МЕХАНИКА

УДК 531.384
MSC 37G05, 37G60, 70E18

Эффект трансгрессии в задаче о движении стержня по цилиндру

А. С. Кулешов, Н. М. Видов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

Для цитирования: *Кулешов А. С., Видов Н. М.* Эффект трансгрессии в задаче о движении стержня по цилиндру // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3. С. 568–580.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.310

Рассматривается задача о движении тяжелого твердого тонкого стержня по поверхности прямого кругового цилиндра, образующая которого имеет с направлением силы тяжести ненулевой угол. Положения равновесия стержня на цилиндре образуют многообразие равновесий (для всех этих положений стержень опирается о цилиндр своим центром масс). Методом нормальных форм исследуется эффект трансгрессии (нетривиальной эволюции вдоль многообразия равновесий) в данной задаче.

Ключевые слова: неголономная система, многообразие равновесий, эффект трансгрессии.

1. Введение. В конце 80-х годов прошлого века в работах Я. В. Татаринова [1, 2] был описан эффект, названный им эффектом трансгрессии. Изучаются нелинейные колебания консервативной неголономной системы около состояния равновесия. Хорошо известно, что такие состояния у неголономных систем не изолированы, а образуют, вообще говоря, многообразия в фазовом пространстве (причина этого явления — не неинтегрируемость связей, а их дифференциальное представление). Если размерность многообразия равновесий равна числу связей, то в динамике с независимыми частотами уравнения связей «интегрируемы в среднем», т. е. в подходящих определяющих координатах движение происходит вблизи координатных плоскостей, причем отклонение от них имеет второй порядок малости и носит колебательный характер. Если размерность многообразия равновесий больше числа связей, то во втором приближении возникает тривиальное смещение вдоль многообразия со ско-

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

ростью первого порядка малости, а в четвертом приближении может возникнуть эффект дополнительной эволюции вдоль многообразия равновесий со скоростью третьего порядка малости, так что об «интегрируемости в среднем» говорить уже не приходится. Именно этот эффект дополнительной эволюции вдоль многообразия равновесий и был назван в работах Я. В. Татаринова [1, 2] эффектом трансгрессии. Изучение подобных эффектов предполагалось проводить путем привлечения метода нормальных форм [3–6]. Исследование эффекта трансгрессии в неголономных механических системах малой размерности (например, в задаче о движении почти голономного маятника) проводилось в работах [7, 8].

В данной работе исследуется эффект трансгрессии в задаче о движении тяжелого тонкого твердого стержня по неподвижному наклонному цилиндру. Общая постановка задачи о движении стержня по неподвижной выпуклой поверхности без проскальзывания была сформулирована в статье [9]. В разделе 1 работы дано краткое описание эффекта трансгрессии и приведен обзор статей, в которых изучался данный эффект. В разделе 2 приведены элементы общей теории систем дифференциальных уравнений, у которых равновесия образуют многообразие. В координатах, часть которых изменяется вдоль многообразия равновесий, а остальные трансверсально, дана процедура приведения системы к нормальной форме (в типичной, нерезонансной ситуации); от известной нормализации квазилинейных систем она отличается большей громоздкостью формул ввиду необходимости дифференцировать по координатам вдоль многообразия.

В разделе 3 работы обсуждается вопрос о приведении уравнений движения механических систем, стесненных дифференциальными связями, к форме, удобной для применения процедуры нормализации, описанной во втором параграфе.

В разделе 4 работы методика, описанная в двух предыдущих разделах, применяется для исследования задачи о движении тяжелого тонкого стержня (материального отрезка) по круговому цилиндру, образующая которого имеет с направлением действия силы тяжести некоторый ненулевой угол. Получены уравнения движения стержня по цилиндру, и при помощи подхода, изложенного в разделе 3, система первого приближения приведена к диагональному виду. Затем, используя процедуру приведения к нормальной форме, описанную в разделе 2, получена нормализованная система четвертого приближения. Найдено уравнение траектории, по которой происходит смещение точки касания стержня с цилиндром, в предположении, что угол поворота стержня мал (кривой трансгрессии).

2. Нормализация системы дифференциальных уравнений в окрестности многообразия равновесий. Пусть на фазовом пространстве Φ имеется векторное поле $\boldsymbol{Z}$, обращающееся в нуль на подмногообразии E. Будем считать, что в подходящих координатах X_k, ξ_k (локально)

$$E = \{\xi_k = 0\}.$$

Таким образом, X_k изменяются вдоль E, а ξ_k — трансверсально.

Все нужные нам функции будем раскладывать в ряды по $\boldsymbol{\xi}$ с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{X}$. А именно положим

$$f\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}\right) = \sum_{M \geq 0} f^{(M)}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}\right) = \sum_{M \geq 0} \sum_{|j|=M} f^{(j)}\left(\boldsymbol{X}\right) \xi^{j},$$

$$\frac{df}{dt} = \sum_{M \geq 0} f^{[M]}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{M \geq 0} \sum_{|j|=M} f^{[j]}(\boldsymbol{X}) \xi^j,$$
$$\text{где} \quad \xi^j = \xi_1^{j_1} \cdot \xi_2^{j_2} \cdot \ldots, \quad |j| = j_1 + j_2 + \ldots$$

Здесь $\frac{df}{dt} = \boldsymbol{Z}(f)$. В частности, в переменных $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{\xi}$ поле $\boldsymbol{Z}$ представляется системой

$$\dot{\xi}_k = \sum_{|j| \geq 1} \xi_k^{[j]}(\boldsymbol{X}) \xi^j, \quad \dot{X}_k = \sum_{|j| \geq 1} X_k^{[j]}(\boldsymbol{X}) \xi^j, \tag{1}$$

причем индекс j меняется от 1, поскольку $\boldsymbol{Z} = 0$ на E и следовательно $\xi_k^{[0]} = 0$, $X_k^{[0]} = 0$.

