

# Волны Рэлея в электроупругой среде с преднапряженным неоднородным покрытием\*

*Т. И. Белянкова, В. В. Калинин*

Южный научный центр РАН,  
Российская Федерация, 344006, Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41

**Для цитирования:** *Белянкова Т. И., Калинин В. В.* Волны Рэлея в электроупругой среде с преднапряженным неоднородным покрытием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 600–615. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.402>

Предложен подход к исследованию влияния характера начальных механических напряжений и электростатического поля на структуру и поведение рэлеевских волн в пьезоэлектрических средах с неоднородным покрытием. В настоящей работе рассмотрены двухкомпонентные покрытия из функционально градиентного пьезоэлектрического материала (ФГПМ) с высокоскоростным (скорость сдвиговой волны включения больше скорости сдвиговой волны в подложке) или низкоскоростным (скорость сдвиговой волны включения меньше скорости сдвиговой волны в подложке) включением. Начально-деформированное состояние (НДС) покрытия наводится за счет раздельного или совместного действия начальных механических напряжений и внешнего электростатического поля. Исследуется влияние типа неоднородности и характера начальных механических напряжений при наличии или отсутствии начального электростатического поля на особенности распространения рэлеевских волн для задач с электрически открытой либо электрически закороченной поверхностью. Установлено, что наличие начального электростатического поля малой напряженности в зависимости от его направленности лишь незначительно влияет на действие начальных механических напряжений. Наличие электростатического поля большой напряженности приводит к дополнительной деформации материала, к значительному изменению скоростей мод поверхностных акустических волн (ПАВ) и существенному изменению структуры поверхностного волнового поля. Полученные результаты приведены в безразмерных параметрах и могут представлять практический интерес при разработке, проектировании и оптимизации новых материалов для микро- и наноразмерных приборов и устройств на рэлеевских поверхностных акустических волнах с высокими эксплуатационными характеристиками.

*Ключевые слова:* пьезоэлектрическая структура, подложка, неоднородное покрытие, функционально градиентный пьезоэлектрический материал, начальные напряжения, начально-деформированное состояние, внешнее электростатическое поле, поверхностные акустические волны, рэлеевские волны.

**1. Введение.** Исследование упругих и электроупругих волн в периодически слоистых анизотропных средах, моделирующих такие искусственные гетероструктуры, как сверхрешетки, композиты, многослойные пленки и т. д., привлекает все большее внимание. В [1–7] предложен ряд подходов для построения и анализа дис-

---

\*Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Южного научного центра РАН (номер госрегистрации 122020100343-4).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

персионных уравнений, описывающих распространение объемных, поверхностных и волноводных мод с различной поляризацией в периодически слоистых средах с различной анизотропией. В [8] для анализа спектра скоростей поверхностных акустических волн (ПАВ) в структурах с многослойным покрытием предложен импедансный метод, позволяющий связать свойства спектра с акустическими параметрами структуры. В [9] представлен модифицированный метод матриц переноса, основанный на использовании фундаментальных экспоненциальных матриц представления поверхностных волн и предназначенный для аналитического исследования ПАВ в анизотропных средах. В [10] на основе исследования свойств функции Грина трехслойного полупространства показана трансформация рэлеевских скоростей ПАВ неоднородной структуры в зависимости от сочетания свойств слоистых включений, установлены соотношения параметров, увеличивающих и уменьшающих скорости ПАВ и определяющие наличие диапазона «запирания» волны. В работах [11–13] исследованы структуры как с кусочно-непрерывным, так и с непрерывным изменением свойств.

Особенности распространения поверхностных рэлеевских волн в пьезоэлектрических материалах и различного рода пьезоэлектрических структурах исследованы в [14–17]. Более полный обзор работ, посвященных исследованиям распространения ПАВ в слоистых анизотропных пьезоэлектрических структурах и их использованию, представлен в обзорах [18, 19].

В [20] рассмотрена связь между уравнениями линейного пьезоэлектричества и более общими нелинейными уравнениями электроупругости. Представлены линейные уравнения для малых динамических полей, наложенных на статическое смещение. В [21–23] в рамках теории наложения малых деформаций на конечные проведена последовательная линеаризация, построены линеаризованные определяющие соотношения динамики однородных и структурно-неоднородных предварительно напряженных электро- [21, 22] и электротермоупругой [23] сред при наличии внешних электрических полей. В [24] на примере структур «пьезоэлектрический кристалл / изотропная подложка» и «изотропный слой / пьезоэлектрическая подложка» исследовано влияние электростатического поля на параметры дисперсии и анизотропию распространения ПАВ. Показано, что воздействием электростатического поля при определенном сочетании физических характеристик материалов слоя и подложки можно контролировать разрешение или запрещение распространения волны в некотором частотном диапазоне.

Особенности распространения волн Рэля в структурах из функционально градиентных пьезоэлектрических материалов (ФГПМ), свойства которых экспоненциальным образом изменяются по глубине, рассмотрены в [25–28].

Более общая модель неоднородных пьезоэлектрических структур рассмотрена в [29, 30]. В [29] рассмотрены особенности распространения рэлеевских волн в структурах с неоднородным покрытием из двух и трех различных пьезоэлектрических материалов. В [30] развит метод исследования распространения волн Рэля в структурах с неоднородным преднапряженным покрытием, выполненным из ФГПМ. Начально-деформированное состояние (НДС) покрытия вызвано действием начальных механических напряжений и внешнего электростатического поля. В настоящей работе в рамках предложенного подхода исследовано влияние характера начальных воздействий на рэлеевские волны в пьезоэлектрических структурах с неоднородным покрытием. Рассмотрены структуры с двухкомпонентным покрытием из ФГПМ, свойства которого немонотонным образом меняются по толщине от параметров

основного материала PZT-5Н до параметров высокоскоростного или низкоскоростного включений. Материалы полупространства и покрытия в естественном состоянии (ЕС) представляют собой пьезоэлектрики класса 6mm, оси симметрии которых ориентированы по нормали к поверхности среды. НДС покрытия наводится за счет как раздельного, так и совместного действия начальных механических напряжений и внешнего однородного электростатического поля. Исследуется влияние типа неоднородности и характера начальных механических воздействий с учетом и без учета начального электростатического поля на особенности распространения рэлеевских волн для задач с электрически открытой и закороченной поверхностью.

**2. Постановка задачи.** Рассматривается задача о распространении ПАВ рэлеевского типа, вызванных действием удаленного источника гармонических колебаний, в сегнетоэлектрической гетероструктуре. Структура представляет собой неоднородное преднапряженное пьезоактивное покрытие ( $0 \leq x_3 \leq H$ ) с непрерывно изменяющимися по толщине свойствами на пьезоэлектрической подложке,  $x_3 \leq 0$ ,  $|x_1|, |x_2| \leq \infty$  (рис. 1). Изменение физических свойств покрытия описывается функциями:

$$\rho^{(1)} = \rho_0 f_\rho^{(1)}(x_3), \quad c_{ij}^{(1)} = c_{ij}^0 f_c^{(1)}(x_3), \quad e_{ij}^{(1)} = e_{ij}^0 f_e^{(1)}(x_3), \quad \varepsilon_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^0 f_\varepsilon^{(1)}(x_3), \quad (1)$$

где  $\rho_0, c_{ij}^0, e_{ij}^0, \varepsilon_{ij}^0$  — соответственно плотность компоненты тензоров упругих констант, пьезоэлектрических модулей и тензора диэлектрических проницаемостей основного материала покрытия и материала подложки, в качестве которого использован пьезоэлектрический материал гексагональной сингонии класса 6mm с осью симметрии, направленной вдоль оси  $x_3$ .

