УДК 539.3 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4
MSC 31A10, 45M05

О контактных задачах с деформируемым штампом и изменяемой реологией*

В. А. Бабешко[1,2], *О. В. Евдокимова*[2], *О. М. Бабешко*[2],
М. В. Зарецкая[2], *В. С. Евдокимов*[2]

[1] Южный научный центр РАН,
Российская Федерация, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Чехова, 41
[2] Кубанский государственный университет,
Российская Федерация, 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149

Для цитирования: *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Зарецкая М. В., Евдокимов В. С.* О контактных задачах с деформируемым штампом и изменяемой реологией // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 588–599. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.401

В работе впервые представлен один из методов исследования и решения контактных задач с деформированным штампом для тех случаев, когда возникает потребность изменения реологии материала штампа. В его основе лежит ранее опубликованный авторами новый универсальный метод моделирования, применяемый в граничных задачах для систем дифференциальных уравнениях в частных производных. С его помощью решения сложных векторных граничных задач для систем дифференциальных уравнений можно раскладывать по решениям скалярных граничных задач для отдельных дифференциальных уравнений. Среди них наиболее простыми являются уравнения Гельмгольца. Решения скалярных граничных задач представляются в виде фракталов, самоподобных математических объектов, впервые введенных американским математиком Б. Мандельбротом. Роль фракталов выполняют упакованные блочные элементы. Переход от систем дифференциальных уравнений в частных производных к отдельным уравнениям осуществляется с помощью преобразования академика Б. Г. Галеркина или представления потенциалами. Известно, что решения динамических контактных задач с деформируемым штампом сложной реологии являются громоздкими и их исследование всегда затруднительно. Проблема усложняется наличием в таких задачах решения дискретных резонансных частот, в свое время обнаруженных академиком И. И. Воровичем. Контактная задача с деформируемым штампом допускает построение решения, если можно решить контактную задачу для абсолютно жесткого штампа и построить решение граничной задачи для деформируемого штампа. В более ранних работах авторов деформируемый штамп описывался отдельным уравнением Гельмгольца. В настоящей работе рассматривается контактная задача о действии на многослойное основание полубесконечного штампа, описываемого системой уравнений Ламе. Показан один из методов перехода к иным реологиям при описании свойств деформируемого штампа в контактных задачах.

Ключевые слова: контактная задача, блочный элемент, деформируемый штамп, фракталы, реология, уравнения Ламе, Винера — Хопфа.

1. Введение. Исследованиями в области контактных задач занимались и продолжают заниматься многие известные ученые в связи с их ролью в инженерной практике. Лишь небольшие примеры исследований в этой области приведены в пуб-

*Работа поддержана Российским научным фондом (проект 22-21-00129).
© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

ликациях [1–16]. Созданы пакеты прикладных программ для численного решения некоторых контактных задач, в том числе с деформируемым штампом. Однако практика показала, что одни численные методы не позволяют вскрывать тонкие особенности поведений взаимодействующих деформируемых тел, упуская важные природные и техногенные свойства и явления. К их числу, например, относятся обнаруженные путем точного решения граничных задач методом блочного элемента такие явления, как новый тип «стартовых» землетрясений. Другим примером является выявление локализаций контактных напряжений или перемещений в динамических контактных задачах. Ранее они не были описаны. Аналитические исследования контактных задач посвящены рассмотрению взаимодействий с абсолютно жестким штампом.

В настоящей работе с применением нового, недавно разработанного авторами, метода моделирования проводится анализ особенностей взаимодействия деформируемого основания с деформируемым объектом в виде полосы, описываемым граничной задачей для уравнений Гельмгольца. Решение этой задачи открывает возможность решения контактных задач с деформируемыми штампами сложной реологии. В работе [15], следуя возможностям этого метода, впервые аналитически исследована контактная задача о действии деформируемого штампа в форме полосы и полуплоскости на многослойное основание. В качестве модели деформируемого штампа принимался объект, свойства которого описывались уравнением Гельмгольца. Согласно алгоритму названного выше метода моделирования, для рассмотрения деформируемого штампа из материала более сложной реологии, например описываемого системой уравнений Ламе, решение граничной задачи для него следует разложить по решениям граничных задач для уравнения Гельмгольца. Это позволит упростить представление решения для штампа сложной реологии и облегчит решение контактной задачи. Заметим, что без решения этих контактных задач затруднительно построение механических моделей самоорганизации и самосборки наночастиц, а также моделирование трещин нового типа в многокомпонентных средах.

