

Собственные колебания композитных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью*

С. А. Бочкарёв, С. В. Лекомцев, В. П. Матвеевко

Институт механики сплошных сред УрО РАН,
Российская Федерация, 614068, Пермь, ул. Ак. Королева, 1

Для цитирования: *Бочкарёв С. А., Лекомцев С. В., Матвеевко В. П.* Собственные колебания композитных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 616–631. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.403>

Представлены результаты исследований собственных колебаний круговых вертикальных слоистых цилиндрических оболочек, полностью или частично заполненных неподвижной сжимаемой жидкостью и подвергающихся воздействию гидростатической нагрузки. Поведение упругой конструкции и жидкой среды описывается классической теорией оболочек и уравнениями Эйлера. Эффекты плескания на свободной поверхности жидкости не учитываются. Линеаризованные уравнения движения оболочки совместно с соответствующими геометрическими и физическими соотношениями сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых неизвестных. Акустическое волновое уравнение преобразуется к системе дифференциальных уравнений с помощью метода обобщенных дифференциальных квадратур. Решение сформулированной краевой задачи осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова. Для вычисления собственных частот колебаний используется сочетание пошаговой процедуры с последующим уточнением методом деления пополам. Достоверность получаемых результатов подтверждена сравнением с известными численными решениями. Детально проанализированы зависимости низших частот колебаний от угла армирования и уровня заполнения жидкостью свободно опертых, жестко закрепленных и консольных двухслойных и трехслойных цилиндрических оболочек. Продемонстрировано, что возможность изменения частот и форм колебаний за счет подходящего выбора схемы укладки и угла армирования композиционного материала в большей степени определяется заданной комбинацией краевых условий для упругого тела.

Ключевые слова: классическая теория оболочек, сжимаемая жидкость, слоистый материал, гидростатическое давление, метод ортогональной прогонки Годунова, метод обобщенных дифференциальных квадратур, собственные колебания.

1. Введение. Взаимодействующие с жидкостью круговые цилиндрические оболочки широко применяются в различных отраслях промышленности. Они используются для хранения и транспортировки нефтепродуктов и технологических жидкостей, являются конструктивными элементами баков ракет-носителей и летательных аппаратов. Дополнительные возможности для формирования требуемых эксплуатационных свойств перечисленных конструкций предоставляются за счет использова-

*Работа выполнена в рамках государственного задания; номер государственной регистрации темы АААА-А19-119012290100-8.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

ния современных материалов, в том числе слоистых композитов. Подбирая схему укладки и углы армирования, можно добиться таких динамических характеристик, которые будут обеспечивать безопасное функционирование изделия в необходимом спектре частот при ограниченных габаритах и массе.

За последние десятилетия исследованию пустых оболочек вращения, выполненных из слоистых композиционных материалов, посвящено значительное количество публикаций [1–2]. В меньшей степени изучены многослойные конструкции, взаимодействующие с жидкостью. Четырехслойная (симметричный перекрестно армированный композит) цилиндрическая оболочка, содержащая жидкость, экспериментально исследована в [3]. Для всех рассмотренных вариантов (оболочка в воздухе, содержащая и(или) погруженная в жидкость) выявлена закономерность в изменении собственных частот изгибных колебаний от окружной моды. Отмечено хорошее согласование между теорией и экспериментом для частот и соответствующих им форм колебаний. Собственные колебания полностью заполненных жидкостью поперечно и перекрестно армированных круговых цилиндрических оболочек исследованы в [4–6] при разных вариантах граничных условий. Для аппроксимации перемещений и углов поворота оболочки, которая рассматривается в рамках теории оболочек типа Тимошенко (first-order shear deformation theory), применяются сплайны Бикли третьего порядка. Гидродинамическое давление жидкости на стенки упругой конструкции определяется из решения волнового уравнения с помощью функций Бесселя. Анализируются композиционные материалы различного вида с симметричной и антисимметричной схемой укладки и разным количеством слоев.