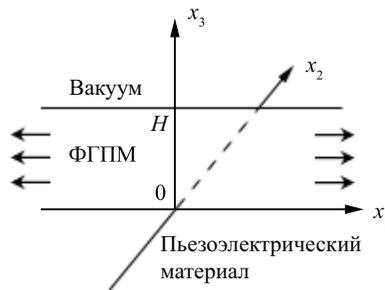


Рис. 1. Геометрия задачи.

Полагается, что на поверхности среды отсутствуют механические напряжения, электрически поверхность либо свободно контактирует с вакуумом, либо металлизирована и закорочена.

НДС покрытия однородно и наводится за счет действия начальных механических напряжений и однородного электростатического поля [13, 21–23, 30]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^T, \quad \Lambda = \delta_{ij} v_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad \varphi_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{R}, \quad v_i = \text{const}. \quad (2)$$

Здесь  $\mathbf{R}, \mathbf{r}$  — радиус-векторы точки среды в НДС и в естественном состоянии (ЕС) соответственно;  $\mathbf{\Lambda}$  — градиент деформации;  $\mathbf{G}$  — мера деформации Коши — Грина;  $v_i = 1 + \delta_i$ ,  $\delta_i$  — главные относительные удлинения;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,

$\varphi_0$  — электрический потенциал;  $\mathbf{E}_0$  — напряженность начального внешнего электростатического поля. Исследования проводятся в лагранжевой системе координат, связанной с ЕС материала.

Полагаем, что режим колебаний в среде установившийся и удовлетворяет условиям ( $k = 1, 3, 4$ ,  $s = 1, 2, 3$ ,  $n = 1, 2$ ):

$$u_k^{(n)} = u_k^{(n)}(x_1, x_3), \quad \partial/\partial x_2 = 0, \quad u_2^{(n)} = 0, \quad u_s^{(0)} = 0, \quad (3)$$

где  $u_1^{(n)}$  и  $u_3^{(n)}$  — компоненты вектора перемещений,  $u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}$ ;  $\varphi^{(n)}$  — электрический потенциал. Верхний индекс 0, 1, 2 отвечает соответственно вакууму, покрытию и полупространству. В работе использованы безразмерные параметры [21–23, 29, 30]:  $l' = l/H$ ,  $\rho'^{(n)} = \rho^{(n)}/\rho^{(2)}$ ,  $c'_{ij}{}^{(n)} = c_{ij}^{(n)}/c_{44}^{(2)}$ ,  $e'_{ij}{}^{(n)} = e_{ij}^{(n)}/\xi/c_{44}^{(2)}$ ,  $\varepsilon'_{ij}{}^{(n)} = \varepsilon_{ij}^{(n)}/\xi^2/c_{44}^{(2)}$ ,  $\varphi'^{(n)} = \varphi^{(n)}/(\xi H)$ ,  $E'_k = E_k/\xi$ .  $\varepsilon^{(0)}$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $\xi = 10^{10}$  В/м — специальный множитель,  $c_{44}^{(2)}$  — модуль сдвига материала полупространства,  $\kappa_2 = \omega H/V_S^{(2)}$  и  $\kappa_{2e} = \omega H/V_{Se}^{(2)}$  — безразмерные частоты,  $V_{Se}^{(2)}$  и  $V_S^{(2)}$  — скорости объемных сдвиговых волн с учетом и без учета пьезоэлектрических свойств среды ( $V_{Se}^{(2)} = \sqrt{(c_{44}^{(2)} + (e_{15}^{(2)})^2/\varepsilon_{11}^{(2)})/\rho^{(2)}}$  и  $V_S^{(2)} = \sqrt{c_{44}^{(2)}/\rho^{(2)}}$ ). Далее временной множитель и штрихи опущены.

Задача о движении составной преднапряженной электроупругой среды описывается уравнениями [21–23, 30] ( $\Theta^{(n)} = \Pi^{(n)} + \mathbf{m}^{(n)}$ );  $\Theta$ ,  $\Pi$  и  $\mathbf{m}$  — соответственно линейризованные тензор напряжений, механический тензор напряжений Пиолы и электрический тензор Пиолы — Максвелла):

$$\nabla_0 \cdot \Theta^{(n)} = \rho_0^{(n)} \ddot{\mathbf{u}}^{e(n)}, \quad \nabla_0 \cdot \mathbf{d}^{(n)} = 0, \quad n = 1, 2. \quad (4)$$

Для вакуума справедливо

$$\Delta\varphi^{(0)} = 0. \quad (5)$$

Граничные условия на поверхности среды  $x_3 = H$ :  
при отсутствии напряжений

$$\mathbf{n} \cdot \Theta^{(1)} = 0, \quad (6)$$

в случае электрически свободной поверхности

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}^{(0)}, \quad \varphi^{(1)} = \varphi^{(0)}, \quad (7)$$

в случае короткозамкнутой (металлизированной и заземленной) поверхности

$$\varphi^{(1)} = 0. \quad (8)$$

На границе раздела сред ( $x_3 = 0$ ):

$$\mathbf{u}^{e(1)} = \mathbf{u}^{e(2)}, \quad \mathbf{n} \cdot \Theta^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \Theta^{(2)}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}^{(2)}. \quad (9)$$

На бесконечности

$$\mathbf{u}^{e(2)}|_{x_3 \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \varphi^{(0)}|_{x_3 \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (10)$$

Здесь  $\nabla_0$  — оператор Гамильтона;  $\mathbf{u}^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)} = \varphi^{(n)}\}$  — расширенный вектор перемещений;  $\mathbf{n}$  — вектор внешней нормали к поверхности структуры в системе координат, связанной с ЕС;  $\rho_0^{(n)}$  — плотность материала  $n$ -й составляющей структуры в ЕС;  $\Delta$  — оператор Лапласа. Компоненты линейризованных тензора напряжений Пиолы  $\Pi^{(n)}$ , электрического тензора Пиолы — Максвелла  $\mathbf{m}^{(n)}$  и «материального» вектора индукции  $\mathbf{d}^{(n)}$  могут быть представлены в виде [1–7, 20–23, 30] ( $k, l, s, p = 1, 3, n = 1, 2$ )

$$\Theta_{lk}^{(n)} = \Pi_{lk}^{(n)} + m_{lk}^{(n)}, \quad d_l^{(n)} = d_l^{(n)\Pi} + d_l^{(n)m}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{lk}^{(n)} &= c_{lksp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} + e_{lkp}^{(n)*} \varphi_{,p}^{(n)}, \quad m_{lk}^{(n)} = \zeta_{lksp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} + \psi_{lkp}^{(n)*} \varphi_{,p}^{(n)}, \\ d_l^{(n)} &= g_{lsp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} - \eta_{lp}^{(n)*} \varphi_{,p}^{(n)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь в рамках условий (2) [13, 21–23, 30]

$$\begin{aligned} c_{lksp}^{(1)*} &= P_{lk} \delta_{ks} + v_k v_s c_{lksp}^{(1)}, \quad e_{lsp}^{(1)*} = v_s e_{lsp}^{(1)}, \quad \eta_{lp}^{(1)*} = \varepsilon^{(0)} J v_l^{-2} \delta_{lp} + \beta_{lp}^{(1)}, \\ g_{lsp}^{(1)*} &= e_{lsp}^{(1)*} + \psi_{lsp}^{(1)*}, \\ \psi_{ijk}^{(1)*} &= \varepsilon^{(0)} J v_i^{-1} v_k^{-1} [\delta_{ij} W_k v_k^{-1} - \delta_{jk} W_i v_i^{-1} - \delta_{ik} W_j v_j^{-1}], \\ \zeta_{lksp}^{(1)*} &= \varepsilon^{(0)} J v_l^{-1} \left[ \frac{1}{2} W_m^2 v_m^{-2} (v_k^{-1} \delta_{kp} \delta_{ls} - v_s^{-1} \delta_{lk} \delta_{sp}) + \right. \\ &\quad \left. + v_p^{-1} (W_k v_k^{-1} (W_l v_l^{-1} \delta_{sp} - W_p v_p^{-1} \delta_{ls} - W_s v_s^{-1} \delta_{lp})) + \right. \\ &\quad \left. + W_s v_s^{-1} (W_p v_p^{-1} \delta_{lk} - W_l v_l^{-1} \delta_{kp}) \right], \\ P_{ij} &= c_{ijkk}^{(1)} S_k - e_{ijk}^{(1)} W_k, \quad S_k = (v_k^2 - 1) / 2, \quad J = v_1 v_2 v_3. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $P_{ij}$  и  $W_i$  — компоненты тензора Кирхгофа, определяющие действие начальных механических напряжений, компоненты тензора деформаций и вектора напряженности начального электростатического поля в системе координат, связанной с ЕС;  $\beta_{ij}^{(n)}$  — компоненты тензора констант диэлектрической восприимчивости, которые в линейном приближении связаны с компонентами тензора диэлектрической проницаемости соотношениями  $\beta_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(1)} - \varepsilon^{(0)} \delta_{ij}$ .

