\}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1, имеем для $z \in \delta\mathcal{D}$ при $k \leq 1$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{sz}{z-z_0}\right) + \mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{m-s}\frac{z}{z-z_j}\right) - \mathrm{Re}\left(\frac{zw'(z)}{w(z)}\right) \geq$$
$$\geq \frac{s}{1+|z_0|} + \frac{1}{k+1}\sum_{j=1}^{m-s}\frac{k-|z_j|}{1+|z_j|} + \frac{m-s}{k+1} - \frac{n}{2} + \frac{|\mathcal{B}'(z)|}{2} =$$
$$= \frac{s}{1+|z_0|} + \frac{k}{k+1}\sum_{j=1}^{m-s}\frac{k-|z_j|}{k+k|z_j|} + \frac{m-s}{k+1} - \frac{n}{2} + \frac{|\mathcal{B}'(z)|}{2} \geq$$
$$\geq \frac{s}{1+|z_0|} + \frac{k}{k+1}\sum_{j=1}^{m-s}\frac{k-|z_j|}{k+|z_j|} + \frac{m-s}{k+1} - \frac{n}{2} + \frac{|\mathcal{B}'(z)|}{2}. \tag{24}$$

Простым применением принципа математической индукции получаем

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1-b_j}{1+b_j}\geq\frac{1-\prod_{j=1}^{n}b_j}{1+\prod_{j=1}^{n}b_j}, \forall n\in\mathbb{N} \text{ и } b_j\leq 1, j=1,2,\ldots,n.$$

Используя этот факт в (24) при $\dfrac{|z_j|}{k}\leq 1$, а затем, используя формулу Виета, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right)&\geq\frac{s}{1+|z_0|}+\frac{k}{k+1}\left(\frac{1-\prod_{j=1}^{m-s}|z_j|/k}{1+\prod_{j=1}^{m-s}|z_j|/k}\right)+\frac{m-s}{k+1}-\frac{n}{2}+\frac{|\mathcal{B}'(z)|}{2}\geq\\&\geq\frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)|+\frac{2s(k-|z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)}+\frac{2m-n(k+1)}{k+1}+\right.\\&\left.+\frac{2k}{k+1}\left(\frac{k^{m-s}|c_{m-s}|-|c_0|}{k^{m-s}|c_{m-s}|+|c_0|}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Нам также понадобится следующая лемма, принадлежащая Ли, Мохапатре и Родригесу [8].

Лемма 4. Если $r\in\mathcal{R}_n$, то для $z\in\delta\mathcal{D}$

$$|(r^*(z))'|+|r'(z)|\leq|\mathcal{B}'(z)|M(r,1). \tag{25}$$

Равенство выполняется для $r(z)=\lambda\mathcal{B}(z)$ с $\lambda\in\delta\mathcal{D}$.

4. Доказательства теорем.

Доказательство теоремы 1. Поскольку $r\in\mathcal{R}_n$ и все нули r лежат в $\mathbb{C}\backslash\mathcal{D}_k, k>1$, кроме нуля кратности s в точке z_0, следовательно, $|z_j|\geq k, k>1, j=1,2,\ldots,m-s$ и, следовательно, из неравенства (15) леммы 1 имеем для $z\in\delta\mathcal{D}$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right)\leq\frac{s}{1-|z_0|}+\sum_{j=1}^{m-s}\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z-z_j}\right)-\operatorname{Re}\left(\frac{zw'(z)}{w(z)}\right)\leq \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\leq\frac{s}{1-|z_0|}+\sum_{j=1}^{m-s}\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z-z_j}\right)-\left(\frac{n-|\mathcal{B}'(z)|}{2}\right)\leq\\&\leq\frac{s}{1-|z_0|}+\sum_{j=1}^{m-s}\frac{1}{1+|z_j|}-\left(\frac{n-|\mathcal{B}'(z)|}{2}\right)\leq\end{aligned}$$

$$\leq\frac{s}{1-|z_0|}+\frac{m-s}{1+k}-\left(\frac{n-|\mathcal{B}'(z)|}{2}\right). \tag{27}$$

Также, если $r^*(z)=\mathcal{B}(z)\overline{r\left(\dfrac{1}{\overline{z}}\right)}$, тогда для $z\in\delta\mathcal{D}$ имеем

$$|(r^*(z))'|=\left|\frac{1}{z}\left[z\mathcal{B}'(z)\overline{r\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}-\frac{\mathcal{B}(z)}{z}\overline{r'\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}\right]\right|=\left|\left(\frac{z\mathcal{B}'(z)}{\mathcal{B}(z)}\right)\overline{r(z)}-\overline{zr'(z)}\right|.$$

Используя $\dfrac{z\mathcal{B}'(z)}{\mathcal{B}(z)} = |\mathcal{B}'(z)|$, $z \in \delta\mathcal{D}$, получаем

$$|(r^*(z))'| = ||\mathcal{B}'(z)|r(z) - zr'(z)|.$$

Это дает для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$\left|\frac{z(r^*(z))'}{r(z)}\right|^2 = |\mathcal{B}'(z)|^2 + \left|\frac{zr'(z)}{r(z)}\right|^2 - 2|\mathcal{B}'(z)|\mathrm{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right). \tag{28}$$