Будем рассматривать малую (по $\boldsymbol{\xi}$) ε-окрестность многообразия E. Желая установить правильные ассоциации с теорией возмущений, введем в систему дифференциальных уравнений малый параметр ε, положив

$$\boldsymbol{\xi} = \varepsilon \boldsymbol{\zeta}. \tag{2}$$

Тогда в первой группе уравнений произойдет сокращение на ε, и получится

$$\dot{\zeta}_k = \sum_{M \geq 1} \varepsilon^{M-1} \sum_{|j|=M} \xi_k^{[j]}(\boldsymbol{X}) \zeta^j, \quad \dot{X}_k = \sum_{M \geq 1} \varepsilon^M \sum_{|j|=M} X_k^{[j]}(\boldsymbol{X}) \zeta^j. \tag{3}$$

При $\varepsilon = 0$ получается исходное приближение, которое в теории малых колебаний принято называть не нулевым, а первым:

$$\dot{X}_k = 0, \quad \dot{\zeta}_k = \sum_{\nu} \xi_k^{\nu}(\boldsymbol{X}) \zeta_{\nu}. \tag{4}$$

Для сокращения записи здесь верхний индекс обозначен просто ν вместо $[\boldsymbol{e}_\nu]$, где $\boldsymbol{e}_\nu = (0, \ldots, \underset{(\nu)}{1}, \ldots, 0)$ — базисный вектор.

Чтобы получить N-е приближение, $N \geq 2$, в уравнениях (3) надо удержать члены с ε до степени $N-1$ включительно. Однако легко понять, что необязательно с помощью замены (2) вносить ε в уравнения (1), для того чтобы раскладывать их правые части в ряды по переменным $\boldsymbol{\xi}$. Действительно, назовем одночленами порядка L

$$\text{(а)} \quad \text{одночлены} \quad \xi_k^{[j]}(\boldsymbol{X}) \xi^j, \quad |j| = L \quad \text{и}$$
$$\text{(б)} \quad \text{одночлены} \quad X_k^{[j]}(\boldsymbol{X}) \xi^j, \quad |j| = L - 1.$$

Как видно, для получения N-го приближения достаточно, не вводя ε, удержать в правых частях (1) слагаемые до порядка $N-1$ включительно. На временах порядка $\frac{1}{\varepsilon}$ «малые» переменные $\boldsymbol{\xi}$ будут давать ошибку порядка ε^N, а не ε^{N-1}.

Будем считать, что система первого приближения имеет диагональный вид:

$$\dot{X}_k = 0, \quad \dot{\xi}_k = \lambda_k(\boldsymbol{X}) \xi_k.$$

Таким образом, исходим из системы вида

$$\dot{X}_k = \sum_{|j| \geq 1} X_k^{[j]}(\boldsymbol{X}) \xi^j, \quad \dot{\xi}_k = \lambda_k(\boldsymbol{X}) \xi_k + \sum_{|j| \geq 2} \xi_k^{[j]}(\boldsymbol{X}) \xi^j \tag{5}$$

и отбрасываем в правых частях все одночлены, начиная со степени N для X_k и $N+1$ для ξ_k. Затем можно будет пользоваться процедурой типа приведения к нормальной форме [3–6], т. е. строить замены переменных, после которых очередное приближение приобретает максимально простой вид.

Зависимость коэффициентов системы (5) от $\boldsymbol{X}$ вносит определенные усложнения (они будут отмечены) по сравнению с нормализацией обычных квазилинейных систем. Начнем с замены переменных

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}^{(N-1)}\left(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\xi}\right),\quad \boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}^{(N)}\left(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\xi}\right),\quad N\geq 2. \tag{6}$$

Сразу укажем, что обратные выражения будут

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{(N-1)}\left(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\eta}\right)+\ldots,\quad \boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}^{(N)}\left(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\eta}\right)+\ldots. \tag{7}$$

Здесь в выражения $\boldsymbol{Y}^{(N-1)}$, $\boldsymbol{\eta}^{(N)}$ просто подставлены новые буквы, а многоточием обозначены слагаемые высших степеней (только в них сказывается зависимость коэффициентов многочленов (6) от $\boldsymbol{X}$).

Продифференцируем теперь замену (6). В силу того, какой вид имеет система дифференциальных уравнений (5), в производную одночлена $F(\boldsymbol{X})\xi^j$ степени $M\geq 1$ войдет одночлен $\left(\boldsymbol{\lambda}\left(\boldsymbol{X}\right)\cdot\boldsymbol{j}\right)F\left(\boldsymbol{X}\right)\xi^j$ того же порядка, плюс слагаемые более высоких степеней, в том числе за счет дифференцирования F по $\boldsymbol{X}$. Поэтому в переменных $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{\xi}$ производная замены (6) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_k&=X_k^{[1]}+\ldots+X_k^{[N-2]}+\sum_{|j|=N-1}\left(X_k^{[j]}+\left(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{j}\right)Y_k^{(j)}\right)\xi^j+\ldots\\ \dot{\eta}_k&=\lambda_k\xi_k+\xi_k^{[2]}+\ldots+\xi_k^{[N-1]}+\sum_{|j|=N}\left(\xi_k^{[j]}+\left(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{j}\right)\eta_k^{(j)}\right)\xi^j+\ldots.\end{aligned} \tag{8}$$