Слоистые вертикальные цилиндрические оболочки, содержащие жидкость, рассмотрены в работах [7, 8]. Деформации упругой конструкции определяются на основе теории Рейснера—Миндлина. Безвихревое движение идеальной сжимаемой жидкости описывается волновым уравнением, записанным относительно гидродинамического давления. Численное решение выполнено полуаналитическим методом конечных элементов (МКЭ). Приведены результаты исследований, в которых проанализировано влияние различных параметров на частоты колебаний оболочек с разными конфигурациями пакетов композиционного материала. Собственные колебания перекрестно армированных коаксиальных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью, исследованы в [9] с помощью МКЭ. Оценено влияние угла армирования и уровней жидкости во внутренней и наружной оболочках на частотный спектр. В [10] экспериментально и численно продемонстрировано влияние уровня жидкости на изменение окружной формы колебаний для изотропных и поперечно армированных композитных оболочек. В этой работе, как и в [11], анализ осуществляется с использованием соотношений линейной теории упругости.

Собственные колебания горизонтально расположенных слоистых композитных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью, исследованы в статьях [12–15]. В [12, 13] применяется усовершенствованная теория оболочек, учитывающая эффекты поперечной деформации сдвига и инерции вращения. Гидродинамическое давление находится из решения уравнения Бесселя. В основе используемого авторами смешанного подхода лежит точное аналитическое интегрирование матриц отдельных конечных элементов. В численных примерах проанализированы круговые и открытые цилиндрические оболочки, рассмотрено несколько вариантов пакетов композиционного материала. В [14] используется аналогичный подход, распространенный также и на вертикальные оболочки, но рассматриваются толь-

ко осесимметричные и балочные моды колебаний. В [15] исследованы цилиндрические оболочки с эллиптическим поперечным сечением. Решение задачи выполнено численно с применением смешанного подхода. Модальный анализ и МКЭ используются для моделирования динамики слоистой оболочки в рамках гипотез Рейсснера — Миндлина. Поведение идеальной жидкости описывается уравнением Пуассона, записанным относительно потенциала скоростей. Его численное решение осуществляется методом граничных элементов. Оценено влияние толщины и длины оболочки, уровня ее заполнения жидкостью, параметра эллиптичности и угла намотки на собственные частоты колебаний рассматриваемой конструкции. Параметрическое исследование погруженной в жидкость горизонтальной цилиндрической оболочки из поперечно армированного симметричного композита осуществлено в [16] с использованием метода Рэлея — Ритца.

В статьях [17–19] для исследования колебаний поперечно армированных круговых цилиндрических, конических и комбинированных оболочек, частично заполненных идеальной несжимаемой жидкостью, или погруженных в нее, применяется метод динамической жесткости. Деформации описываются в рамках теорий Рейсснера — Миндлина или Рейсснера — Нагди. Гидродинамическое давление вычисляется из решения уравнения Бесселя. Отмечается, что используемый метод является эффективным инструментом для получения динамических характеристик композитных оболочек в высокочастотном диапазоне на относительно грубой сетке по причине малых вычислительных затрат. Более детальный обзор работ, посвященных анализу динамического поведения слоистых оболочек, взаимодействующих с неподвижной, текущей или вращающейся жидкостью, приведен в недавней публикации [11].

Во всех перечисленных работах эффекты на свободной поверхности жидкости (в случае частичного заполнения), как и на смоченной поверхности упругого тела, обусловленные гравитационными силами, не принимаются во внимание. При учете гравитационных сил в [20] предложено использовать математически корректную постановку, которая подразумевает, что кроме эффектов волнообразования и изменения напряженно-деформированного состояния тела, находящегося под действием гидростатического давления на смоченной поверхности, также должно учитываться изменение этого давления вследствие движения стенки оболочки. Именно в такой формулировке в [21] с использованием МКЭ выполнено исследование изотропной цилиндрической оболочки. Здесь же приведены публикации, в которых рассматриваются предварительно нагруженные оболочки, содержащие жидкость, в том числе учитывающие воздействие гидростатической нагрузки. Отметим также, что согласно [22] при осесимметричных колебаниях гравитационными эффектами на свободной поверхности можно пренебречь в связи с их незначительным влиянием.