2. Постановка задачи. Рассматривается многослойная среда, на ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси ox_1, ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в области $\Omega(0 \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$ действует вибрирующий по закону $e^{-i\omega t}$ деформируемый штамп, материал которого описывается системой уравнений Ламе. Считается, что полубесконечный штамп действует на основание в условиях плоской деформации и контакт осуществляется без трения. Тогда уравнение контактной задачи на многослойном основании описывается интегральным уравнением вида [16]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \mathbf{k}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\mathbf{q}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = \mathbf{w}(x_1,x_2), \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty,$$

$$\mathbf{k}(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{1}$$

$$\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2) = \|K_{mn}(\alpha_1,\alpha_2)\|, \quad m,n = 1,2.$$

Здесь $\mathbf{q}(x_1,x_2)$ — вектор контактных напряжений под штампом; $\mathbf{w}(x_1,x_2)$ — перемещения в зоне контакта; $\mathbf{k}(x_1,x_2)$ — ядро интегрального уравнения; функция

$\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2)$ — преобразование Фурье ядра интегрального уравнения. Ранее указанные задачи решались только численным методом. В результате оставались вне исследования некоторые особенности решений в динамических задачах. Кроме этого, численные методы оказывались либо малоэффективными, либо несостоятельными в случаях, когда области постановки граничных задач оказывались неограниченными. Именно для таких задач оказывается эффективным предложенный в настоящей работе метод. В работе показано различие решений рассматриваемых граничных задач в случаях жесткого и деформируемого штампов. Разработанный авторами подход [17] открыл возможность использовать фракталы, т. е. упакованные блочные элементы, являющиеся решениями достаточно простых граничных задач, при исследовании многокомпонентных сред.

С учетом этой возможности в качестве деформируемого штампа принимаются решения граничных задач в рассматриваемых областях, являющиеся упакованными блочными элементами для уравнения Гельмгольца. Именно по упакованным блочным элементам будут раскладываться решения контактных задач для деформируемых штампов более высокой реологии.

Граничная задача, описывающая поведение деформируемого штампа в условиях плоской деформации, определяется системой дифференциальных уравнений Ламе в области $\Omega(0 \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$, имеющей вид [16]

$$
\begin{gathered}
(\lambda+\mu)\,\partial_1\theta + \mu\Delta u_1 + k^2 u_1 + X_1 = 0, \quad \theta = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2, \quad k^2 = \rho\omega^2, \\
(\lambda+\mu)\,\partial_2\theta + \mu\Delta u_2 + k^2 u_2 + X_2 = 0, \quad x_1, x_2 \in \Omega, \\
\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \mathbf{u} = \{u_1, u_2\}, \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Здесь u_m — компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}$ в штампе вдоль горизонтальных осей $(m = 1, 2)$; ρ — плотность материала штампа; ω — частота колебания штампа; x_m — компоненты вектора массовых сил $(m = 1, 2)$. На границе штампа $(x_1 = 0)$ задаются граничные условия вида

$$
u_1(x_1, x_2) = u_1(0, x_2), \quad u_2(x_1, x_2) = u_2(0, x_2). \tag{3}
$$

Таким образом, необходимо построить в области $\Omega(0 \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ |x_2| \leqslant \infty)$ упакованные блочные элементы, которые смогут представить разложение решения граничной задачи для деформируемого штампа, описываемого уравнениями (2) и (3).

3. Разложение решения по блочным элементам. Для построения разложения решения векторной граничной задачи (2) по блочным элементам скалярной граничной задачи воспользуемся соотношением, представляющим разложение решения системы уравнений Ламе с помощью потенциалов в виде

$$
\begin{gathered}
u_1(x_1, x_2) = \partial_1\varphi(x_1, x_2) + \partial_2\psi(x_1, x_2), \\
u_2(x_1, x_2) = \partial_2\varphi(x_1, x_2) - \partial_1\psi(x_1, x_2).
\end{gathered} \tag{4}
$$

Участвующие в представлении (4) потенциалы берем в виде решений граничных задач для уравнения Гельмгольца вида

$$
\begin{gathered}
(\Delta - k_1^2)\varphi = g_1, \quad (\Delta - k_2^2)\psi = g_2, \quad k_1^2 = k^2(\lambda + 2\mu)^{-1}, \\
k_2^2 = k^2\mu^{-1}, \\
\varphi(x_1, x_2) = f_1(0, x_2), \\
\psi(x_1, x_2) = f_2(0, x_2), \quad x_1 = 0.
\end{gathered} \tag{5}
$$

Не прибегая к деталям, подробно описанным в [18], выпишем результат определения функций $f_1(0,x_2)$, $f_2(0,x_2)$ граничных условий (5) для блочных элементов $\varphi(x_1,x_2)$, $\psi(x_1,x_2)$.