В правых частях уравнений (8) перейдем к переменным $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{\eta}$, подставив выражения (7). В этом случае всякий одночлен $F\left(\boldsymbol{X}\right)\xi^j$ порядка M преобразуется как

$$F(\boldsymbol{X})\xi^j=F(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Y}^{(N-1)}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\eta})+\ldots)(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\eta}^{(N)}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{\eta})+\ldots)^j. \tag{9}$$

Разложение (9) дает слагаемое $F\left(\boldsymbol{Y}\right)\eta^j$ порядка M, затем слагаемые порядка $M+N-1$ и, наконец, слагаемые порядка большего, чем N. Степень $N=M+N-1$ только при $M=1$, так что коэффициенты степени N для η_k изменяются лишь в результате преобразования одночлена:

$$\lambda_k\left(\boldsymbol{X}\right)\xi_k=\lambda_k\left(\boldsymbol{Y}\right)\eta_k-\sum_j\frac{\partial\lambda_k}{\partial Y_j}Y_j^{(N-1)}\eta_j-\lambda_k(\boldsymbol{Y})\eta^{(N)}+\ldots.$$

Следовательно, в переменных $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{\eta}$ получаем:

$$Y_k^{[j]}=X_k^{[j]}+\left(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{j}\right)Y_k^{(j)},\quad |j|=N-1, \tag{10}$$

$$\eta_k^{[j]}=\xi_k^{[j]}-\sum_i\frac{\partial\lambda_k}{\partial Y_i}Y_i^{(j-e_k)}+(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{j}-\boldsymbol{e}_k)\eta_k^{(j)}, \tag{11}$$

$$|j|=N,\quad j_k\neq 0,\quad \boldsymbol{e}_k=(0,\ldots,\underset{(k)}{1},\ldots,0).$$

$$\begin{gathered}\eta_k^{[j]}=\xi_k^{[j]}+(-\lambda_k+(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{j}))\eta_k^{(j)}\\ |j|=N,\quad j_k=0.\end{gathered}$$

Если $(\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{j}) \neq 0$, $|j| = N-1$, то подходящим выбором $Y_k^{(j)}$ можно устранить $Y_k^{[j]}$, после чего выбором $\eta_k^{(j)}$, $|j| = N$, $j_k \neq 0$, устраняются соответствующие $\eta_k^{[j]}$. Отдельно могут быть устранены $\eta_k^{[j]}$, $|j| = N$, $j_k = 0$, если

$$\lambda_k \neq j_1\lambda_1 + \ldots + j_{k-1}\lambda_{k-1} + j_{k+1}\lambda_{k+1} + \ldots$$

Когда λ_k не зависят от $\boldsymbol{X}$, решение (10) не влияет на (11) и нормализация проходит внешне по обычной схеме. Однако и в этом случае зависимость от $\boldsymbol{X}$ других коэффициентов существенно удлиняет вычисление следующих приближений.

Если уничтожение невозможно, то соответствующий коэффициент из (6) будем брать нулевым.

Обсудим теперь, как привести уравнения движения механической системы, стесненной дифференциальными связями и обладающей многообразием равновесий, к виду (5), требуемому для применения описанной выше процедуры нормализации.

3. Приведение уравнений движения к виду, требуемому для применения нормализации. Будем считать, что механическая система задается своей функцией Лагранжа

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{i\,j}\left(\boldsymbol{x}\right)\dot{x}_i\dot{x}_j - V\left(\boldsymbol{x}\right),$$

и на данную систему наложены линейные дифференциальные связи

$$g_s\left(\boldsymbol{x},\,\dot{\boldsymbol{x}}\right) = \sum_{i=1}^{n} d_{si}\left(\boldsymbol{x}\right)\dot{x}_i = 0, \quad s = m+1,\ldots,n. \tag{12}$$

Уравнения Лагранжа с множителями имеют вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \sum_{s=m+1}^{n} \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{13}$$

Тогда многообразие равновесий E определяется системой уравнений:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_{s=m+1}^{n} \mu_s \frac{\partial g_s}{\partial \dot{x}_i}, \quad i = 1,\ldots,n. \tag{14}$$

В литературе, как правило, рассматривается случай общего положения, когда размерность многообразия равновесий E равна числу связей, $\dim E = n - m$, соответствующие результаты содержатся, например, в [10]. Однако в конкретных задачах размерность E нередко бывает больше. В следующем разделе рассматривается одна из таких задач.

Будем считать x_i локальными координатами на конфигурационном многообразии M. Предположим, что многообразие равновесий E определяется формулами

$$E = \{x_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, l\}, \tag{15}$$

а уравнения связей (12) могут быть представлены в разрешенном виде

$$\dot{x}_s = \sum_{\lambda=1}^{m} c_{s\lambda}\left(\boldsymbol{x}\right)\dot{x}_\lambda, \tag{16}$$

причем на E все коэффициенты обращаются в ноль:

$$c_{s\lambda}\left(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n\right) = 0. \tag{17}$$