Таким образом, целью настоящей работы является исследование влияния угла армирования слоистого материала на фундаментальные частоты колебаний цилиндрической оболочки с жидкостью при воздействии гидростатического давления. Решение сформулированной краевой задачи осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова [23]. При этом системы обыкновенных дифференциальных уравнений для упругого тела и жидкости решаются совместно. Для этого акустическое уравнение, описывающее поведение идеальной сжимаемой жидкости, сводится к нормальному виду Коши с помощью метода обобщенных дифференциальных квадратур. В [24] на примере усеченной конической оболочки, полностью заполненной жидкостью, продемонстрировано, что этот метод по сравнению с методами прямых и кубической сплайн-аппроксимаций обладает рядом преимуществ.

2. Постановка задачи. Рассматривается вертикально ориентированная упругая композиционная цилиндрическая оболочка вращения (рис. 1) длиной L , радиусом R и толщиной h , которая полностью или частично на высоту H заполнена идеальной сжимаемой жидкостью. Тонкостенное тело изготовлено из однонаправленного материала (бор-эпоксидная смола AVCO 5505 [25]), слои которого ориентированы под углами $+\alpha$ и $-\alpha$ относительно меридиональной координаты (перекрестно армированный композит). Рассматриваются пакеты, состоящие из двух $[\alpha, -\alpha]$ или трех $[\alpha, 0^\circ, -\alpha]$ слоев. В случае частичного заполнения гравитационные эффекты на свободной поверхности жидкости S_{free} не учитываются. Однако принимаются во внимание изменения напряженно-деформированного состояния тела, обусловленные воздействием инициированных гравитацией гидростатических сил p_g , действующих на смоченной поверхности. Необходимо проанализировать влияние угла армирования α для двух вариантов укладки слоистого материала на минимальные частоты колебаний оболочки при различных уровнях ее заполнения жидкостью и разных комбинациях граничных условий, задаваемых на краях тонкостенной конструкции.

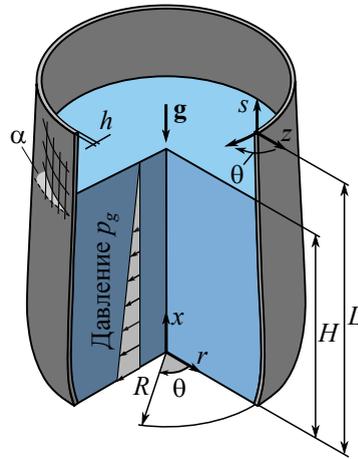


Рис. 1. Расчетная схема композитной цилиндрической оболочки с жидкостью.

3. Основные соотношения и метод решения. Компоненты тензора деформаций E_{ij} для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява, записываются в криволинейной системе координат (s, θ, z) в виде [26]

$$E_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad E_{22} = \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\kappa_{12},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u', & \varepsilon_{22} &= v' + \varkappa w, & \varepsilon_{12} &= v' + u', & \kappa_{11} &= \theta'_1, \\ \kappa_{22} &= \theta'_2, & \kappa_{12} &= \theta'_1 + \varkappa v', & \theta_1 &= -w', & \theta_2 &= -w' + \varkappa v, \end{aligned} \quad (1)$$

$$(\dots)' = \frac{\partial(\dots)}{\partial s}, \quad (\dots)\cdot = \frac{1}{R} \frac{\partial(\dots)}{\partial \theta}.$$

Здесь $\varkappa = 1/R$; u , v и w – меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений оболочки; θ_i – углы поворота недеформируемой нормали.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов $\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, M_{12}\}^T$ и вектором обобщенных деформаций

$\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}^T$, в матричном виде записываются как

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\varepsilon = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \varepsilon, \quad (2)$$

где коэффициенты, входящие в матрицу жесткостей \mathbf{D} , определяются по формулам

$$(\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}, \bar{c}_{ij}) = \int_h (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij}(\alpha) dz, \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

а компоненты матрицы $\bar{Q}_{ij}(\alpha)$ вычисляются известным способом [27] в результате изменения свойств однонаправленного материала при повороте системы координат на угол α .