Комбинируя (26) и (28), мы получаем для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$\left|\frac{z(r^*(z))'}{r(z)}\right|^2 \geq |\mathcal{B}'(z)|^2 + \left|\frac{zr'(z)}{r(z)}\right|^2 - 2|\mathcal{B}'(z)|\left\{\frac{s}{1-|z_0|} + \frac{m-s}{1+k} - \left(\frac{n-|\mathcal{B}'(z)|}{2}\right)\right\} =$$
$$= |\mathcal{B}'(z)|^2 + \left|\frac{zr'(z)}{r(z)}\right|^2 - |\mathcal{B}'(z)|\left\{|\mathcal{B}'(z)| - n + \frac{2s}{1-|z_0|} + \frac{2(m-s)}{k+1}\right\}.$$

То есть для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|(r^*(z))'|^2 \geq \left[|r'(z)|^2 + \left\{\frac{n(k+1)-2m}{k+1} - \frac{2s(k+|z_0|)}{(1-|z_0|)(k+1)}\right\}|\mathcal{B}'(z)||r(z)|^2\right]. \tag{29}$$

Поскольку по предположению

$$|z_0| \leq 1-\rho,$$

где

$$\rho = \frac{2s(k+1)}{n(k+1)+2(s-m)},$$

легко проверить, что

$$\frac{n(k+1)-2m}{k+1} - \frac{2s(k+|z_0|)}{(k+1)(1-|z_0|)} \geq 0.$$

Также очевидно, что

$$0 < \rho = \frac{2s(k+1)}{n(k+1)+2(s-m)} < 1,$$

если

$$n > \frac{2(m+sk)}{k+1}.$$

Выбираем

$$\eta_0 = \frac{2(m+sk)}{k+1},$$

так, что вследствие неравенства (29) и леммы 4, получаем

$$|r'(z)| + \left[|r'(z)|^2 + \left\{\frac{n(k+1)-2m}{k+1} - \frac{2s(k+|z_0|)}{(1-|z_0|)(k+1)}\right\}|\mathcal{B}'(z)||r(z)|^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq |\mathcal{B}'(z)|M(r,1).$$

После упрощения имеем при $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \leq \frac{1}{2}\left[|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k+|z_0|)}{(k+1)(1-|z_0|)} - \frac{n(k+1)-2m}{k+1}\frac{|r(z)|^2}{M(r,1)^2}\right]M(r,1),$$

для каждого z_0 с $|z_0| \leq 1-\rho$ и $n > \eta_0$, где

$$\rho = \frac{2s(k+1)}{n(k+1)+2(s-m)} \qquad \text{и} \qquad \eta_0 = \frac{2(m+sk)}{k+1}.$$

Это завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство следствия 3. Из неравенства (22) имеем при $s=0$ и $z \in \delta\mathcal{D}$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \leq \sum_{j=1}^{m}\frac{k}{k+|z_j|} - \left(\frac{n-|\mathcal{B}'(z)|}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\frac{1-\dfrac{|z_j|}{k}}{1+\dfrac{|z_j|}{k}} + \frac{|\mathcal{B}'(z)|}{2} + \frac{m-n}{2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + m - n + \frac{1-\prod_{j=1}^{m}\dfrac{|z_j|}{k}}{1+\prod_{j=1}^{m}\dfrac{|z_j|}{k}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + m - n + \frac{k^m|c_m|-|c_0|}{k^m|c_m|+|c_0|}\right\}. \tag{30}$$

Комбинируя (28) и (30), мы имеем для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$\left|\frac{z(r^*(z))'}{r(z)}\right|^2 \geq |\mathcal{B}'(z)|^2 + \left|\frac{zr'(z)}{r(z)}\right|^2 - |\mathcal{B}'(z)|\left\{\frac{k^m|c_m|-|c_0|}{k^m|c_m|+|c_0|} + m - n + |\mathcal{B}'(z)|\right\}.$$

То есть

$$|(r^*(z))'|^2 \geq |r'(z)|^2 + |\mathcal{B}'(z)|\left\{n - m + \frac{|c_0|-k^m|c_m|}{|c_0|+k^m|c_m|}\right\}|r(z)|^2. \tag{31}$$

Ясно, что правая часть предыдущего неравенства положительна. Следовательно, используя лемму 4 и упрощая, получаем для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \leq \frac{1}{2}\left[|\mathcal{B}'(z)| + \left\{m - n - \frac{|c_0|-k^m|c_m|}{|c_0|+k^m|c_m|}\right\}\frac{|r(z)|^2}{(M(r,1))^2}\right]M(r,1).$$

Доказательство теоремы 2. Положим $r(z) \neq 0$ для $z \in \delta\mathcal{D}$, тогда из леммы 2 следует, что

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \geq \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k-|z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)} + \frac{2m-n(k-1)}{k+1}\right\}.$$