Коэффициенты $c_{s\lambda}$ зависят от всех обобщенных координат $x_1, \ldots, x_n$, поэтому уравнения движения рассматриваемой системы (13) могут быть записаны в форме уравнений Воронца [11]:

$$\begin{gathered}\dot{x}_\alpha = v_\alpha, \quad \dot{x}_\beta = v_\beta, \quad \alpha = 1, \ldots, l, \quad \beta = l+1, \ldots, m, \quad \lambda = 1, \ldots, m, \\ \sum_{\mu=1}^{m} G_{\lambda\mu}\left(x_1, \ldots, x_n\right) \dot{v}_\mu + \sum_{\mu,\nu=1}^{m} \Gamma_{\lambda\mu\nu}\left(x_1, \ldots, x_n\right) v_\mu v_\nu + \Phi_\lambda\left(x_1, \ldots, x_n\right) = 0.\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь $G_{\lambda\mu}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ — коэффициенты кинетической энергии, вычисленной с учетом связей (16); явный вид коэффициентов $\Gamma_{\lambda\mu\nu}\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ не существенен. После этого уравнения, определяющие многообразие равновесий и аналогичные (14), записываются в виде

$$\Phi_\lambda\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} c_{s\lambda} = 0, \quad \lambda = 1, \ldots, m.$$

В силу того, что уравнения (18) обладают многообразием равновесий (15), следовательно, на многообразии (15) имеем

$$\Phi_\lambda\left(x_1, \ldots, x_n\right)\big|_E = \Phi_\lambda\left(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n\right) = 0.$$

С точки зрения изложенного в разделе 2, роль координат ξ_k (изменяющихся трансверсально многообразию равновесий) играют x_α, v_α, v_β, $\alpha = 1, \ldots, l$, $\beta = l+1, \ldots, m$, а роль координат X_k (изменяющихся вдоль многообразия равновесий) достается x_β, x_s, $\beta = l+1, \ldots, m$, $s = m+1, \ldots, n$. Таким образом, $\boldsymbol{\xi} = \left(x_1, \ldots, x_l, v_1, \ldots, v_m\right)$, $\boldsymbol{X} = \left(x_{l+1}, \ldots, x_n\right)$.

В окрестности многообразия E имеем

$$\Phi_\lambda\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \sum_{\alpha=1}^{l} \Phi_{\lambda\alpha}\left(x_1, \ldots, x_n\right) x_\alpha, \quad \lambda = 1, \ldots, m,$$

причем на E в силу (17)

$$\Phi_{\lambda\alpha}\left(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n\right) = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda \partial x_\alpha} + \sum_{s=m+1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \frac{\partial c_{s\lambda}}{\partial x_\alpha}\right)_E.$$

Система уравнений первого приближения, аналогичная (4), будет иметь вид

$$\begin{aligned}&\dot{x}_\alpha = v_\alpha, \quad \dot{x}_\beta = 0, \quad \dot{x}_s = 0, \quad \alpha = 1, \ldots, l, \\ &\beta = l+1, \ldots, m, \quad s = m+1, \ldots, n, \\ &\sum_{\mu=1}^{m} G_{\lambda\mu}\left(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n\right) \dot{v}_\mu + \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{l} \Phi_{\lambda\alpha}\left(0, \ldots, 0, x_{l+1}, \ldots, x_n\right) x_\alpha = 0, \ \lambda = 1, \ldots, m.\end{aligned} \tag{19}$$

Полученная нами система уравнений первого приближения не имеет диагонального вида, как того требуется в описании процедуры нормализации, представленном в предыдущем разделе. Для того чтобы привести ее к диагональному виду, введем (вообще говоря, прямоугольную) матрицу

$$\| F_{\mu\alpha} \| = \| G_{\lambda\mu} \|^{-1} \| \Phi_{\lambda\alpha} \|$$

и предположим, что все собственные значения ее квадратной части $\| F_{\gamma\alpha} \|$ положительны и различны (а если совпадают, то имеют простые жордановы клетки). Обозначим соответствующие собственные значения $\omega_1^2, \ \dots \ \omega_l^2$. Все они будут функциями от $x_{l+1}, \dots, x_n$. Тогда без уменьшения общности можно считать, что в (19)

$$\| G_{\lambda\mu} \| = \mathbb{E}^m, \quad \| \Phi_{\gamma\alpha} \| = \operatorname{diag}\left(\omega_1^2, \dots, \omega_l^2\right), \quad \| \Phi_{\beta\alpha} \| = 0,$$

так что в переменных $\boldsymbol{X} = (x_\beta, \, x_s)$, $\boldsymbol{\xi} = (p_{-\alpha}, \, p_{+\alpha}, \, v_\beta)$, где

$$p_{-\alpha} = x_\alpha - i\frac{v_\alpha}{\omega_\alpha}, \quad p_{+\alpha} = x_\alpha + i\frac{v_\alpha}{\omega_\alpha}, \quad \alpha = 1, \dots, l, \tag{20}$$

а i — мнимая единица, уравнения уже второго приближения таковы:

$$\begin{aligned}
&\dot{p}_{-\alpha} = i\omega_\alpha\left(\boldsymbol{X}\right) p_{-\alpha} + p_{-\alpha}^{[2]}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}\right), \\
&\dot{p}_{+\alpha} = -i\omega_\alpha\left(\boldsymbol{X}\right) p_{+\alpha} + p_{+\alpha}^{[2]}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}\right), \quad \alpha = 1, \dots, l, \\
&\dot{x}_\beta = v_\beta, \quad \dot{v}_\beta = v_\beta^{[2]}\left(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\xi}\right), \quad \dot{x}_s = 0, \quad \beta = l+1, \dots, m, \quad s = m+1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{21}$$

В дальнейшем процедура нормализации применяется к системе, записанной в переменных $\boldsymbol{\xi} = (p_{-\alpha}, \, p_{+\alpha}, \, v_\beta)$ и $\boldsymbol{X} = (x_\beta, \, x_s)$. При этом эффектом трансгрессии [1, 2, 7] называется нетривиальная эволюция зависимых координат x_s.