Нелинейные уравнения движения оболочки

$$\begin{aligned} T'_{11} + S' - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad S' + T'_{22} + \varkappa(Q_{22} + M'_{12}) - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \\ Q'_{11} + Q'_{22} - \varkappa T_{22} + p - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$M'_{11} + M'_{12} - Q_{11} - T_{11}\theta_1 - S\theta_2 = 0, \quad M'_{12} + M'_{22} - Q_{22} - T_{22}\theta_1 - S\theta_1 = 0,$$

где Q_{ii} — поперечные силы; $\rho_0 = \int_h \rho dz$, ρ — плотность материала; p — гидродинамическое давление, которое в области V_f в цилиндрической системе координат (x, θ, r) описывается акустическим волновым уравнением

$$\nabla^2 p = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Здесь c — скорость звука в жидкости. На смоченной ($r = R$) и свободной ($x = H$) поверхностях, оси вращения оболочки ($r = 0$), нижнем ($x = 0$) и верхнем ($x = L$) краях давление p удовлетворяет следующим условиям:

$$\nabla p \cdot \mathbf{n}|_{r=R} = -\rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n}|_{r=0} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ x = H : \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, & H = L, \\ p = 0, & H < L, \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

где \mathbf{n} — единичные внешние нормали к области жидкости V_f ; ρ_f — плотность жидкости. Равенство нулю градиента давления в условиях (7) характеризует взаимодействие жидкости с недеформируемыми поверхностями. Граничное условие (7) при $x = H < L$ предполагает, что свободная поверхность жидкости S_{free} не перемещается, на ней отсутствуют динамическое давление и поверхностное натяжение.

Раскладывая все компоненты уравнений (1), (2) и (4) в ряды Фурье по окружной координате θ ,

$$X(x, \theta) = \sum_{j=0} X_j(x) \cos(j\theta), \quad Y(x, \theta) = \sum_{j=0} Y_j(x) \sin(j\theta),$$

$$X = \{u, w, \theta_1, E_{11}, E_{22}, K_{11}, K_{22}, T_{11}, T_{22}, M_{11}, M_{22}, Q_{11}, p\},$$

$$Y = \{v, \theta_2, E_{12}, K_{12}, S, M_{12}, Q_{22}\},$$

сведем геометрические (1) и физические (2) соотношения, а также уравнения движения (3) к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно новых неизвестных (индекс j для простоты опущен) [26]:

$$\begin{aligned} y_1 = T_{11}, \quad y_2 = S + 2\kappa M_{12}, \quad y_3 = M_{11}, \quad y_4 = Q_{11} + \bar{j}M_{12}, \\ y_5 = u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta_1. \end{aligned}$$

Здесь j — номер гармоники при разложении в ряд Фурье, $\bar{j} = j/R$. С учетом этого и принимая во внимание $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y} \exp(i\omega t)$, искомая линеаризованная система записывается следующим образом:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(j, \omega, \mathbf{y}), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} f_1 = \bar{j}(2\kappa M_{12} - y_2) - \omega^2 \rho_0 y_5, \quad f_2 = \bar{j}T_{22} - \kappa Q_{22} - \omega^2 \rho_0 y_6, \\ f_3 = y_4 - 2\bar{j}M_{12} + T_{11}^0 y_8 - y_1 \theta_1^0, \quad f_4 = \kappa T_{22} - \bar{j}Q_{22} - p - \omega^2 \rho_0 y_7, \\ f_5 = \varepsilon_{11} - \theta_1^0 y_8, \quad f_6 = \varepsilon_{12} + \bar{j}y_5 - \theta_1^0 \theta_2, \quad f_7 = -y_8, \quad f_8 = \kappa_{11}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь ω — частота колебаний, $\omega^2 = -1$. Входящие в выражения (9) величины вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} = \bar{j}y_6 + \kappa y_7, \quad \kappa_{22} = \bar{j}\theta_2, \quad \theta_2 = \kappa y_6 - \bar{j}y_7, \quad \varpi = \bar{a}_{11}\bar{c}_{11} - \bar{b}_{11}^2, \\ M_{12} = \bar{b}_{33}\varepsilon_{12} + 2\bar{c}_{33}\kappa_{12}, \quad Q_{22} = -\bar{j}M_{22} + T_{22}^0 \theta_2 - \theta_1^0 (y_2 - 2\kappa M_{12}), \\ \kappa_{11} = [\bar{a}_{11}(y_3 - \bar{b}_{12}\varepsilon_{22} - \bar{c}_{12}\kappa_{22}) - \bar{b}_{11}(y_1 - \bar{a}_{12}\varepsilon_{22} - \bar{b}_{12}\kappa_{22})] / \varpi, \\ \varepsilon_{11} = (y_1 - \bar{a}_{12}\varepsilon_{22} - \bar{b}_{11}\kappa_{11} - \bar{b}_{12}\kappa_{22}) / \bar{a}_{11}, \quad \kappa_{12} = \kappa(\varepsilon_{12} + \bar{j}y_5 - \theta_1^0 \theta_2) - \bar{j}y_8, \\ T_{22} = \bar{a}_{12}\varepsilon_{11} + \bar{a}_{22}\varepsilon_{22} + \bar{b}_{12}\kappa_{11} + \bar{b}_{22}\kappa_{22}, \quad M_{22} = \bar{b}_{12}\varepsilon_{11} + \bar{b}_{22}\varepsilon_{22} + \bar{c}_{12}\kappa_{11} + \bar{c}_{22}\kappa_{22}, \\ \varepsilon_{12} = [y_2 - 2(\bar{b}_{33} + 2\kappa\bar{c}_{33})(\bar{j}(\kappa y_5 + y_8) - \kappa\theta_1^0 \theta_2)] / [\bar{a}_{33} + 4\kappa(\bar{b}_{33} + \kappa\bar{c}_{33})]. \end{aligned}$$