Далее для удобства используем представление тензора напряжений и вектора индукции в виде

$$\Theta_{lk}^{(n)} = \theta_{lksp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} + \theta_{lk4p}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)}, \quad d_l^{(n)} = \theta_{l4sp}^{(n)} u_{s,p}^{(n)} + \theta_{l44p}^{(n)} \varphi_{,p}^{(n)}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{lksp}^{(n)} &= \Pi_{lksp}^{(n)} + M_{lksp}^{(n)}, \quad \theta_{lk4p}^{(n)} = \Pi_{lk4p}^{(n)*} + M_{lk4p}^{(n)}, \\ \theta_{l4sp}^{(n)} &= \theta_{l4sp}^{(n)} + M_{l4sp}^{(n)}, \quad \theta_{l441}^{(n)} = -\left(v_{231} + \beta_{11}^{(1)}\right), \quad \theta_{3443}^{(n)} = -\left(v_{123} + \beta_{33}^{(1)}\right). \\ v_{ijk} &= \varepsilon^{(0)} v_i v_j / v_k. \end{aligned} \quad (15)$$

Из (1), (13)–(15) следует, что в случае неоднородного преднапряженного покрытия коэффициенты  $\Pi_{lksp}^{(1)}$ ,  $\Pi_{lk4p}^{(1)}$ ,  $\Pi_{l4sp}^{(1)}$ ,  $\Pi_{l44p}^{(1)}$  являются функциями  $x_3$ , коэффициенты  $M_{lksp}^{(1)}$ ,  $M_{lk4p}^{(1)}$ ,  $M_{l4sp}^{(1)}$ ,  $M_{l44p}^{(1)}$  определены направлением и величиной напряженности

начального электростатического поля, при этом все  $\Pi_{lksp}^{(1)}$  и  $M_{lksp}^{(1)}$  зависят от характера и величины наведенных начальных деформаций. Для однородного материала подложки ( $n=2$ ) в ЕС  $v_i = 1, P_{ii} = 0, W_i = 0$ , коэффициенты  $\theta_{lksp}^{(2)}$  в (14), (15) принимают вид

$$\theta_{lksp}^{(2)} = c_{lksp}^{(2)}, \theta_{lk4p}^{(2)} = e_{plk}^{(2)}, \theta_{l4sp}^{(2)} = e_{lsp}^{(2)}, \theta_{l44p}^{(2)} = -\varepsilon_{lp}^{(2)}. \quad (16)$$

Краевая задача (4)–(10) о колебаниях электроупругой среды с предварительно напряженным неоднородным покрытием с учетом условий (1)–(3), представлений в (14) и (15) может быть записана [21–23, 30] так:

для неоднородного покрытия  $0 \leq x_3 \leq H$

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}_{11}^{(1)} [u_1^{(1)}] + \mathbf{L}_{12}^{(1)} [u_3^{(1)}] + \theta^{(1)} u_{3,13}^{(1)} + \mathbf{L}_{13}^{(1)} [u_4^{(1)}] + \\ & \quad + \psi^{(1)} u_{4,13}^{(1)} + \theta_{3113,3}^{(1)} u_{1,3}^{(1)} + \theta_{1313,3}^{(1)} u_{3,1}^{(1)} + \theta_{3141,3}^{(1)} u_{4,1}^{(1)} = 0, \\ & \mathbf{L}_{12}^{(1)} [u_1^{(1)}] + \theta^{(1)} u_{1,13}^{(1)} + \mathbf{L}_{22}^{(1)} [u_3^{(1)}] + \mathbf{L}_{23}^{(1)} [u_4^{(1)}] + \\ & \quad + \theta_{1133,3}^{(1)} u_{1,1}^{(1)} + \theta_{3333,3}^{(1)} u_{3,3}^{(1)} + \theta_{3343,3}^{(1)} u_{4,3}^{(1)} = 0, \\ & \mathbf{L}_{13}^{(1)} [u_1^{(1)}] + \psi^{(1)} u_{1,13}^{(1)} + \mathbf{L}_{23}^{(1)} [u_3^{(1)}] + \mathbf{L}_{33}^{(1)} [u_4^{(1)}] + \\ & \quad + \theta_{1143,3}^{(1)} u_{1,1}^{(1)} + \theta_{3343,3}^{(1)} u_{3,3}^{(1)} + \theta_{3443,3}^{(1)} u_{4,3}^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

для подложки  $x_3 \leq 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}_1^{(2)} [u_1^{(2)}] + \theta^{(2)} u_{3,13}^{(2)} + \psi^{(2)} u_{4,13}^{(2)} = 0, \\ & \theta^{(2)} u_{1,13}^{(2)} + \mathbf{L}_2^{(2)} [u_3^{(2)}] + \mathbf{L}_3^{(2)} [u_4^{(2)}] = 0, \\ & \psi^{(2)} u_{1,13}^{(2)} + \mathbf{L}_3^{(2)} [u_3^{(2)}] + \mathbf{L}_4^{(2)} [u_4^{(2)}] = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

для вакуума  $x_3 > H$

$$\sum_{k=1,3} u_{4,kk}^{(0)} = 0. \quad (19)$$

Граничные условия на поверхности  $x_3 = H$ :

$$\Theta_{31}^{(1)} = 0, \quad \Theta_{33}^{(1)} = 0, \quad (20)$$

в случае электрически свободной поверхности

$$d_3^{(1)} = d_3^{(0)}, \quad u_4^{(1)} = u_4^{(0)}, \quad (21)$$

в случае короткозамкнутой (металлизированной и заземленной) поверхности

$$u_4^{(1)} = 0. \quad (22)$$

Граничные условия на поверхности  $x_3 = 0$ :

$$\Theta_{31}^{(1)} = \Theta_{31}^{(2)}, \quad \Theta_{33}^{(1)} = \Theta_{33}^{(2)}, \quad d_3^{(1)} = d_3^{(2)}, \quad u_k^{(1)} = u_k^{(2)}, \quad k = 1, 3, 4. \quad (23)$$

Условие на бесконечности

$$u_1^{(2)}, u_3^{(2)}, u_4^{(2)}|_{x_3 \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad u_4^{(0)}|_{x_3 \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (24)$$

В уравнениях (17) и (18) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{11}^{(1)} &= \theta_{1111}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \theta_{3113}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho^{(1)} \kappa_2^2, & \mathbf{L}_{12}^{(1)} &= M_{1131}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + M_{3133}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \\ \mathbf{L}_{13}^{(1)} &= M_{1141}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + M_{3143}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, & \mathbf{L}_{22}^{(1)} &= \theta_{1331}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \theta_{3333}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \rho^{(1)} \kappa_2^2, \\ \mathbf{L}_{23}^{(1)} &= \theta_{1341}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \theta_{3343}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, & \mathbf{L}_{33}^{(1)} &= \theta_{1441}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \theta_{3443}^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \\ \mathbf{L}_1^{(2)} &= \mathbf{L}_{11}^{(2)}, \quad \mathbf{L}_2^{(2)} = \mathbf{L}_{22}^{(2)}, \quad \mathbf{L}_3^{(2)} = \mathbf{L}_{23}^{(2)}, \quad \mathbf{L}_4^{(2)} = \mathbf{L}_{33}^{(2)}, \\ \theta^{(n)} &= \theta_{1133}^{(n)} + \theta_{1313}^{(n)}, \quad \psi^{(n)} = \theta_{1143}^{(n)} + \theta_{3141}^{(n)}. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее рассматриваются задача с поверхностью, свободно контактирующей с вакуумом (*задача I* — открытый случай), и задача с металлизированной и заземленной поверхностью (*задача II* — «короткозамкнутый случай»). *Задача I* описывается системой уравнений движения (17)–(19) с обозначениями (25) и граничными условиями (20), (21), (23) и (24), *задача II* — системой уравнений движения (17), (18), (25) с граничными условиями (20), (22)–(24).