Ниже процедура нормализации системы дифференциальных уравнений в окрестности многообразия равновесий, описанная в разделе 2, применяется в задаче о движении тяжелого тонкого стержня (материального отрезка) по поверхности прямого кругового цилиндра.

4. Постановка задачи. Уравнения движения. Пусть по поверхности прямого кругового цилиндра радиуса R движется без проскальзывания абсолютно твердый тонкий стержень массы M. Будем предполагать, что стержень опирается о цилиндр одной своей точкой P. Положение точки P на цилиндре будем определять цилиндрическими координатами φ и z. Следуя [9], введем в точке P подвижную систему координат $Px_1x_2x_3$, единичные векторы которой обозначим $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}$. Единичный вектор $\boldsymbol{e}_1$ направлен таким образом, что радиус — вектор $\boldsymbol{PG}$ центра масс G стержня — имеет вид $\boldsymbol{PG} = s\boldsymbol{e}_1$. Вектор $\boldsymbol{e}$ является вектором нормали к поверхности цилиндра в точке P; угол поворота стержня вокруг вектора $\boldsymbol{e}$ обозначим через θ. Будем считать, что движение стержня по цилиндру происходит в однородном поле силы тяжести, причем линия действия силы тяжести имеет с образующей цилиндра постоянный угол, равный $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Тогда уравнения движения стержня по цилиндру могут быть представлены в виде

$$\dot{s} = u, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad \dot{z} = -u \sin\theta,$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{u\cos\theta}{R}, \quad \dot{u} = -\frac{Msu^2}{J+Ms^2} + 3\omega u \operatorname{tg}\theta - \frac{MgRs\cos\varphi\cos\alpha}{(J+Ms^2)\cos^2\theta}, \tag{22}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{Msu\omega}{J+Ms^2} - \frac{u^2\sin\theta\cos^3\theta}{R^2} - \frac{Mgs\sin\theta\sin\varphi\cos\alpha}{J+Ms^2} - \frac{Mgs\cos\theta\sin\alpha}{J+Ms^2}.$$

Здесь J — момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс. Считая, что $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и ω — малая величина, перейдем в уравнениях (22) к новому времени τ по формуле

$$dt = \sqrt{J+Ms^2}\cos\theta d\tau$$

и введем новые переменные:

$$U = u\sqrt{J+Ms^2}\cos\theta, \quad \Omega = \omega\sqrt{J+Ms^2}\cos\theta.$$

Тогда уравнения (22) примут вид (здесь штрихом обозначена производная по τ):

$$\begin{aligned} &s' = U, \quad \theta' = \Omega, \quad z' = -U\sin\theta, \quad \varphi' = -\frac{U\cos\theta}{R}, \\ &U' = 2U\Omega\operatorname{tg}\theta - MgRs\cos\varphi\cos\alpha, \\ &\Omega' = -\Omega^2\operatorname{tg}\theta - \frac{U^2\sin\theta\cos^3\theta}{R^2} - Mgs\sin\theta\cos^2\theta\sin\varphi\cos\alpha - Mgs\cos^3\theta\sin\alpha. \end{aligned} \tag{23}$$

Избавимся от члена, содержащего Ω^2, в правой части последнего из уравнений (23), для этого сделаем замену переменных:

$$\varkappa = \ln\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \varkappa' = V = \Omega\operatorname{ch}\varkappa.$$

В новых переменных уравнения (23) перепишутся следующим образом:

$$s' = U, \quad \varkappa' = V, \quad z' = -U\frac{\operatorname{sh}\varkappa}{\operatorname{ch}\varkappa}, \quad \varphi' = -\frac{U}{R\operatorname{ch}\varkappa},$$

$$U' = 2UV\operatorname{th}\varkappa - MgRs\cos\varphi\cos\alpha, \tag{24}$$

$$V' = -\frac{U^2\operatorname{sh}\varkappa}{R^2\operatorname{ch}^3\varkappa} - Mgs\frac{\operatorname{sh}\varkappa}{\operatorname{ch}^2\varkappa}\sin\varphi\cos\alpha - \frac{Mgs\sin\alpha}{\operatorname{ch}^2\varkappa}.$$

Легко видеть, что система уравнений (24) обладает многообразием равновесий:

$$E = \{s=0, U=0, V=0\}. \tag{25}$$

Теперь вместо координат φ и z введем новые координаты Φ и Q так, чтобы их производные имели второй порядок малости в окрестности многообразия равновесий (25):

$$\Phi = \varphi + \frac{s}{R\operatorname{ch}\varkappa}, \quad Q = z + s\frac{\operatorname{sh}\varkappa}{\operatorname{ch}\varkappa}.$$

Окончательно система уравнений движения стержня по наклонному цилиндру примет вид:

$$
\begin{gathered}
s' = U, \quad \varkappa' = V, \quad \Phi' = -\frac{sV \operatorname{sh} \varkappa}{R \operatorname{ch}^2 \varkappa}, \quad Q' = \frac{sV}{\operatorname{ch}^2 \varkappa}, \\
U' = 2UV \frac{\operatorname{sh} \varkappa}{\operatorname{ch} \varkappa} - MgRs \cos\alpha \cos\left(\Phi - \frac{s}{R \operatorname{ch} \varkappa}\right), \\
V' = -\frac{U^2 \operatorname{sh} \varkappa}{R^2 \operatorname{ch}^3 \varkappa} - Mgs \frac{\operatorname{sh} \varkappa}{\operatorname{ch}^2 \varkappa} \cos\alpha \sin\left(\Phi - \frac{s}{R \operatorname{ch} \varkappa}\right) - \frac{Mgs \sin\alpha}{\operatorname{ch}^2 \varkappa}.
\end{gathered} \tag{26}
$$