Величины T_{11}^0 , T_{22}^0 и θ_1^0 , характеризующие основное напряженно-деформированное состояние, определяются из решения следующей осесимметричной статической задачи:

$$\bar{\mathbf{y}}' = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{b}, \quad b_3 = p_g, \quad p_g = \rho f g (H - x).$$

Здесь $\bar{\mathbf{y}} = \{T_{11}, Q_{11}, M_{11}, u, w, \theta_1\}^T$ и g — ускорение свободного падения.

Уравнение (4) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений методом обобщенных дифференциальных квадратур [28]. Для этого область жидкости по радиусу r делится на n точек. Тогда производные l -го порядка от функции $p(x, r)$ в любой точке r_i определяются как

$$\frac{\partial^l p(x, r_i)}{\partial r^l} = \sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)} p(x, r_k), \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, n-1}, \quad (10)$$

где весовые коэффициенты $c_{ik}^{(l)}$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\left. \begin{aligned} c_{ik}^{(1)} = \frac{M^{(1)}(r_i)}{M^{(1)}(r_k)(r_i - r_k)}, \quad c_{ii}^{(1)} = -\sum_{k=1}^n c_{ik}^{(1)}, \quad M^{(1)}(r_i) = \prod_{k=1}^n (r_i - r_k) \\ c_{ik}^{(l)} = l(c_{ik}^{(1)} c_{ii}^{(l-1)} - \frac{c_{ik}^{(l-1)}}{r_i - r_k}), \quad c_{ii}^{(l)} = -\sum_{k=1}^n c_{ik}^{(l)} \end{aligned} \right\} i \neq k, \quad i, k = \overline{1, n}.$$

С учетом (10) граничные условия (5) и (6) представим в виде

$$\left. \frac{\partial p(x, r_n)}{\partial r} \right|_{r=R} = \sum_{k=1}^n c_{nk}^{(1)} p_k(x) + \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \left. \frac{\partial p(x, r_1)}{\partial r} \right|_{r=0} = \sum_{k=1}^n c_{1k}^{(1)} p_k(x) = 0$$

и, переписав их следующим образом

$$c_{n1}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{nk}^{(1)} p_k(x) + c_{nn}^{(1)} p_n(x) + \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$c_{11}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) + c_{1n}^{(1)} p_n(x) = 0,$$

получим явные выражения для «крайних» значений:

$$p_n(x) = \frac{c_{n1}^{(1)} \sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) / c_{11}^{(1)} - \sum_{k=2}^{n-1} c_{nk}^{(1)} p_k(x) - \rho_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}}{c_{nn}^{(1)} - c_{n1}^{(1)} c_{n1}^{(1)} / c_{11}^{(1)}},$$

$$p_1(x) = - \frac{\sum_{k=2}^{n-1} c_{1k}^{(1)} p_k(x) + c_{1n}^{(1)} p_n(x)}{c_{11}^{(1)}}.$$