**3. Решение задач.** Решение *задач I* и *II* строится в пространстве образов Фурье ( $\alpha$  — параметр преобразования по координате  $x_1$ ) в виде традиционного разложения по экспонентам для однородной подложки и линейно независимым решениям задачи Коши с начальными условиями для неоднородного покрытия [29, 30]:

$$U_p^{(1)}(\alpha, x_3) = \sum_{k=1}^6 c_k^{(1)} y_{sk}^{(1)}(\alpha, x_3), \quad p = 1, 3, 4, \quad s = 4, 5, 6, \quad (26)$$

$$U_p^{(2)}(\alpha, x_3) = \sum_{k=1}^3 f_{pk}^{(2)} c_k^{(2)} e^{\sigma_k^{(2)} x_3}, \quad U_4^{(0)}(\alpha, x_3) = c_1^{(0)} e^{-\alpha x_3}, \quad (27)$$

где  $y_{sk}^{(1)}(\alpha, x_3)$  — линейно независимые решения задачи Коши с начальными условиями  $y_{sk}^{(1)}(\alpha, 0) = \delta_{sk}$  для уравнения

$$\mathbf{Y}^{(1)'} = \mathbf{R}^{(1)}(\alpha, x_3) \mathbf{Y}^{(1)}, \quad (28)$$

относительно  $\mathbf{Y}^{(1)} = \{\mathbf{Y}_{\Sigma}^1, \mathbf{Y}_{\mathbf{u}}^1\}^T$ , где  $\mathbf{Y}_{\Sigma}^1 = \{\Theta_{31}^{F(1)}, \Theta_{33}^{F(1)}, D_3^{F(1)}\}^T$  и  $\mathbf{Y}_{\mathbf{u}}^1 = \{U_1^{(1)}, U_3^{(1)}, U_4^{(1)}\}^T$  — расширенные векторы трансформант Фурье компонент тензора напряжений, векторов индукции и смещений. Вид элементов матрицы  $\mathbf{R}^{(1)}(\alpha, x_3) = \|R_{ij}\|_{i,j=1}^6$  приведен в [30]. Участвующие в представлении решения для однородной подложки (27) величины  $\sigma_k^{(2)}$  и коэффициенты  $f_{pk}^{(2)}$  приведены в [29]. Уравнение (28) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, линейно независимые решения которой строятся на основе численного решения набора задач Коши с начальными

условиями при фиксированных значениях параметра  $\alpha$ . В настоящей работе для решения (28) использован метод Рунге – Кутты – Мерсона. Метод обеспечивает высокую точность и быструю сходимость, позволяя контролировать погрешность и автоматически менять шаг.

**4. Дисперсионное уравнение.** Структура дисперсионных уравнений *задачи I* и *II* для пьезоэлектрической структуры с неоднородным покрытием представима в виде [29, 30]

$$\det \mathbf{A} = 0, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(1)}(H) & \mathbf{G}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(1)}(0) & \mathbf{B}^{(2)}(0) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Размеры матрицы  $\mathbf{A}$  и матриц ее составляющих определяются геометрией задачи и граничными условиями. Матрица  $\mathbf{A}^{(1)}(0)$  в силу принятых начальных условий задачи Коши, как для *задачи I*, так и для *задачи II*, является единичной  $\mathbf{A}^{(1)}(0) = \mathbf{E}$  и имеет размерность  $6 \times 6$ . Для *задачи I* матрица  $\mathbf{A}$  имеет размерность  $10 \times 10$ , ее составляющие в соответствии с граничными условиями (20), (21), (23), (24) и представлениями (26), (27) принимают вид

$$\mathbf{B}^{(1)}(H) = \left\| B_{ij}^{(1)} \right\|_{i=1, j=1}^{4,6}, \mathbf{B}^{(2)}(0) = \left\| B_{ij}^{(2)} \right\|_{i=1, j=1}^{6,4}, \mathbf{G}^{(1)} = \|G_{ij}\|_{i,j=1}^4, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} B_{ij}^{(1)} &= \gamma_i y_{ij}^{(1)}, B_{4j}^{(1)} = \gamma_4 y_{6j}^{(1)}, \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \gamma_3 = \gamma_4 = e^{\alpha H}, i = 1, \dots, 3, j = 1, \dots, 6, \\ G_{34} &= -\varepsilon_0 \alpha, G_{44} = -1, G_{ij} = 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, B_{j4}^{(2)} = 0, j = 1, \dots, 6, \\ B_{1k}^{(2)} &= c_{44}^{(2)} \sigma_k^{(2)} f_{1k}^{(2)} - i\alpha c_{44}^{(2)} f_{3k}^{(2)} - i\alpha e_{15}^{(2)} f_{4k}^{(2)}, \\ B_{2k}^{(2)} &= -i\alpha c_{13}^{(2)} f_{1k}^{(2)} + c_{33}^{(2)} \sigma_k^{(2)} f_{3k}^{(2)} + e_{33}^{(2)} \sigma_k^{(2)} f_{4k}^{(2)}, \\ B_{3k}^{(2)} &= -i\alpha e_{31}^{(2)} f_{1k}^{(2)} + e_{33}^{(2)} \sigma_k^{(2)} f_{3k}^{(2)} - \varepsilon_{33}^{(2)} \sigma_k^{(2)} f_{4k}^{(2)}, \\ B_{ik}^{(2)} &= -f_{pk}^{(2)}, i = 4, 5, 6, p = 1, 3, 4, k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (31)$$

Для *задачи II* матрица  $\mathbf{A}$  имеет размерность  $9 \times 9$ , с учетом граничных условий (20), (22)–(24) матрицы, ее составляющие принимают вид

$$\mathbf{B}^{(1)}(H) = \left\| B_{ij}^{(1)} \right\|_{i=1, j=1}^{3,6}, \mathbf{B}^{(2)}(0) = \left\| B_{ij}^{(2)} \right\|_{i=1, j=1}^{6,3}, \mathbf{G}^{(1)} = \|G_{ij}\|_{i,j=1}^3 = 0, \quad (32)$$

при этом матрицы  $\mathbf{B}^{(1)}(H)$  и  $\mathbf{B}^{(2)}(0)$  получаются путем вычеркивания 3-й строки и 4-го нулевого столбца соответствующих матриц *задачи I* в представлениях (31), в матрице  $\mathbf{B}^{(1)}(H)$  коэффициент  $\gamma_i = 1$ .

**5. Численный анализ.** Рассмотрены пьезоэлектрические структуры с покрытиями, выполненными из различных видов пьезокерамик на основе PZT (см. таблицу) [29]. Материалы  $m_1$  и  $m_2$ ,  $m_3$ , представляют собой основной материал структуры – керамику PZT-5 и материалы высокоскоростного и низкоскоростного включений – PZT DL-61HD и PZT DL-40 соответственно.