Используя тот факт, что

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \le \left|\frac{zr'(z)}{r(z)}\right|,$$

получаем для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \ge \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k-|z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)} + \frac{2m-n(k-1)}{k+1}\right\}|r(z)|.$$

В случае $r(z) = 0$ при $z \in \delta\mathcal{D}$, приведенное выше неравенство выполняется тривиально. Следовательно, результат верен для всех $z \in \delta\mathcal{D}$.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что $r(z) \neq 0$ при $z \in \delta\mathcal{D}$, поэтому оно следует из леммы 3:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zr'(z)}{r(z)}\right) \ge \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k-|z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)} + \frac{2m-n(k+1)}{k+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{2k}{k+1}\left(\frac{k^{m-s}|c_{m-s}| - |c_0|}{k^{m-s}|c_{m-s}| + |c_0|}\right)\right\}.$$

Это, в частности, дает для $z \in \delta\mathcal{D}$

$$|r'(z)| \ge \frac{1}{2}\left\{|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2s(k-|z_0|)}{(k+1)(1+|z_0|)} + \frac{2m-n(k+1)}{k+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{2k}{k+1}\left(\frac{k^{ms}|c_{ms}| - |c_0|}{k^{ms}|c_{ms}| + |c_0|}\right)\right\}|r(z)|.$$

В случае $r(z) = 0$ при $z \in \delta\mathcal{D}$ приведенное выше неравенство выполняется тривиально. Следовательно, результат верен для всех $z \in \delta\mathcal{D}$.

Литература/References

1. Bernstein S. Sur la limitation des dérivées des polynomes. *C. R. Acad. Sci. Paris.* **190**, 338–340 (1930).

2. Schaeffer A. C. Inequalities of A. Markoff and S. Bernstein for polynomials and related functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **47**, 565–579 (1941).

3. Lax P. D. Proof of a conjecture of P. Erdös on the derivative of a polynomial. *Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.)* **50**, 509–513 (1944).

4. Turán P. Über die ableitung von polynomen. *Compos. Math.* **7**, 89–95 (1939).

5. Malik M. A. On the derivative of a polynomial. *J. London Math. Soc.* **1**, 57–60 (1969). https://doi.org/10.1112/jlms/s2-1.1.57

6. Aziz A., Shah W. M. Inequalities for a polynomial and its derivative. *Math. Inequal. Appl.* **7**, 379–391 (2004).

7. Borwein P., Erdélyi T. Sharp extensions of Bernstein inequality to rational spaces. *Mathematika* **43**, 413–423 (1996).

8. Xin Li, Mohapatra R. N., Rodriguez R. S. Bernstein-type inequalities for rational functions with prescribed poles. *J. London Math. Soc.* **51**, 523–531 (1995).

9. Sheil-Small T. Complex polynomials. *Cambridge Stud. Adv. Math.* (2002).

10. Aziz A., Shah W. M. Some properties of rational functions with prescribed poles and restricted zeros. *Math. Balkanica* **18**, 33–40 (2004).

11. Wali S. L. Inequalities for Maximum Modulus of Rational functions with Prescribed Poles (preprint). *Kragujevac J. Math.* **47**, 865–875 (2023).

12. Ahanger U. M., Shah W. M. Inequalities for the derivative of polynomial with restricted zeros. *J. Analysis* **29**, 1–8 (2021).
13. Aziz A., Zargar B. A. Some properties of rational functions with prescribed poles. *Canad. Math. Bull.* **42**, 417–426 (1999).
14. Dubinin V. N. Applications of the Schwarz Lemma to inequalities for entire functions with constraints on zeros. *Journal of Mathematical Sciences* **143**, 3069–3076 (2007).

Статья поступила в редакцию 23 сентября 2022 г.;
доработана 19 января 2023 г.;
рекомендована к печати 16 февраля 2023 г.

Контактная информация:

Ахангер Узма Мубин — PhD; uzmanoor@cukashmir.ac.in
Шах Валь Мухамед — Professor, PhD; wmshah@rediffmail.com

Inequalities for the derivative of rational functions with prescribed poles and restricted zeros

U. M. Ahanger, W. M. Shah

Central University of Kashmir, Ganderbal J & K, 191201, India

For citation: Ahanger U. M., Shah W. M. Inequalities for the derivative of rational functions with prescribed poles and restricted zeros. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 3, pp. 554–567.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.309 (In Russian)

In this paper, instead of assuming that a rational function $r(z)$ with prescribed poles has a zero of order s at origin, we suppose that it has a zero of multiplicity s at any point inside the unit circle, whereas the remaining zeros are within or outside a circle of radius k and prove some results which besides generalizing some inequalities for rational functions include refinements of some polynomial inequalities as special cases.

Keywords: inequalities, polynomials, rational functions, poles, zeros.

Received: September 23, 2022
Revised: January 19, 2023
Accepted: February 16, 2023

Authors' information:

Uzma M. Ahanger — uzmanoor@cukashmir.ac.in
Wal M. Shah — wmshah@rediffmail.com