Тогда система обыкновенных дифференциальных уравнений примет вид

$$p_{n-1}^{(1)}(x) = c_{n-11}^{(1)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-1k}^{(1)} y_{7+2(k-1)} + c_{n-1n}^{(1)} p_n(x),$$

$$p_{n-1}^{(2)}(x) = c_{n-11}^{(2)} p_1(x) + \sum_{k=2}^{n-1} c_{n-1k}^{(2)} y_{7+2(k-1)} + c_{n-1n}^{(2)} p_n(x), \quad (11)$$

$$y_{7+2(n-1)} = p_{n-1}(x), \quad y'_{7+2(n-1)} = y_{8+2(n-1)},$$

$$y'_{8+2(n-1)} = -p_{n-1}^{(2)}(x) + y_{7+2(n-1)} \left(\frac{j^2}{r_{n-1}^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) - \frac{p_{n-1}^{(1)}(x)}{r_{n-1}}.$$

Принимая во внимание, что в соотношениях (9) $p = p_n$, совокупное число неизвестных, определяемых системами уравнений (8) и (11), составляет $m = 8 + 2(n - 1)$.

Объединенные системы уравнений (8), (11) решаются методом ортогональной прогонки Годунова с численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности и соответствующими однородными граничными условиями, задаваемыми на краях оболочки и жидкой среды:

$$y_i|_{s=0} \delta_i + y_{i+M}|_{s=0} (1 - \delta_i) = 0, \quad i = 1 \dots M, \quad (12)$$

$$y_i|_{s=L} \delta_{i+M} + y_{i+M}|_{s=L} (1 - \delta_{i+M}) = 0, \quad i = 1 \dots M, \quad (13)$$

$$y_i|_{x=0} = 0, \quad i = 10, 12 \dots m/2, \quad (14)$$

$$y_i|_{x=L} = 0, \quad i = 10, 12 \dots m/2, \quad (15a)$$

$$y_i|_{x < L} = 0, \quad i = 9, 11 \dots m/2 - 1, \quad (15b)$$

где $\delta_i = 0$, если заданы кинематические, и $\delta_i = 1$, если заданы статические граничные условия, параметр M принимает значение, равное 3 при решении статической задачи или 4 — в случае динамической.

Общее решение систем представляется в виде

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{m/2} C_k \mathbf{y}_k,$$

где C_k — некоторые константы и \mathbf{y}_k — совокупность линейно независимых решений объединенных систем, удовлетворяющих граничным условиям (12), (13). В результате интегрирования по заданному интервалу и удовлетворения граничных условий (14), (15) получаем следующую алгебраическую систему для определения постоянных C_k :

$$\sum_{k=1}^{m/2} C_k f_{ik} = 0, \quad i = \overline{1, m/2}. \quad (16)$$

Искомая задача сводится к определению таких значений, при которых существует нетривиальное решение системы (16). Необходимым условием этого является равенство нулю определителя матрицы $|f_{ik}(\omega)| = 0$. Для вычисления частот ω , удовлетворяющих данному условию, используется сочетание пошаговой процедуры и метода деления пополам.

4. Численные результаты. В численных примерах рассматриваются свободно опертые ($v = w = T_{11} = M_{11} = 0$, SS), жестко защемленные ($u = v = w = \theta_1 = 0$, CC) на обоих краях или консольно закрепленные ($T_{11} = 0$, $S + 2\kappa M_{12} = 0$, $M_{11} = 0$, $Q_{11} + \bar{j} M_{12} = 0$, CF) цилиндрические оболочки. Сходимость метода обобщенных дифференциальных квадратур изучена в работе [24]. На основании этих исследований во всех представленных ниже расчетах область решения в радиальном направлении разбивается на 15 точек. Для представления результатов расчетов вводятся безразмерные параметры уровня заполнения жидкостью $\psi = H/L$ и относительного изменения низшей собственной частоты колебаний $\bar{\omega}(\alpha, \psi)$ как функции от угла намотки и уровня жидкости [11]:

$$\bar{\omega}(\alpha, \psi) = \frac{\omega(\alpha, \psi) - \omega(0^\circ, \psi)}{\omega(\alpha, \psi)} 100 \%.$$