Они выражаются с помощью функций граничных условий $u_1(0,x_2)$ и $u_2(0,x_2)$ векторной граничной задачи для уравнений Ламе (2). В результате получается следующее представление:

$$f_1(0,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_1(0,\alpha_2)e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2,\quad f_2(0,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_2(0,\alpha_2)e^{-i\alpha_2x_2}d\alpha_2,$$

$$F_1(0,\alpha_2)=i\Delta_2^{-1}\left[\alpha_2U_1\left(0,\alpha_2\right)-\alpha_{12+}U_2\left(0,\alpha_2\right)\right],\quad \alpha_{11+}=i\sqrt{\alpha_2^2-p_1^2},$$

$$F_2(0,\alpha_2)=-i\Delta_2^{-1}\left[\alpha_{11+}U_1\left(0,\alpha_2\right)+\alpha_1U_2\left(0,\alpha_2\right)\right],\quad \alpha_{12+}=i\sqrt{\alpha_2^2-p_2^2},$$

$$U_m\left(0,\alpha_2\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}u_m(0,x_2)e^{i\alpha_2x_2}dx_2,\quad \Delta_2=\alpha_2^2+\alpha_{11+}\alpha_{12+}.$$

Выразив массовые силы X_m, $m=1,2$, в виде [19]

$$X_1=\partial_1g_1+\partial_2g_2,\quad X_2=\partial_2g_1-\partial_1g_2,$$

получим представление правых частей потенциалов в форме g_m, $m=1,2$.

4. Вывод интегрального уравнения для деформируемого штампа. Поставленные двумерные задачи (1), (2) сводятся к одномерным со свободным вещественным параметром α_2 в результате применения преобразования Фурье по координате x_2.

Тогда интегральное уравнение (1), скрыв свободный параметр, принимает вид

$$\begin{gathered}\int\limits_{0}^{\infty}\mathbf{k}_0(x_1-\xi_1)\mathbf{q}(\xi_1)d\xi_1=\mathbf{w}(x_1),\quad \mathbf{q}(\xi_1)=\mathbf{q}(\xi_1,\alpha_2),\quad \mathbf{k}_0(x_1)=\mathbf{k}(x_1,\alpha_2),\\ \mathbf{k}_0(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{K}_0(\alpha_1)e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1,\quad \mathbf{K}_0(\alpha_1)=\mathbf{K}(\alpha_1,\alpha_2),\\ K_{0mn}(\alpha_1)=P_{0mn}^{-1}(\alpha_1)R_{0mn}(\alpha_1).\end{gathered}\tag{6}$$

Ради краткости считаем, что функции $K_{0mn}(\alpha_1)$ являются четными, мероморфными и на бесконечности обладают асимптотическим поведением $K_{0mn}(\alpha_1)=O(\alpha_1^{-1})$, $\operatorname{Im}\alpha_1=0$.

Таким свойством обладают ядра интегральных уравнений в смешанных задачах для многослойных сред [16].

Функция $K_{0mn}(\alpha_1)$ представляется отношением двух целых функций $R_{0mn}(\alpha_1)$ и $P_{0mn}(\alpha_1)$, имеющих счетные множества нулей, уходящих на бесконечность в окрестностях мнимых осей.

Граничные задачи (5) для блочных элементов становятся одномерными, после скрытия свободного параметра α_2

$$
\begin{gathered}
(\partial_1^2 x_1 + p_1^2)\varphi(x_1) = g_1(x_1),\\
\varphi(x_1) = \varphi(x_1, \alpha_2), \quad g_1(x_1) = g(x_1, \alpha_2), \quad p_1^2(\alpha_2) = k_1^2 - \alpha_2^2,\\
\varphi(x_1, \alpha_2) = \varphi(0), \quad x_1 \to 0,\\
(\partial_1^2 x_1 + p_2^2)\psi(x_1) = g_2(x_1),\\
\psi(x_1) = \psi(x_1, \alpha_2), \quad g_2(x_1) = g_2(x_1, \alpha_2), \quad p_2^2(\alpha_2) = k_2^2 - \alpha_2^2,\\
\psi(x_1, \alpha_2) = \psi(0), \quad x_1 \to 0, \quad x_1 \in \Omega_1.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Применив к уравнениям (7) метод блочного элемента [18], получим следующие представления элементов для внешних форм $\omega_1(\alpha_1)$ и $\omega_2(\alpha_1)$:

$$\omega_1(\alpha_1) = i(\alpha_1 - p_1)\varphi(0) + G_1(p_1) - G_1(\alpha_1), \quad \omega_1(p_1) = 0,$$

$$\omega_2(\alpha_1) = i(\alpha_1 - p_2)\psi(0) + G_2(p_2) - G_2(\alpha_1), \quad \omega_2(p_2) = 0,$$

$$G_m(\alpha_1) = \int\limits_0^\infty g_m(x_1) e^{i\alpha_1 x_1} d\alpha, \quad m = 1, 2.$$