В рамках предположений раздела 2 представим участвующие в (1) функции  $f_s^{(1)}(x_3)$  ( $s = \rho, c, e, \varepsilon$ ) в виде

$$f_s^{(1)}(x_3) = g_s^1 + g_s^2 f(x_3).$$

**Параметры материалов**

	$\rho \cdot 10^3, \text{ кг} \cdot \text{ м}^{-3}$	$c_{ij} \cdot 10^{11}, \text{ Н} \cdot \text{ м}^{-2}$					$e_{ij}, \text{ С} \cdot \text{ м}^{-2}$			$\varepsilon_{ij}/\varepsilon^{(0)}$	
		$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$c_{33}$	$c_{44}$	$e_{15}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$\varepsilon_{11}$	$\varepsilon_{33}$
$m_1$	7.75	1.21	0.754	0.752	1.11	0.211	12.3	-5.40	15.8	916	830
$m_2$	8.20	1.46	0.960	1.00	1.30	0.390	33.1	-15.8	25.3	2810	2520
$m_3$	7.70	1.78	1.01	0.920	1.24	0.230	6.20	-0.10	9.00	290	210

Параметры  $g_s^1, g_s^2$  представляют собой модули основного материала и материалов включений,  $f(x_3)$  определяет характер изменения параметров по толщине покрытия, локализацию изменений и величину зоны перехода одного материала в другой. В работе рассмотрен случай локализации включения в середине покрытия. Основание зоны перехода материала  $m_1$  в другие материалы предполагается постоянным.

**Определение НДС покрытия.** НДС покрытия полагается однородным, создается за счет действия механических напряжений и однородного электростатического поля, определяется условием (2). При наличии начального электрического поля компоненты в декартовой системе координат для материалов класса бмн имеют вид [21–23, 30]

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= c_{11}^{(1)} S_{11} + c_{12}^{(1)} S_{22} + c_{13}^{(1)} S_{33} - e_{31}^{(1)} W_3^0 + m_{11}, \\
 P_{22} &= c_{12}^{(1)} S_{11} + c_{11}^{(1)} S_{22} + c_{13}^{(1)} S_{33} - e_{31}^{(1)} W_3^0 + m_{22}, \\
 P_{33} &= c_{13}^{(1)} S_{11} + c_{13}^{(1)} S_{22} + c_{33}^{(1)} S_{33} - e_{33}^{(1)} W_3^0 + m_{33}, \\
 d_1 &= \varepsilon_{11}^{(1)} W_1^0 + de_1, \quad d_2^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(1)} W_2^0 + de_2, \\
 d_3 &= e_{31}^{(1)} S_{11} + e_{31}^{(1)} S_{22} + e_{33}^{(1)} S_{33} + \varepsilon_{33}^{(1)} W_3^0 + de_3, \quad m_{kk} = \varepsilon^{(0)} J v_k^{-1} (2E_k^2 - E^2) / 2, \\
 de_k &= \varepsilon^{(0)} J W_k^0, \quad E^2 = E_1^2 + E_2^2 + E_3^2, \quad E_k = W_k^0 / v_k.
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Здесь  $W_k^0$  — заданные компоненты вектора напряженности начального электростатического поля. Параметры НДС определяются из решения системы (33) в зависимости от способа его задания и условий, налагаемых на начальные воздействия. Рассмотрены НДС:  $1x_1$  ( $P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0, W = \{0, 0, 0\}$ ),  $1x_2$  ( $P_{22} = P, P_{11} = P_{33} = 0, W = \{0, 0, 0\}$ ),  $1x_3$  ( $P_{33} = P, P_{11} = P_{22} = 0, W = \{0, 0, 0\}$ ) и  $1x_1 E_3^\pm$  ( $P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0, W = \{0, 0, \pm W^0\}$ ).

На рис. 2–4 приведены скорости ПАВ для пьезоэлектрических структур с неоднородным покрытием в ЕС (рис. 2), с учетом механических (рис. 3) и электростатических (рис. 4) воздействий. На рисунках представлены графики скоростей  $V_F^I/V_{Se}^{(2)}$  и  $V_F^{II}/V_{Se}^{(2)}$ , рассчитанных для задач I и II (где  $V_F^{I,II} = \kappa_{2e}/\xi^{I,II}$  решения дисперсионного уравнения (29) с обозначениями (30)–(32) для соответствующих задач).

На рис. 2, а–г показано влияние высокоскоростного ( $m_2$ ) (кривые 1, рис. 2, а, в) и низкоскоростного ( $m_3$ ) (кривые 2, рис. 2, б, г) включений на скорости ПАВ задач I и II. Штриховые линии отвечают скоростям ПАВ задачи I, сплошные линии — скоростям задачи II. На рис. 2, в, г даны фрагменты рис. 2, а, б соответственно.

Из рисунков видно, что для задач I и II при высокоскоростном включении ( $m_2$ ) характерно небольшое падение скорости от  $V_R^{I(2)}$  или  $V_R^{II(2)}$  значения рэлеевской волны полупространства задач I или II до некоторых минимальных значений

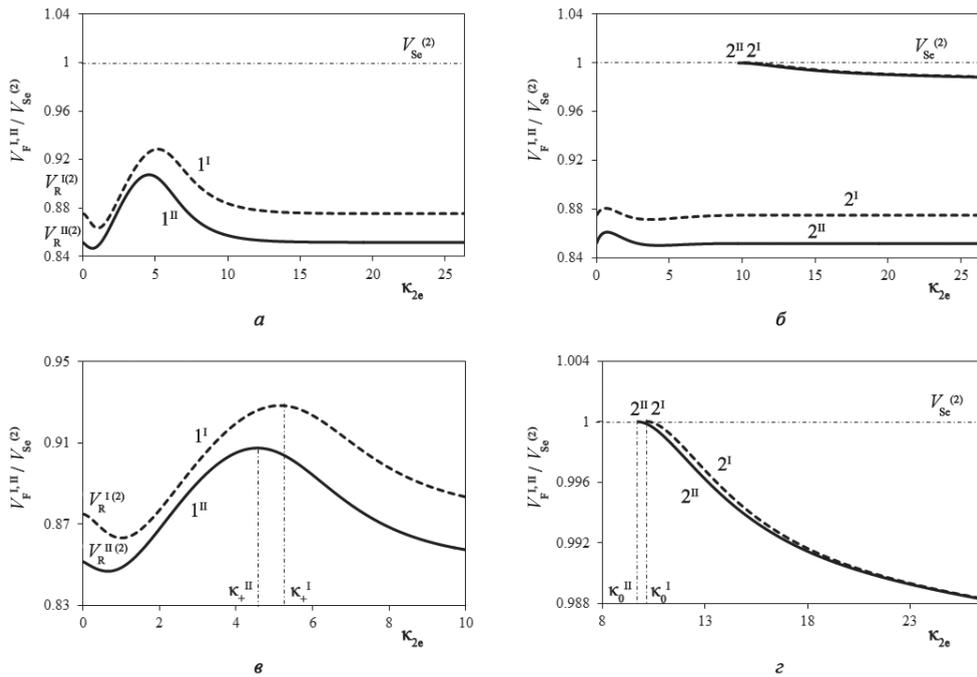


Рис. 2. Влияние характера включения покрытия на скорости ПАВ задач I и II: а, в — высокоскоростное включение ( $m_2$ ); б, г — низкоскоростное включение ( $m_3$ ); в, г — фрагменты а и б соответственно.