Система уравнений (26) соответствует уравнениям Воронца (18). Таким образом, если проводить аналогию между системой (26) и системой (18), то для системы (26) получается $\alpha = l = 1$; $\beta = m = 2$; $s = 3, 4$; $\boldsymbol{\xi} = (x_\alpha, v_\alpha, v_\beta) = (s, U, V)$; $\boldsymbol{X} = (x_\beta, x_s) = (\varkappa, \Phi, Q)$. Система уравнений первого приближения, соответствующая системе (19), имеет вид

$$
\begin{gathered}
s' = U, \quad \varkappa' = 0, \quad \Phi' = 0, \quad Q' = 0, \\
U' = -MgRs \cos\alpha \cos\Phi, \quad V' = -\frac{Mgs}{\operatorname{ch}^2 \varkappa} \left(\operatorname{sh} \varkappa \cos\alpha \sin\Phi + \sin\alpha\right).
\end{gathered} \tag{27}
$$

Легко видеть, что в правой части последнего уравнения системы (27) присутствует слагаемое, линейное по s, т. е. система первого приближения не приведена к диагональному виду, необходимому для применения процедуры нормализации. Поэтому сделаем в системе уравнений (26) еще одну замену — перейдем от переменных $\varkappa$, V к переменным ζ, W по формуле

$$
\varkappa = \zeta + \frac{s \left(\operatorname{sh} \zeta \sin\Phi \cos\alpha + \sin\alpha\right)}{R \cos\Phi \cos\alpha \operatorname{ch}^2 \zeta}, \quad \zeta' = W.
$$

В переменных s, U, ζ, W, Φ, Q система первого приближения получит вид

$$
s' = U, \quad \zeta' = 0, \quad \Phi' = 0, \quad Q' = 0, \quad U' = -MgRs \cos\alpha \cos\Phi, \quad W' = 0. \tag{28}
$$

Нам остается только привести к диагональному виду уравнения для s', U'. Чтобы добиться этого, воспользуемся заменой типа (20):

$$
\begin{gathered}
\eta_1 = s - \frac{iU}{\sqrt{MgR \cos\alpha \cos\Phi}}, \quad \eta_2 = s + \frac{iU}{\sqrt{MgR \cos\alpha \cos\Phi}}, \\
s = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}, \quad U = \frac{i\left(\eta_1 - \eta_2\right)}{2} \sqrt{MgR \cos\alpha \cos\Phi}.
\end{gathered}
$$

Здесь i — мнимая единица. Окончательно система уравнений первого приближения (28) примет вид:

$$
\begin{gathered}
\eta_1' = i\sqrt{MgR \cos\alpha \cos\Phi}\, \eta_1, \quad \eta_2' = -i\sqrt{MgR \cos\alpha \cos\Phi}\, \eta_2, \\
\zeta' = 0, \quad W' = 0, \quad \Phi' = 0, \quad Q' = 0.
\end{gathered}
$$

Записывая теперь систему уравнений (26) движения стержня по цилиндру в переменных η_1, η_2, ζ, W, Φ, Q и раскладывая в ряд соответствующие правые части по η_1, η_2 и W, получим систему, аналогичную системе уравнений (5). Именно эту систему мы и будем приводить к нормальной форме. Причем в первую очередь нас будут интересовать уравнения, описывающие изменение переменных Φ и Q, поскольку трансгрессия в данной задаче — это нетривиальная эволюция именно этих переменных.

5. Нормальная форма и ее анализ. В результате применения подхода, изложенного в разделе 2, была получена система третьего приближения для переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 и система четвертого приближения для переменных X_1, X_2, X_3:

$$\begin{gathered}
\xi_1' = A_{1100}\left(X_1, X_3\right)\xi_1 + A_{1101}\left(X_1, X_3\right)\xi_1\xi_3 + \\
+ A_{1210}\left(X_1, X_3\right)\xi_1^2\xi_2 + A_{1102}\left(X_1, X_3\right)\xi_1\xi_3^2, \\
\xi_2' = A_{2010}\left(X_1, X_3\right)\xi_2 + A_{2011}\left(X_1, X_3\right)\xi_2\xi_3 + \\
+ A_{2120}\left(X_1, X_3\right)\xi_1\xi_2^2 + A_{2012}\left(X_1, X_3\right)\xi_2\xi_3^2, \\
\xi_3' = 0, \quad X_1' = \xi_3, \quad X_2' = A_2\left(X_1, X_3\right)\xi_1\xi_2\xi_3, \quad X_3' = A_3\left(X_1, X_3\right)\xi_1\xi_2\xi_3.
\end{gathered} \tag{29}$$