Представим вектор решения $\mathbf{u}$ граничных задач разложенным упакованными блочными элементами, используя результат работы [18]. Упакованные блочные элементы имеют вид

$$\varphi(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_1(\alpha)}{\alpha^2 - p_1^2} e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad \psi(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_2(\alpha)}{\alpha^2 - p_2^2} e^{-i\alpha x_1} d\alpha.$$

Имеем с учетом свободного параметра α_2 и (4):

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = -i\alpha_1 \Phi(\alpha_1, \alpha_2) - i\alpha_2 \Psi(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$U_2(\alpha_1, \alpha_2) = -i\alpha_2 \Phi(\alpha_1, \alpha_2) + i\alpha_1 \Psi(\alpha_1, \alpha_2).$$

Внесем в последние соотношения внешние формы:

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = -i\alpha_1 \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1^2 - p_1^2} - i\alpha_2 \frac{\omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1^2 - p_2^2},$$

$$U_2(\alpha_1, \alpha_2) = -i\alpha_2 \frac{\omega_1(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1^2 - p_1^2} + i\alpha_1 \frac{\omega_2(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_1^2 - p_2^2}.$$

Для приведения смешанной граничной задачи к интегральному уравнению приравняем вектор перемещения $\mathbf{w}$ из (3) в зоне контакта, составленный для многослойного основания, и вектор упакованных блочных элементов (4), (5), которые в результате действия дифференциальных операторов представляют перемещения. Кроме этого, приравняем вектор контактных напряжений и вектор, связанный с внешними объемными силами $\mathbf{G} = \mathbf{Q}$. В обеих задачах предварительно применяется к ним преобразование Фурье. После преобразований, объединения компонент вектора напряжений, это приводит к соотношениям

$$\int_0^\infty \mathbf{m}(x_1-\xi_1,\alpha_2)\mathbf{q}(\xi_1,\alpha_2)d\xi_1=\mathbf{s}(x_1,\alpha_2),\quad 0\leqslant x_1\leqslant\infty,\ |x_2|\leqslant\infty,$$
$$\mathbf{M}(\alpha_1,\alpha_2)=\|M_{mn}\|,\quad m,n=1,2. \tag{8}$$

Здесь приняты обозначения:

$$M_{11}(\alpha_1,\alpha_2)=K_{11}(\alpha_1,\alpha_2)-(\alpha_1^2-p_1^2)^{-1}i\alpha_1,$$
$$M_{12}(\alpha_1,\alpha_2)=K_{12}(\alpha_1,\alpha_2)-(\alpha_1^2-p_2^2)^{-1}i\alpha_2,$$
$$M_{21}(\alpha_1,\alpha_2)=K_{21}(\alpha_1,\alpha_2)-(\alpha_1^2-p_1^2)^{-1}i\alpha_2,$$
$$M_{22}(\alpha_1,\alpha_2)=K_{22}(\alpha_1,\alpha_2)+(\alpha_1^2-p_2^2)^{-1}i\alpha_1,$$
$$s_1(x_1,\alpha_2)=G_1(p_1,\alpha_2)r_{11}(x_1,\alpha_2)+G_2(p_2,\alpha_2)r_{12}(x_1,\alpha_2)+n_1(x_1,\alpha_2),$$
$$s_2(x_1,\alpha_2)=G_1(p_1,\alpha_2)r_{21}(x_1,\alpha_2)+G_{22}(p_2,\alpha_2)r_{22}(x_1,\alpha_2)+n_2(x_1,\alpha_2),$$
$$S_1(\alpha_1,\alpha_2)=G_1(p_1,\alpha_2)R_{11}(\alpha_1,\alpha_2)+G_2(p_2,\alpha_2)R_{12}(\alpha_1,\alpha_2)+N_1(\alpha_1,\alpha_2),$$
$$S_2(\alpha_1,\alpha_2)=G_1(p_1,\alpha_2)R_{21}(\alpha_1,\alpha_2)+G_{22}(p_2,\alpha_2)R_{22}(\alpha_1,\alpha_2)+N_2(\alpha_1,\alpha_2),$$
$$R_{11}(\alpha_1,\alpha_2)=-i\alpha_1\frac{G_1(p_1,\alpha_2)e^{i(\alpha_1-p_1)A}}{\alpha_1^2-p_1^2},\quad R_{12}(\alpha_1,\alpha_2)=-i\alpha_2\frac{G_2(p_2,\alpha_2)e^{i(\alpha_1-p_2)A}}{\alpha_1^2-p_2^2},$$
$$R_{21}(\alpha_1,\alpha_2)=-i\alpha_2\frac{G_1(p_1,\alpha_2)e^{i(\alpha_1-p_1)A}}{\alpha_1^2-p_1^2},\quad R_{22}(\alpha_1,\alpha_2)=i\alpha_1\frac{G_2(p_2,\alpha_2)e^{i(\alpha_1-p_2)A}}{\alpha_1^2-p_2^2},$$
$$N_1(\alpha_1,\alpha_2)=-i\alpha_1\frac{i(\alpha_1-p_1)\varphi(A)e^{i\alpha_1A}}{\alpha_1^2-p_1^2}-i\alpha_2\frac{i(\alpha_1-p_2)\psi(A)e^{i\alpha_1A}}{\alpha_1^2-p_2^2},$$
$$N_2(\alpha_1,\alpha_2)=-i\alpha_2\frac{i(\alpha_1-p_1)\varphi(A)e^{i\alpha_1A}}{\alpha_1^2-p_1^2}+i\alpha_1\frac{i(\alpha_1-p_2)\psi(A)e^{i\alpha_1A}}{\alpha_1^2-p_2^2}.$$