Верификация результатов, получаемых в рамках описанного алгоритма, осуществлена на следующих примерах. В первом из них рассмотрена пустая ($\psi = 0$) двухслойная и трехслойная цилиндрическая оболочка ($R = 0.1905$ м, $L = 0.381$ м, $h = 5 \times 10^{-4}$ м), изготовленная из бор-эпоксидной смолы (AVCO 5505), физико-механические характеристики для которой заимствованы из [25]. В таблице представлены низшие собственные частоты колебаний ω жестко закрепленной на обоих краях (CC) слоистой цилиндрической оболочки при разных значениях угла намотки α . Здесь же приведены результаты, полученные в рамках различных реализаций МКЭ [11, 25, 29]. Сопоставляемые данные хорошо согласуются, особенно в тех случаях, когда решение основывается на аналогичной теории тонких оболочек.

В следующем примере рассматривается изотропная оболочка, полностью заполненная несжимаемой жидкостью ($\rho_f = 1000$ кг/м³), имеющая следующие геометрические и физико-механические параметры: модуль упругости $E = 206$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, $\rho = 7850$ кг/м³, $R = 25$ м, $h = 0.03$ м, $L = 30$ м. На рис. 2 приведены зависимости низших частот колебаний ω от безразмерного уровня заполнения ψ . Расчеты осуществлены при различных граничных условиях без

Сравнение низших собственных частот колебаний ω (Гц) пустой жестко закрепленной на обоих краях слоистой цилиндрической оболочки

α, \circ	Схема укладки $[\alpha, -\alpha]$				Схема укладки $[\alpha, 0^\circ, -\alpha]$			
	Источник			Расчет	Источник			Расчет
	[25]	[11]	[29]		[25]	[11]	[29]	
0	261.41	261.09	261.13	261.13	261.41	261.09	261.13	261.13
15	351.75	351.21	351.01	351.01	337.63	337.31	337.03	337.03
30	369.56	366.50	366.39	366.39	397.58	396.18	395.95	395.95
45	340.95	332.78	332.64	332.64	446.24	443.98	443.78	443.78
60	359.36	352.76	352.56	352.56	487.64	485.94	485.69	485.69
75	382.24	380.14	380.13	380.13	465.54	464.96	464.63	464.63
90	333.43	332.49	332.53	332.53	370.71	370.07	370.09	370.09

учета (рис. 2, *а*) и с учетом (рис. 2, *б*) влияния гравитационных сил на смоченной поверхности. Символами на рисунке обозначены результаты, полученные в [21] с помощью МКЭ. Незначительные расхождения в результатах, не превышающие 2%, в случае нагруженной оболочки могут быть объяснены как тем, что в [21] гидростатическая нагрузка принята «следящей», так и тем, что в процедуре Годунова большее количество точек интегрирования, по сравнению с числом конечных элементов, наряду с интерполяцией в промежуточных точках, более качественно описывают деформируемую поверхность. Влияние эффектов плескания на свободной поверхности, которые также не учитываются в настоящей постановке, для рассмотренной конфигурации пренебрежимо мало. В следующих вычислениях будут использованы оболочки, геометрические размеры которых соответствуют данным из второго примера, а параметры материала оболочки — из первого.

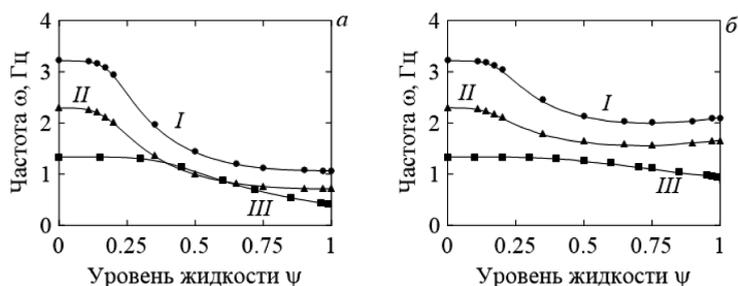


Рис. 2. Зависимости низших собственных частот ω от безразмерного уровня заполнения ψ без учета (*а*) и с учетом (*б*) гидростатического давления p_g : кривая *I* — граничные условия *CC*; *II* — *SS*; *III* — *CF*; символы — результаты из работы [21].