Переменные η_1, η_2, W, ζ, Φ, Q выражаются через переменные $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{X}$ по следующим формулам:

$$\eta_j = \xi_j + \sum_{\substack{2\le k+l+m\le 3,\ k,l,m=1..3 \\ (k-\delta_{1j})\cdot A_{1100}(X_1,X_3)+(l-\delta_{2j})\cdot A_{2010}(X_1,X_3)\ne 0}} B_{jklm}(X_1, X_3)\xi_1^k\xi_2^l\xi_3^m, \quad j = 1, 2,$$

$$W = \xi_3 + \sum_{\substack{2\le k+l+m\le 3,\ k,l,m=1..3 \\ k\cdot A_{1100}(X_1,X_3)+l\cdot A_{2010}(X_1,X_3)\ne 0}} B_{3klm}(X_1, X_3)\xi_1^k\xi_2^l\xi_3^m,$$

$$\zeta = X_1 + \sum_{\substack{2\le k+l+m\le 3,\ k,l,m=1..3 \\ k\cdot A_{1100}(X_1,X_3)+l\cdot A_{2010}(X_1,X_3)\ne 0}} C_{1klm}(X_1, X_3)\xi_1^k\xi_2^l\xi_3^m,$$

$$Q = X_2 + \sum_{\substack{2\le k+l+m\le 3,\ k,l,m=1..3 \\ k\cdot A_{1100}(X_1,X_3)+l\cdot A_{2010}(X_1,X_3)\ne 0}} C_{2klm}(X_1, X_3)\xi_1^k\xi_2^l\xi_3^m,$$

$$\Phi = X_3 + \sum_{\substack{2\le k+l+m\le 3,\ k,l,m=1..3 \\ k\cdot A_{1100}(X_1,X_3)+l\cdot A_{2010}(X_1,X_3)\ne 0}} C_{3klm}(X_1, X_3)\xi_1^k\xi_2^l\xi_3^m.$$

Коэффициенты $A_2\left(X_1,\, X_3\right)$ и $A_3\left(X_1,\, X_3\right)$ равны

$$A_2\left(X_1,\, X_3\right) = \frac{\operatorname{sh} X_1 \sin\alpha - \left(\operatorname{ch}^2 X_1 + 1\right)\cos\alpha\sin X_3}{2R\operatorname{ch}^5 X_1\cos\alpha\cos X_3},$$

$$A_3\left(X_1,\, X_3\right) = \frac{\operatorname{sh} X_1 \cos\alpha\sin X_3 + \left(1 - 2\operatorname{ch}^2 X_1\right)\sin\alpha}{2R^2\operatorname{ch}^5 X_1\cos\alpha\cos X_3},$$

а выражения для коэффициентов правых частей двух первых уравнений системы (29) имеют громоздкий вид и не выписаны здесь явно. Нормальная форма третьего порядка уравнений движения стержня по цилиндру позволяет сделать следующие выводы. Переменная ξ_3 является малой постоянной величиной. Запишем ее в виде $\xi_3 = \varepsilon K$. Переменная X_1 может быть найдена из четвертого уравнения системы (29), и она равна

$$X_1 = \varepsilon K \tau + X_1(0).$$

Будем считать начальное значение $X_1(0)$ малым. Тогда на конечных временах переменную X_1 можно считать малой. Разделим пятое уравнение на шестое и получим

$$\frac{dX_2}{dX_3} = \frac{R\left(\operatorname{sh} X_1 \sin\alpha - \left(\operatorname{ch}^2 X_1 + 1\right)\cos\alpha \sin X_3\right)}{\operatorname{sh} X_1 \cos\alpha \sin X_3 + \left(1 - 2\operatorname{ch}^2 X_1\right)\sin\alpha}.$$

Если разложить правую часть данного уравнения в ряд по малой величине X_1 и оставить только первый член разложения, то получим

$$\frac{dX_2}{dX_3} = 2R \operatorname{ctg}\alpha \sin X_3. \tag{30}$$

Заметим, что с точностью до малых величин более высокого порядка переменная $X_2 \approx Q$, а переменная $X_3 \approx \Phi$. Интегрирование уравнения (30) дает нам приближенное уравнение кривой, вдоль которой изменяются переменные Φ и Q:

$$Q = Q_0 - 2R \operatorname{ctg}\alpha \left(\cos\Phi - \cos\Phi_0\right). \tag{31}$$

Именно эта кривая и является кривой трансгрессии, вдоль которой смещается положение равновесия стержня.

Таким образом, процесс движения стержня по наклонному цилиндру качественно можно представить как колебания по s, φ, z с амплитудой порядка ε, около положения равновесия с координатами Φ, Q, сочетающиеся с медленным поворотом стержня. За время порядка $\frac{1}{\varepsilon}$ угол θ изменится на конечную величину, а равновесие, около которого происходят колебания, сместится на величину порядка ε^2 (трансгрессия). Смещение происходит по кривой (31).

Таким образом, при помощи метода нормальных форм подробно изучен эффект трансгрессии в задаче о движении тяжелого тонкого стержня по поверхности цилиндра.

Литература

1. Татаринов Я. В. Сложение нелинейных колебаний с эволюцией вблизи многообразия равновесий обратимых систем. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика* **5**, 93–95 (1990).

2. Татаринов Я. В. Следствия неинтегрируемого возмущения интегрируемых связей: нелинейные эффекты вблизи многообразия равновесий. *Прикладная математика и механика* **56** (4), 604–614 (1992).

3. Брюно А. Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.* Москва, Наука (1979).

4. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений I. *Труды Московского математического общества* **25**, 119–262 (1971).

5. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений II. *Труды Московского математического общества* **26**, 199–239 (1972).

6. Edneral V. F. Looking for Periodic Solutions of ODE Systems by the Normal Form Method. In: Wang D., Zheng Z. (eds). *Differential Equations with Symbolic Computation. Trends in Mathematics* 173–200, Birkhauser Basel (2005).

7. Татаринов Я. В. Следствия неинтегрируемого возмущения интегрируемых связей: модельные задачи малой размерности. *Прикладная математика и механика* **51** (5), 741–749 (1987).