$V_R^{I \min}$  или  $V_R^{II \min}$  с последующим ростом скорости до максимальных значений, которые достигаются на частотах  $\kappa_+^I$  и  $\kappa_+^{II}$ . С ростом частоты скорости ПАВ выходят на значения соответствующих скоростей рэлеевских волн. В случае низкоскоростного включения ( $m_3$ ) отклонение от скоростей  $V_R^{I(2)}$  или  $V_R^{II(2)}$  происходит только в области низких частот, однако на средних частотах  $\kappa_0^{II}$  и  $\kappa_0^I$  появляются высокоскоростные моды ПАВ, которые почти совпадают для задач I и II.

На рис. 3, а–г показано влияние одноосного  $1x_1$  НДС на скорости ПАВ для высокоскоростного ( $m_2$ ) (кривые 1, рис. 3, а, в) и низкоскоростного ( $m_3$ ) (кривые 2, рис. 3, б, г) включения на скорости ПАВ задач I и II. Штриховые линии соответствуют растяжению ( $v=1.03$ ), сплошные линии — сжатию ( $v=0.97$ ) вдоль оси  $x_1$ . Пунктирными линиями отмечены кривые скоростей в ЕС. Как и в предыдущем случае, верхними индексами отмечены кривые скоростей соответствующих задач.

Из сравнения рис. 2 и 3 следует, что, независимо от характера включения, для задач I и II сжатие вдоль оси  $x_1$  для первых мод приводит к уменьшению значений скорости (сплошные линии), растяжение — к росту значений (штриховые линии) во всем частотном диапазоне. Следует отметить, что в случае покрытия с низкоскоростным включением ( $m_3$ ) при растяжении в рассматриваемом частотном диапазоне нет высокоскоростных мод, при сжатии высокоскоростные моды появляются в большем количестве на более низких частотах. Такой эффект может иметь значение при разработке акустоэлектронных устройств, микроэлектромеханических систем, сенсоров деформации, основанных на использовании ПАВ.

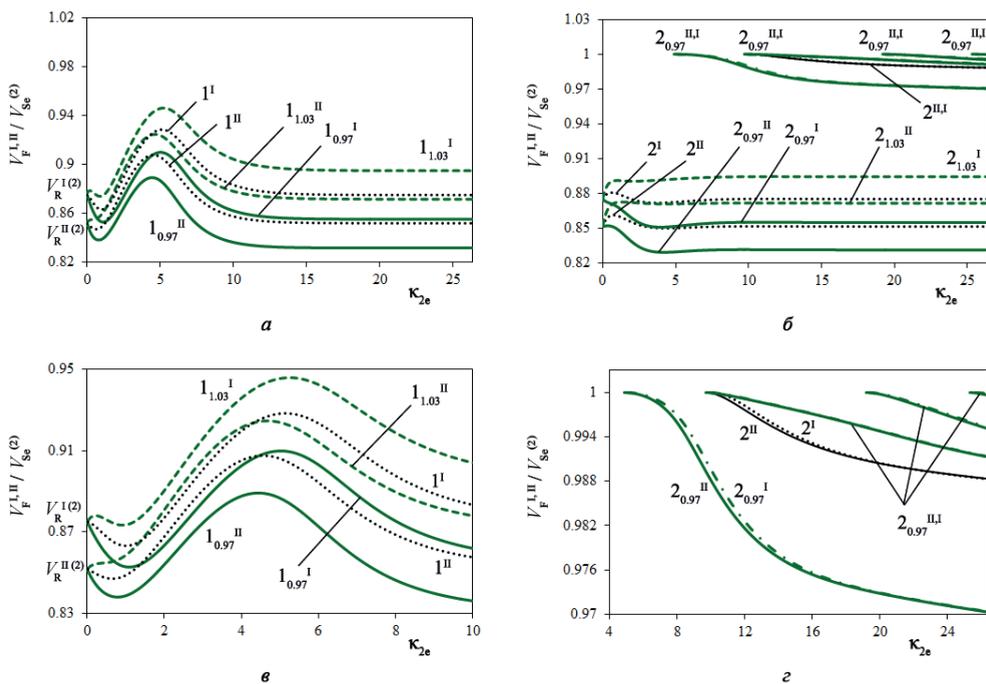


Рис. 3. Влияние одноосного  $1x_1$  НДС на скорости ПАВ задач I и II: а, в — высокоскоростное ( $m_2$ ) включение; б, г — низкоскоростное ( $m_3$ ) включение; в, г — фрагменты а и б соответственно.

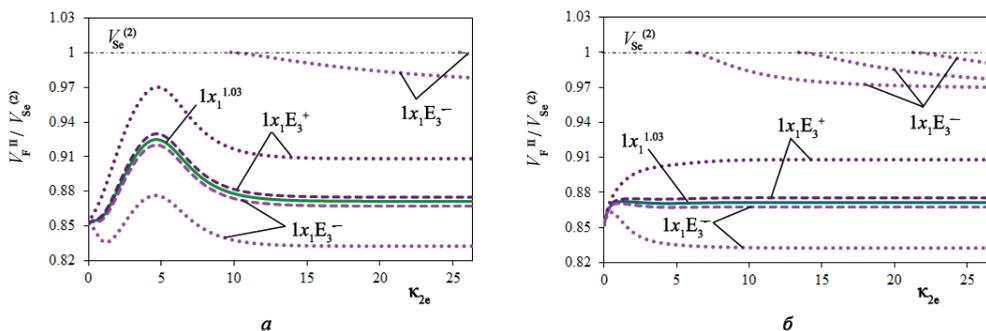


Рис. 4. Влияние совместных начальных механических и электростатических воздействий на скорости ПАВ. Задача II: а — включение  $m_2$ ; б — включение  $m_3$ .

На рис. 4, а, б приведено совместное влияние механических напряжений  $1x_1$  с деформацией вдоль  $x_1$   $v = 1.03$  и электростатического поля  $(0, 0, \pm W_0)$  (НДС  $1x_1 E_3^\pm$ ) на скорости ПАВ для задачи II с высокоскоростным (рис. 4, а) и низкоскоростным (рис. 4, б) включением. Штриховые линии отвечают  $W^0 = \pm 0.001$  (в размерных единицах  $1 \cdot 10^7$  В/м), пунктирные —  $W^0 = \pm 0.01$  (в размерных единицах  $1 \cdot 10^8$  В/м).

Из рисунков видно, что наличие начального электростатического поля малой напряженности в зависимости от направленности вектора напряженности может

незначительно ослаблять или усиливать действие механических напряжений. Увеличение напряженности приводит не только к значительному изменению скоростей ПАВ, но и существенно меняет структуру поверхностного волнового поля. Это позволяет за счет воздействия электростатическим полем управлять структурой и параметрами ПАВ.

**6. Выводы.** В работе предложен подход к исследованию влияния начальных механических и электрических воздействий на рэлеевские волны в пьезоэлектрических структурах с неоднородным преднапряженным покрытием. Структура моделируется однородным пьезоэлектрическим полупространством с двухкомпонентным покрытием из ФГПМ, свойства которого меняются по толщине от параметров материала подложки до параметров высокоскоростного или низкоскоростного включений. Материалы подложки и покрытия в естественном состоянии (ЕС) выполнены из различных видов пьезокерамик на основе PZT, оси симметрии которых совпадают и ориентированы по нормали к поверхности среды. Исследовано влияние типа неоднородности и характера начальных механических воздействий с учетом и без учета начального электростатического поля на особенности распространения рэлеевских волн. Показано, что, независимо от характера включения, для задач I и II сжатие вдоль оси распространения волны для первых мод рэлеевских волн приводит к уменьшению значений скорости, растяжение — к росту значений во всем частотном диапазоне. Начальное электростатическое поле малой напряженности в зависимости от его направленности может незначительно ослаблять или усиливать действие начальных механических напряжений. Увеличение напряженности приводит к дополнительным деформациям материала, значительному изменению скоростей ПАВ и существенным изменениям структуры поверхностного волнового поля. Тем самым возникает возможность управления структурой и параметрами ПАВ путем воздействия электростатическим полем. Это может представлять определенный интерес при разработке функционально ориентированных акустоэлектронных устройств, сенсоров и микроэлектромеханических систем.