Здесь при интегрировании было применено правило

$$m(x_1,\alpha_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}M(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_1x_1}d\alpha_1.$$

Легко видеть, что уравнение (8), скрыв свободный параметр α_2, превращается в уравнение (6), зависящее лишь от параметра α_1, по которому выполняются все действия при его решении.

Таким образом, переход к деформируемым штампам в контактных задачах приводит к решению системы интегральных уравнений Винера — Хопфа с присутствием в правых частях функционалов $G_m(p_1,\alpha_2)$ от неизвестных контактных напряжений. Этим контактные задачи с деформируемым штампом качественно отличаются от случая абсолютно жесткого штампа.

5. Решение системы интегральных уравнений Винера — Хопфа. Точное решение системы интегральных уравнений Винера — Хопфа получается лишь для частных случаев, детально описанных в [20, 21]. В этих работах впервые удалось построить точное решение системы интегральных уравнений Винера — Хопфа для случая достаточно общих ядер системы, преобразования Фурье которых являются мероморфными функциями. Это решение в [20] дается теоремой, подготовительная часть которой изложена в указанной статье.

Будем рассматривать систему интегральных уравнений (6), которая получается после несложных обозначений, выполненных в системе интегральных уравнений (8), состоящих в заменах

$$\mathbf{K}(\alpha_1) = \mathbf{M}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mathbf{q}(\alpha_1) = \mathbf{q}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Предполагается, что ни один из элементов матрицы-функции $\mathbf{K}$ не обращается тождественно в нуль, а нули четной целой функции-определителя $\Delta(\alpha)$ являются однократными. Считаем также, что $\operatorname{Ind}\det\{\mathbf{K}\}(\alpha_1) = 0$, $\Delta(\alpha_1) \neq 0$, $-\infty < \alpha_1 < \infty$. В этом случае справедлива теорема.

Теорема [20]. *Единственное в $L_p(0,\infty)$, $p \geqslant 1$, решение системы интегральных уравнений (6) дается соотношением*

$$q_1(x) = A_1 e^{i\eta x} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_1} x_1(u) e^{-iux} du + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_2} x_2(u) e^{-iux} du,$$

$$q_2(x) = A_2 e^{i\eta x} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_1} y_1(u) e^{-iux} du + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_2} y_2(u) e^{-iux} du,$$

$$y_1(u) = C_1(u) x_1(u), \quad y_2(u) = C_1(u) x_2(u),$$

$$x_1(u) = \left[A_1 - A_2\left(1 + \sum_{n2=1}^{\infty} \frac{D_+(-\eta) T(-z_{n2}) M_{2+}(-z_{n1})}{D'_+(-z_{n2})(z_{n2} - \eta)}\right)\right] \frac{1}{M_{1+}(u)(u + z_{n2})},$$

$$x_2(u) = \left[A_1 + A_2\left(1 + \sum_{n1=1}^{\infty} \frac{D_+(-\eta) T(-z_{l1}) M_{1+}(-z_{n2})}{D'_+(-z_{n1})(z_{n1} - \eta)}\right)\right] \frac{1}{M_{2+}(u)(u + z_{n1})}.$$