8. Кулешов А. С., Улятовская И. И. Эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 2, 356–360 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.217

9. Кулешов А. С., Ифраимов С. В. О движении стержня по выпуклой поверхности. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **2**, 105–110 (2013).

10. Карапетян А. В., Румянцев В. В. Устойчивость консервативных и диссипативных систем. *Итоги науки и техники. Общая механика* **6**. Москва, ВИНИТИ (1983).

11. Воронец П. В. Об уравнениях движения для неголономных систем. *Математический сборник* **22** (4), 659–686 (1901).

Статья поступила в редакцию 21 ноября 2022 г.;
доработана 5 февраля 2023 г.;
рекомендована к печати 16 февраля 2023 г.

Контактная информация:

Кулешов Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.;
kuleshov@mech.math.msu.su
Видов Никита Михайлович — аспирант; nikitavidov98@gmail.com

Transgression effect in the problem of motion of a rod on a cylinder

A. S. Kuleshov, N. M. Vidov

Lomonosov Moscow State University, 1, Leninskie gory, Moscow, 119991, Russian Federation

For citation: Kuleshov A. S., Vidov N. M. Transgression effect in the problem of motion of a rod on a cylinder. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 3, pp. 568–580. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.310 (In Russian)

The problem of motion of a heavy rigid thin rod on a perfectly rough right circular cylinder is considered. It is assumed that the generatrix of the cylinder has a nonzero angle with the direction of gravity. The equilibrium positions of the rod on a cylinder form the equilibria manifold (for all these equilibria the rod touches the cylinder by its center of mass). The effect of transgression (nontrivial evolution along the equilibria manifold) of the rod on the cylinder is studied by the normal form method.

Keywords: nonholonomic system, equilibria manifold, transgression effect.

References

1. Tatarinov Ya. V. Composition of nonlinear oscillations with evolution in the vicinity of equilibrium manifolds of reversible systems. *Vestnik Mosk. University. Mathematics. Mechanics* **5**, 93–95 (1990). (In Russian)

2. Tatarinov Ya. V. Consequences of nonintegrable perturbations of integrable constraints: nonlinear effects of motion near the equilibrium manifol. *J. Appl. Maths. Mechs.* **56** (4), 507–517 (1992).

3. Bruno A. D. *Lokal'nyi metod nelineinogo analiza differentsial'nykh uravnenii.* Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian) [Engl. trans.: Bruno A. D. *Local Methods in Nonlinear Differential Equations.* Berlin, Heidelberg, Springer (1989)].

4. Bruno A. D. Analytical form of differential equations I. Trans. *Mosc. Math. Soc.* **25**, 119–262 (1971). (In Russian)

5. Bruno A. D. Analytical form of differential equations. II. *Trans. Mosc. Math. Soc.* **26**, 199–239 (1972). (In Russian)

6. Edneral V. F. Looking for Periodic Solutions of ODE Systems by the Normal Form Method. In: Wang D., Zheng Z. (eds). *Differential Equations with Symbolic Computation. Trends in Mathematics* 173–200, Birkhauser Basel (2005).

7. Tatarinov Ya. V. Consequences of nonintegrable perturbations of integrable constraints: model problems of low dimensionality. *Prikladnaia matematika i mekhanika* **51** (5), 741–749 (1987). (In Russian) [Engl. trans.: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **51** (5), 579–586 (1987)].

8. Kuleshov A. S., Ulyatovskaya I. I. The transgression effect in the problem of motion of an almost holonomic pendulum. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 2, 356–360 (2020). (In Russian). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.217

9. Kuleshov A. S., Ifraimov S. V. Motion of the rod on a convex surface. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2**, 105–110 (2013). (In Russian)

10. Karapetyan A. V., Rumyantsev V. V. Stability of conservative and dissipative system. *Itogi nauki i tekhniki. Obshchaia mekhanika*, vol. 6. Moscow, VINITI Publ. (1983). (In Russian) [Engl. trans.: *Applied Mechanics. Soviet Reviews. Stability and Analytical Mechanics.* Vol. 1, 1–145. New York, Hemisphere (1990)].

11. Woronetz P. V. On Equations of Motion of Nonholonomic Systems. *Matematicheskii sbornik* **22** (4), 659–686 (1901). (In Russian)

Received: November 21, 2022
Revised: February 5, 2023
Accepted: February 16, 2023

Authors' information:

Alexander S. Kuleshov — kuleshov@mech.math.msu.su
Nikita M. Vidov — nikitavidov98@gmail.com

ХРОНИКА

15 февраля 2023 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступил доктор физ.-мат. наук, профессор М. П. Юшков (Санкт-Петербургский государственный университет) с докладом на тему «История секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова санкт-петербургского Дома ученых им. М. Горького (К 75-летию секции)».

Краткое содержание доклада:

Секция теоретической механики при санкт-петербургском Доме ученых АН СССР была сформирована в 1947 г., прежде всего трудами Б. Н. Окунева, Н. Н. Поляхова, А. А. Яблонского. До ее возникновения различные вопросы механики обсуждались в рамках работы секции математики Дома ученых. Секцией теоретической механики последовательно руководили Б. Н. Окунев, Ю. А. Крутков, Н. В. Бутенин, Н. Н. Поляхов, П. Е. Товстик. В докладе дается краткая характеристика различных периодов работы секции теоретической механики. В настоящее время секция продолжает успешно работать, сохраняя традиции прошлых лет. Председателем, заместителем председателя и ученым секретарем секции являются М. П. Юшков, А. А. Тихонов, Г. В. Павилайнен.