## Литература

1. Mason W. P. *Physical acoustics and the properties of solids*. Princeton, N. J., Van Nostrand (1958).
2. Викторов И. А. *Физические основы применения ультразвуковых волн Рэлея и Лэмба в технике*. Москва, Наука (1966).
3. Dieulesaint E., Royer D. *Ondes Elastiques Dans Les Solides. Application au traitement du signal*. Paris, Ed. Masson (1974).
4. Matthews H. (ed.) *Surface Wave Filters. Design, Construction and Use*. New York, John Wiley & Sons (1977).
5. Achenbach J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland, Amsterdam (1973).
6. Auld B. A. *Acoustic Fields and Waves in Solids*. vol. 2. Krieger, Malabar, FL (1990).
7. Biryukov S. V., Gulyaev Y. V., Krylov V. V., Plessky V. P. *Surface Acoustic Waves in Inhomogeneous Media*. New York, Springer-Verlag (1995).
8. Shuvalov A. L., Every A. G. Some properties of surface acoustic waves in anisotropic-coated solids, studied by the impedance method. *Wave Motion* **36** (3), 257–273 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(02\)00013-6](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(02)00013-6)
9. Гольдштейн Р. В., Кузнецов С. В. Поверхностные акустические волны в диагностике слоистых сред. Чувствительность волн к вариации свойств отдельных слоев. *ПММ* **77** (1), 74–82 (2013).
10. Белянкова Т. И., Калинин В. В. К проблеме анализа динамических свойств слоистого полупространства. *Акустический журнал* **60** (5), 492–504 (2014).
11. Alshits V. I., Maugin G. A. Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate. *Wave Motion* **41** (4), 357–394 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.09.002>

12. Destrade M. Seismic Rayleigh waves on an exponentially graded, orthotropic half-space. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **463** (2078), 495–502 (2007). <http://www.jstor.org/stable/20209130>
13. Калинин В. В., Белянкова Т. И. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел*. Москва, Физматлит (2002).
14. Auld B. A. Wave propagation and resonance in piezoelectric materials. *J. Acoust. Soc. Am.* **70** (6), 1577–1585 (1981). <https://doi.org/10.1121/1.387223>
15. Zinchuk L. P., Podlipenets A. N. Dispersion equations for Rayleigh waves in a piezoelectric periodically layered structure. *Journal of Mathematical Sciences* **103** (3), 398–403 (2001). <https://doi.org/10.1023/A:1011382816558>
16. Othmani C., Labiadh L., Lu C., Kamali A. R., Takali F. Influence of a piezoelectric ZnO intermediate layer on Rayleigh waves propagating in Sc 43 % AlN 57 % /ZnO/diamond hetero-structures subjected to uniaxial stress. *Eur. Phys. J. Plus* **135**, 898 (2020). <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00912-9>
17. Желнорович В. А. Поверхностные волны Релея и Блюстейна — Гуляева в упругих пьезоэлектриках при наличии релаксации диэлектрической поляризации. *ПММ* **79** (2), 273–285 (2015).
18. Favretto-Cristini N., Komatitsch D., Carcione J. M., Cavallini F. Elastic surface waves in crystals. Part 1: Review of the physics. *Ultrasonics* **51** (6), 653–660 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2011.02.007>
19. Wang W., Liang J., Ruan Y., Pang W., You Z. Design and fabrication of an surface acoustic wave resonator based on AlN/4H-SiC material for harsh environments. *Journal of Zhejiang University SCIENCE A*. **18** (1), 67–74 (2017). <https://doi.org/10.1631/jzus.a1600028>
20. Tiersten H. F. Electroelastic interactions and the piezoelectric equations. *J. Acoust. Soc. Am.* **70**, 1567–1576 (1981).
21. Калинин В. В., Белянкова Т. И. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел*. Москва, Физматлит (2006).
22. Евдокимова О. В., Белянкова Т. И., Калинин В. В. Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля. *Вестник Южного научного центра РАН* **3** (4), 19–25 (2007).
23. Белянкова Т. И., Калинин В. В., Шейдаков Д. Н. Уравнения динамики преднапряженной электротермоупругой среды. *Вестник Южного научного центра РАН* **7** (2), 5–14 (2011).
24. Burkov S. I., Zolotova O. P., Sorokin B. P. Influence of bias electric field on elastic waves propagation in piezoelectric layered structures. *Ultrasonics* **53** (6), 1059–1064 (2013).
25. Cao X., Jin F., Wang Z. On dispersion relations of Rayleigh waves in a functionally graded piezoelectric material (FGPM) half-space. *Acta Mech.* **200**, 247–261 (2008). <https://doi.org/10.1007/s00707-008-0002-1>
26. Ben Salah I., Njeh A., Ben Ghazlen M. H. A theoretical study of the propagation of Rayleigh waves in a functionally graded piezoelectric material (FGPM). *Ultrasonics* **52** (2), 306–314 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2011.08.016>
27. Hemalatha K., Kumar S., Prakash D. Dispersion of Rayleigh wave in a functionally graded piezoelectric layer over elastic substrate. *Forces in Mechanics* (10), 100171 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.finmec.2023.100171>
28. Ezzin H., Mkaour M., Amor M. B. Rayleigh wave behavior in functionally graded magneto-electro-elastic material. *Superlattices and Microstructures* **112**, 455–469 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.spmi.2017.10.001>
29. Belyankova T. I., Vorovich E. I., Kalinchuk V. V., Tukodova O. M. Features of Rayleigh Waves Propagation in Structures with FGPM Coating Made of Various Materials. *Springer Proceedings in Materials. Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications* **10**, 245–259 (2021). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-76481-4\\_22](https://doi.org/10.1007/978-3-030-76481-4_22)
30. Belyankova T. I., Kalinchuk V. V. On the dynamics of an inhomogeneous prestressed electroelastic medium under the influence of an external electric field. *Mechanics of Solids* **56** (7), 242–250 (2021). <https://doi.org/10.3103/S0025654421070098>

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2023 г.;  
доработана 17 мая 2023 г.;  
рекомендована к печати 18 мая 2023 г.

Контактная информация:

Белянкова Татьяна Ивановна — канд. физ.-мат. наук, вед. науч. сотр.; [tbelen415@mail.ru](mailto:tbelen415@mail.ru)

## Rayleigh waves in an electroelastic medium with prestressed inhomogeneous coating\*

T. I. Belyankova, V. V. Kalinchuk

Southern Scientific Center of Russian Academy of Sciences,  
41, pr. Chekhova, Rostov-on-Don, 344006, Russian Federation

**For citation:** Belyankova T. I., Kalinchuk V. V. Rayleigh waves in an electroelastic medium with prestressed inhomogeneous coating. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 600–615.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.402> (In Russian)

An approach to studying the influence of initial mechanical stresses and an electrostatic field on the structure and behavior of Rayleigh waves in piezoelectric media with non-homogeneous coatings is proposed. This paper considers two-component coatings made of functionally graded piezoelectric material with high-speed (the speed of the shear wave inclusion is greater than the speed of the shear wave in the substrate) or low-speed (the speed of the shear wave inclusion is less than the speed of the shear wave in the substrate) inclusions. The initially deformed state of the coating is induced by the separate or combined action of initial mechanical stresses and an external electrostatic field. The influence of the type of non-homogeneity and the nature of initial mechanical stresses in the presence or absence of an initial electrostatic field on the features of Rayleigh wave propagation for problems with an electrically open or shorted surface is studied. It is established that the presence of a low-intensity initial electrostatic field only slightly affects the action of initial mechanical stresses depending on its direction. The presence of a high-intensity electrostatic field leads to additional deformation of the material, significant changes in the speeds of PAV modes, and substantial changes in the structure of the surface wave field. The obtained results are presented in dimensionless parameters and may be of practical interest in the development, design, and optimization of new materials for micro- and nanoscale devices and devices on Rayleigh surface acoustic waves with high performance characteristics.