Здесь приняты обозначения:

$$A_1 = \frac{B_1 K_{22}(-\eta) - B_2 K_{12}(-\eta)}{\Delta_1(-\eta)}, \quad A_2 = \frac{B_2 K_{11}(-\eta) - B_1 K_{21}(-\eta)}{\Delta_1(-\eta)},$$

$$\Delta_1(u) = K_{11}(u) K_{22}(u) - K_{12}(u) K_{21}(u), \quad K_{mn}(u) \neq 0, \quad \Delta_1(u) \neq 0,$$

$$-\infty < u < \infty, \quad m, n = 1, 2, \quad \operatorname{Ind}\Delta_1(u) = 0,$$

$$\Delta_1(u) = M_1(u) M_2(u), \quad M_k(\pm z_{lk}) = 0, \quad \operatorname{Im} z_{lk} > 0, \quad k = 1, 2, \quad l = 1, 2, \ldots,$$

$$D(u) = \Delta_1(u) C(u), \quad M_k(u) = \frac{\varphi_k(u)}{C(u)}, \quad C(\pm\xi_n) = 0, \quad \operatorname{Im}\xi_n > 0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$M_1(u) = N_2(u) - N_1(u), \quad M_2(u) = N_2(u) + N_1(u), \quad N(u) = -\frac{N_1(u)}{N_2(u)},$$

$$T(u) = \frac{N(u) - C_1(u)}{C_1(u)}, \quad C_1(u) = -\frac{K_{21}(u)}{K_{22}(u)}.$$

Результат факторизации функций $M_k(u)$, $k=1,2$, в виде произведения обозначен выражением $M_k(u) = M_{k+}(u)M_{k-}(u)$. В нашем случае $u=\alpha_1$, а параметр α_2 является свободным параметром преобразования Фурье по координате x_2.

Детали ее использования описаны в указанной работе.

С ее помощью можно построить решение системы интегральных уравнений (6), которое будет иметь в преобразованиях Фурье, с учетом свободного параметра α_2, следующую структуру:

$$\begin{aligned} Q_1(\alpha_1,\alpha_2) &= G_1(p_1,\alpha_2)Q_{11}(\alpha_1,\alpha_2) + G_2(p_2,\alpha_2)Q_{12}(\alpha_1,\alpha_2) + Q_{13}(\alpha_1,\alpha_2), \\ Q_2(\alpha_1,\alpha_2) &= G_1(p_1,\alpha_2)Q_{21}(\alpha_1,\alpha_2) + G_2(p_2,\alpha_2)Q_{22}(\alpha_1,\alpha_2) + Q_{23}(\alpha_1,\alpha_2). \end{aligned} \tag{9}$$

Для определения функционалов, $G_m(p_m,\alpha_2)$, $m=1,2$, внесем параметры p_1, p_2 в функции в левой части равенств (9) и разрешим систему уравнений относительно функционалов. В результате получим их значения

$$G_1(p_1,\alpha_2) = \Delta^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\left\langle Q_{13}(\alpha_1,\alpha_2)\left[1-Q_{22}(\alpha_1,\alpha_2)\right] + Q_{23}(\alpha_1,\alpha_2)Q_{12}(\alpha_1,\alpha_2)\right\rangle,$$

$$G_2(p_1,\alpha_2) = \Delta^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\left\langle Q_{13}(\alpha_1,\alpha_2)Q_{21}(\alpha_1,\alpha_2) - Q_{23}(\alpha_1,\alpha_2)\left[1-Q_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\right]\right\rangle,$$

$$\Delta(\alpha_1,\alpha_2) = \left[1-Q_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\right]\left[1-Q_{22}(\alpha_1,\alpha_2)\right] - Q_{12}(\alpha_1,\alpha_2)Q_{21}(\alpha_1,\alpha_2).$$

Внесенные в правые части соотношений (9), последние представляют решение контактной задачи с деформируемым штампом измененной реологии в преобразованиях Фурье. Соотношение

$$\left[1-Q_{11}(\alpha_1,\alpha_2)\right]\left[1-Q_{22}(\alpha_1,\alpha_2)\right] - Q_{12}(\alpha_1,\alpha_2)\mathrm{Q}_{21}(\alpha_1,\alpha_2) = 0$$

является дисперсионным уравнением резонансных множеств частоты ω, зависящих от параметров α_1, α_2, входящих в дисперсионное уравнение посредством зависимостей $k^2=\rho\omega^2$, $k_1^2 = k^2(\lambda+2\mu)^{-1}$, $k_2^2 = k^2\mu^{-1}$, $p_m^2 = k_m^2 - \alpha_2^2$, $m=1,2$. Существование резонансов в контактных задачах с деформируемым штампом предсказал академик И. И. Ворович [22, 23].

Выполнив указанные подстановки, решение контактной задачи с деформируемым штампом и измененной реологией представим в виде

$$q_m(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q_m(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2, \quad m=1,2.$$

6. Выводы. В статье продемонстрирована универсальность фрактального метода [17] при решении не только однородных, но и смешанных граничных задач. Особенность его применения к последним состоит в решении интегральных уравнений, содержащих в правых частях функционалы от решений. Они определяются после получения решения систем интегральных уравнений и последующего его применения для построения дисперсионных уравнений в динамических смешанных задачах. Предложенный метод позволяет, последовательно изменяя реологию, добиваться необходимых требований для применяемого материала деформируемого штампа.

Литература

1. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J. R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proc. R. Soc. A.* **471**, 20150271 (2015). https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0271

2. Zhou S., Gao X. L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Z. Angew. Math. Phys.* **64**, 145–166 (2013). https://doi.org/10.1007/s00033-012-0205-0

3. Almqvist A. An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem. Available at: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216-an-lcp-solution-of-the-linear-elastic-contact-mechanics-problem (2013). http://doi.org/10.13140/RG.2.1.3960.7200

4. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **22**, 508–519 (2015). https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.08.012

5. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I. Theory. *Int. J. Solids Struct* **35** (18), 2349–2362 (1998). https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00154-6

6. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II. Examples. *Int. J. Solids Struct.* **35** (18), 2363–2378 (1998). https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00155-8

7. Guler M. A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci.* **49** (2), 161–182 (2007). https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006

8. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *Eur. J. Mech. A/Solids* **26** (1), 171–188 (2007). https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007

9. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International* **40** (4), 574–579 (2007). https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008

10. Andersson L. E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Appl. Math. Optim.* **42**, 169–202 (2000). https://doi.org/10.1007/s002450010009

11. Cocou M., Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Math. Modelling and Num. Analysis* **34** (5), 981–1001 (2000).

12. Kikuchi N., Oden J. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods.* Philadelphia, SIAM (1988).

13. Raous M., Cangémi L., Cocou M. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **177**, 383–399 (1999). https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00389-2

14. Shillor M., Sofonea M., Telega J. J. *Models and Analysis of Quasistatic Contact. Lect. Notes Phys., vol. 655.* Berlin, Heidelberg, Springer (2004). https://doi.org/10.1007/b99799

15. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О контактных задачах с деформируемым штампом. *Проблемы прочности и пластичности* **84** (1), 25–34 (2022). https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34

16. Ворович И. И., Бабешко В. А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.* Москва, Наука (1979).

17. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Академии наук* **499**, 21–26 (2021). https://doi.org/9.31857/S2686740021040039

18. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Об одном методе решения граничных задач динамической теории упругости в четверть плоскости. *Прикладная математика и механика* **85** (3), 275–282 (2021). https://doi.org/10.31857/S0032823521030024

19. Новацкий В. *Теория упругости.* Москва, Мир (1975).

20. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Об одной факторизационной задаче Гильберта — Винера и методе блочного элемента. *Доклады Академии наук* **459** (5), 557–561 (2014).

21. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On the problem of evaluating the behavior of multicomponent materials in mixed boundary conditions in contact problems. *Materials Physics and Mechanics* **48** (3), 379–385 (2022). https://doi.org/10.18720/MPM.48(3)2022_8

22. Ворович И. И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы. *Доклады Академии наук СССР* **245** (4), 817–820 (1979).

23. Ворович И. И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. *Доклады Академии наук СССР* **245** (5), 1076–1079 (1979).

Статья поступила в редакцию 10 февраля 2023 г.;
доработана 5 мая 2023 г.;
рекомендована к печати 18 мая 2023 г.

Контактная информация:

Бабешко Владимир Андреевич — д-р физ.-мат. наук, проф., акад. РАН; babeshko41@mail.ru
Евдокимова Ольга Владимировна — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр.; evdokimova.olga@mail.ru
Бабешко Ольга Мефодиевна — д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотр.; babeshko49@mail.ru
Зарецкая Марина Валерьевна — д-р физ.-мат. наук, проф.; zarmv@mail.ru
Евдокимов Владимир Сергеевич — студент, лаборант; evdok_vova@mail.ru

On contact problems with a deformable punch and variable rheology*

V. A. Babeshko[1,2], *O. V. Evdokimova*[2], *O. M. Babeshko*[2], *M. V. Zaretskaya*[2], *V. S. Evdokimov*[2]

[1] Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
41, ul. Chekhova, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation
[2] Kuban State University,
149, ul. Stavropolskaya, Krasnodar, 350040, Russian Federation

For citation: Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Zaretskaya M. V., Evdokimov V. S. On contact problems with a deformable punch and variable rheology. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 588–599. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.401 (In Russian)