*Keywords:* piezoelectric structure, substrate, heterogeneous coating, functionally graded piezoelectric material, initial stresses, initial deformed state, external electrostatic field, surface acoustic waves, Rayleigh waves.

## References

1. Mason W. P. *Physical acoustics and the properties of solids*. Princeton, N. J., Van Nostrand (1958).
2. Viktorov I. A. *Rayleigh and Lamb Waves: Physical Theory and Applications*. New York, Plenum Press (1967). [Rus. ed.: Viktorov I. A. *Fizicheskie osnovy primeneniya ul'trazvukovykh voln Releya i Lemba v tekhnike*. Moscow, Nauka Publ. (1966)].
3. Dieulesaint E., Royer D. *Ondes Elastiques Dans Les Solides. Application au traitement du signal*. Paris, Ed. Masson (1974).
4. Matthews H. (ed.) *Surface Wave Filters. Design, Construction and Use*. New York, John Wiley & Sons (1977).
5. Achenbach J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids*. North-Holland, Amsterdam (1973).
6. Auld B. A. *Acoustic Fields and Waves in Solids.*, vol. 2. Krieger, Malabar, FL (1990).

---

\*The research was carried out within the framework of the implementation of the state assignment of the Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (state registration no. 122020100343-4).

7. Biryukov S. V., Gulyaev Y. V., Krylov V. V., Plessky V. P. *Surface Acoustic Waves in Inhomogeneous Media*. New York, Springer-Verlag (1995).
8. Shuvalov A. L., Every A. G. Some properties of surface acoustic waves in anisotropic-coated solids, studied by the impedance method. *Wave Motion* **36** (3), 257–273 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0165-2125\(02\)00013-6](https://doi.org/10.1016/S0165-2125(02)00013-6)
9. Goldstein R. V., Kuznetsov S. V. Surface acoustic waves in the testing of layered media. The waves' sensitivity to variations in the properties of the individual layers. *J. Appl. Math. Mech.* **77** (1), 74–82 (2013). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Appl. Math. Mech.* **77** (1), 51–56 (2013)] <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.04.007>.
10. Belyankova T. I., Kalinchuk V. V. On the problem of analyzing the dynamic properties of a layered half-space. *Acoust. Phys.* **60**, 492–504 (2014). (In Russian) [Eng. transl.: *Acoust. Phys.* **60**, 530–542 (2014)]. <https://doi.org/10.1134/S1063771014050017>.
11. Alshits V. I., Maugin G. A. Dynamics of multilayers: elastic waves in an anisotropic graded or stratified plate. *Wave Motion* **41** (4), 357–394 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.09.002>
12. Destrade M. Seismic Rayleigh waves on an exponentially graded, orthotropic half-space. *Proceedings: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **463** (2078), 495–502 (2007). <http://www.jstor.org/stable/20209130>
13. Kalinchuk V. V., Belyankova T. I. *Dynamic Contact Problems for Preliminary Stressed Solids*. Moscow, Fizmatlit Publ. (2002). (In Russian)
14. Auld B. A. Wave propagation and resonance in piezoelectric materials. *J. Acoust. Soc. Am.* **70** (6), 1577–1585 (1981). <https://doi.org/10.1121/1.387223>
15. Zinchuk L. P., Podlipenets A. N. Dispersion equations for Rayleigh waves in a piezoelectric periodically layered structure. *Journal of Mathematical Sciences* **103** (3), 398–403 (2001). <https://doi.org/10.1023/A:1011382816558>
16. Othmani C., Labiadh L., Lu C., Kamali A. R., Takali F. Influence of a piezoelectric ZnO intermediate layer on Rayleigh waves propagating in Sc 43 % AlN 57 % /ZnO/diamond hetero-structures subjected to uniaxial stress. *Eur. Phys. J. Plus* **135**, 898 (2020). <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00912-9>
17. Zhelnorovich V. A. Rayleigh and Bleustein–Gulyayev surface waves in elastic piezoelectric materials with relaxation of dielectric polarization. *J. Appl. Math. Mech.* **79** (2), 273–285 (2015). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Appl. Math. Mech.* **79** (2), 186–194. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.07.010>].
18. Favretto-Cristini N., Komatitsch D., Carcione J. M., Cavallini F. Elastic surface waves in crystals. Part 1: Review of the physics. *Ultrasonics* **51** (6), 653–660 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2011.02.007>
19. Wang W., Liang J., Ruan Y., Pang W., You Z. Design and fabrication of an surface acoustic wave resonator based on AlN/4H-SiC material for harsh environments. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A*. **18** (1), 67–74 (2017). <https://doi.org/10.1631/jzus.a1600028>
20. Tiersten H. F. Electroelastic interactions and the piezoelectric equations. *J. Acoust. Soc. Am.* **70**, 1567–1576 (1981).
21. Kalinchuk V. V., Belyankova T. I. *Dynamic Contact Problems for Prestressed Electroelastic Media*. Moscow, Fizmatlit Publ. (2006). (In Russian)
22. Evdokimova O. V., Belyankova T. I., Kalinchuk V. V. Equations of Dynamics of Prestressed Piezoactive Medium in the Presence of External Electrostatic Field. *Vestnik Yuzhn. Nauchn. Tsentra RAN* **3** (4), 19–25 (2007). (In Russian)
23. Belyankova T. I., Kalinchuk V. V., Sheidakov D. N. Dynamics equations for prestressed electrothermoelastic medium. *Vestnik Yuzhn. Nauchn. Tsentra RAN* **7** (2), 5–14 (2011). (In Russian)
24. Burkov S. I., Zolotova O. P., Sorokin B. P. Influence of bias electric field on elastic waves propagation in piezoelectric layered structures. *Ultrasonics* **53** (6), 1059–1064 (2013).
25. Cao X., Jin F., Wang Z. On dispersion relations of Rayleigh waves in a functionally graded piezoelectric material (FGPM) half-space. *Acta Mech.* **200**, 247–261 (2008). <https://doi.org/10.1007/s00707-008-0002-1>
26. Ben Salah I., Njeh A., Ben Ghazlen M. H. A theoretical study of the propagation of Rayleigh waves in a functionally graded piezoelectric material (FGPM). *Ultrasonics* **52** (2), 306–314 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2011.08.016>
27. Hemalatha K., Kumar S., Prakash D. Dispersion of Rayleigh wave in a functionally graded piezoelectric layer over elastic substrate. *Forces in Mechanics* **10**, 100171 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.finmec.2023.100171>

28. Ezzin H., Mkaour M., Amor M.B. Rayleigh wave behavior in functionally graded magneto-electro-elastic material. *Superlattices and Microstructures* **112**, 455–469 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.spmi.2017.10.001>
29. Belyankova T. I., Vorovich E. I., Kalinchuk V. V., Tukodova O. M. Features of Rayleigh Waves Propagation in Structures with FGPM Coating Made of Various Materials. *Springer Proceedings in Materials. Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications* **10**, 245–259 (2021). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-76481-422>
30. Belyankova T. I., Kalinchuk V. V. On the dynamics of an inhomogeneous prestressed electroelastic medium under the influence of an external electric field. *Mechanics of Solids* **56** (7), 242–250 (2021). <https://doi.org/10.3103/S0025654421070098>

Received: April 15, 2023

Revised: May 17, 2023

Accepted: May 18, 2023

Authors' information:

Tat'yana I. Belyankova — [tbelen415@mail.ru](mailto:tbelen415@mail.ru)

Valeriy V. Kalinchuk — [vkalin415@mail.ru](mailto:vkalin415@mail.ru)