The paper presents for the first time one of the methods for studying and solving contact problems with a deformed stamp for those cases when there is a need to change the rheology of the stamp material. It is based on a new universal modeling method previously published by the authors, which is used in boundary value problems for systems of partial differential equations. With its help, solutions of complex vector boundary value problems for systems of differential equations can be decomposed into solutions of scalar boundary value problems for individual differential equations. Among them, the Helmholtz equations are the simplest. Solutions to scalar boundary value problems are represented as fractals, self-similar mathematical objects, first introduced by the American mathematician B. Mandelbrot. The role of fractals is performed by packed block elements. The transition from systems of differential equations in partial derivatives to individual equations is carried out using the transformation of academician B. G. Galerkin or representation by potentials. It is known that the solutions of dynamic contact problems with a deformable stamp of complex rheology are cumbersome and their study is always difficult. The problem is complicated by the presence of discrete resonant frequencies in such problems, which were once discovered by Academician I. I. Vorovich. A contact problem with a deformable punch admits the construction of a solution if it is possible to solve the contact problem for an absolutely rigid punch and construct a solution to the boundary problem for a deformable punch. In earlier works of the authors, the deformable stamp was described by a separate Helmholtz equation. In this paper, we consider a contact problem on the action of a semi-infinite stamp on a multilayer base, described by the system of Lame equations. One of the methods of transition to other rheologies is shown when describing the properties of a deformable stamp in contact problems.

Keywords: block element, factorization, integral equations, external forms, cracks of a new type.

*The work was supported by the Russian Science Foundation (project 22-21-00129).

References

1. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J. R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coefficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proc. R. Soc. A.* **471**, 20150271 (2015). https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0271

2. Zhou S., Gao X. L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Z. Angew. Math. Phys.* **64**, 145–166 (2013). https://doi.org/10.1007/s00033-012-0205-0

3. Almqvist A. An LCP solution of the linear elastic contact mechanics problem. Available at: https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43216-an-lcp-solution-of-the-linear-elastic-contact-mechanics-problem (2013). http://doi.org/10.13140/RG.2.1.3960.7200

4. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis. Real World Applications* **22**, 508–519 (2015). https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.08.012

5. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I. Theory. *Int. J. Solids Struct* **35** (18), 2349–2362 (1998). https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00154-6

6. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. II. Examples. *Int. J. Solids Struct* **35** (18), 2363–2378 (1998). https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00155-8

7. Guler M. A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci* **49** (2), 161–182 (2007). https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006

8. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *Eur. J. Mech. A/Solids* **26** (1), 171–188 (2007). https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007

9. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International* **40** (4), 574–579 (2007). https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008

10. Andersson L. E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Appl. Math. Optim.* **42**, 169–202 (2000). https://doi.org/10.1007/s002450010009

11. Cocou M., Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *Math. Modelling and Num. Analysis* **34** (5), 981–1001 (2000).

12. Kikuchi N., Oden J. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods* SIAM, Philadelphia (1988).

13. Raous M., Cangémi L., Cocou M. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **177**, 383–399 (1999). https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00389-2

14. Shillor M., Sofonea M., Telega J. J. *Models and Analysis of Quasistatic Contact. Lect. Notes Phys., vol. 655.* Berlin, Heidelberg, Springer (2004). https://doi.org/10.1007/b99799

15. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On contact problems with a deformable stamp. *Problems of strength and ductility* **84** (1), 25–34 (2022). https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34 (In Russian)

16. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains.* Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian)

17. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Akademii nauk* **499**, 21–26 (2021). https://doi.org/9.31857/S2686740021040039 (In Russian)

18. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On one method for solving boundary value problems of dynamic theory of elasticity in a quarter-plane. *Applied Mathematics and Mechanics* **85** (3), 275–282 (2021). https://doi.org/10.31857/S0032823521030024 (In Russian)

19. Novatsky V. *Theory of elasticity.* Moscow, Mir Publ. (1975). (In Russian)

20. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On one Hilbert — Wiener factorization problem and the block element method. *Doklady Akademii nauk* **459** (5), 557–561 (2014). (In Russian)

21. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. On the problem of evaluating the behavior of multicomponent materials in mixed boundary conditions in contact problems. *Materials Physics and Mechanics* **48** (3), 379–385 (2022). https://doi.org/10.18720/MPM.48(3)2022_8

22. Vorovich I. I. Spectral properties of the boundary value problem of elasticity theory for an inhomogeneous strip. *Doklady of the USSR Academy of Sciences* **245** (4), 817–820 (1979). (In Russian)

23. Vorovich I. I. Resonance properties of an elastic inhomogeneous strip. *Doklady of the USSR Academy of Sciences* **245** (5), 1076–1079 (1979). (In Russian)

Received: February 10, 2023
Revised: May 5, 2023
Accepted: May 18, 2023

Authors' information:

Vladimir A. Babeshko — babeshko41@mail.ru
Olga V. Evdokimova — evdokimova.olga@mail.ru
Olga M. Babeshko — babeshko49@mail.ru
Marina V. Zaretskaya — zarmv@mail.ru
Vladimir S. Evdokimov — evdok_vova@mail.ru