В случае учета гравитации на оболочку с жидкостью действуют два противоположных механизма. С одной стороны, повышение присоединенной массы жидкости приводит к понижению собственных частот колебаний связанной системы. А с другой — давление столба жидкости на смоченную поверхность упругого тела повышает его жесткость, способствуя тем самым росту частоты. Из данных, представленных на рис. 2, следует, что, начиная с какого-то уровня жидкости (различного для оболочек с разными комбинациями граничных условий), подкрепленная гравитационными силами конструкция с повышением уровня заполнения менее подвержена изменению частотного спектра.

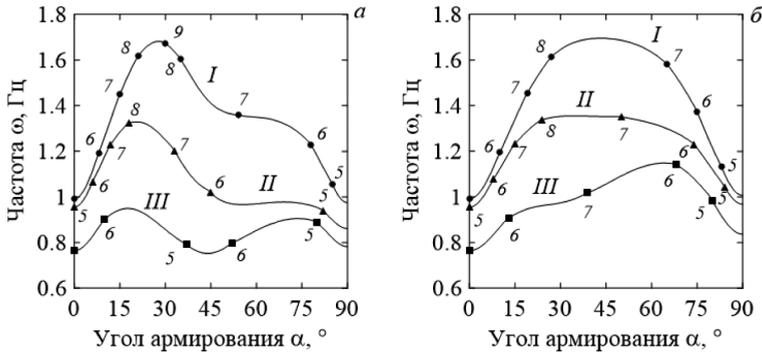


Рис. 3. Зависимости низших частот колебаний ω двухслойной (а) и трехслойной (б) оболочки, наполовину ($\psi = 0.5$) заполненной жидкостью, от угла намотки α : I – CC; II – SS; III – CF; арабские цифры – номера окружных гармоник j .

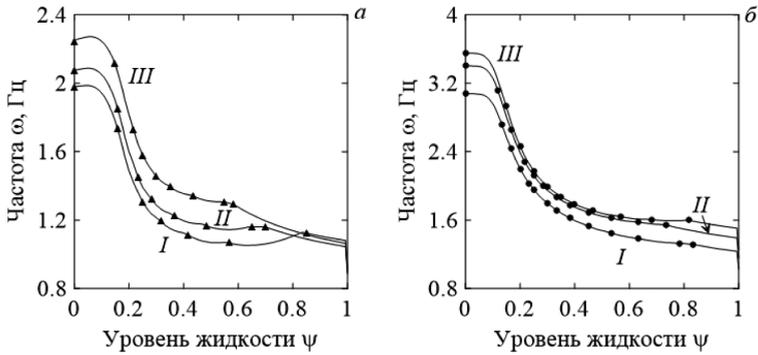


Рис. 4. Зависимости низших частот колебаний ω двухслойной (а) и трехслойной (б) оболочки от безразмерного уровня заполнения ψ ; а: SS, I – $\alpha = 40^\circ$, II – $\alpha = 35^\circ$, III – $\alpha = 25^\circ$; б: CC, I – $\alpha = 20^\circ$, II – $\alpha = 30^\circ$, III – $\alpha = 35^\circ$.

Как и в случае ненагруженных оболочек [11], изменение угла армирования приводит к интенсивной трансформации формы колебаний, соответствующей фундаментальной частоте. Это подтверждается данными, приведенными на рис. 3. Здесь для различных схем укладки показаны зависимости низшей частоты колебаний ω от угла намотки α , полученные для слоистых оболочек с разными граничными условиями, наполовину ($\psi = 0.5$) заполненных сжимаемой жидкостью ($c = 1500$ м/с). Символами обозначены места смены формы колебаний, а арабскими цифрами указано соответствующее количество полуволн в окружном направлении j .

Однако в случае нагруженных оболочек появляется особенность в формоизменении, которая демонстрируется на рис. 4. Здесь показаны зависимости низшей частоты колебаний ω от уровня жидкости ψ , полученные при фиксированных значениях углах армирования α для свободно опертых (рис. 4, а) и жестко закрепленных оболочек (рис. 4, б). Символами, как и ранее, отображены точки смены окружной гармоник с минимальной частотой. В частности, для двухслойной оболочки (рис. 4, а) при $\alpha = 25^\circ$ окружная гармоника последовательно снижается с $j = 14$ при $\psi = 0$ до $j = 7$ при $\psi \approx 0.55$, после чего при $\psi \approx 0.58$ скачкообразно принимает

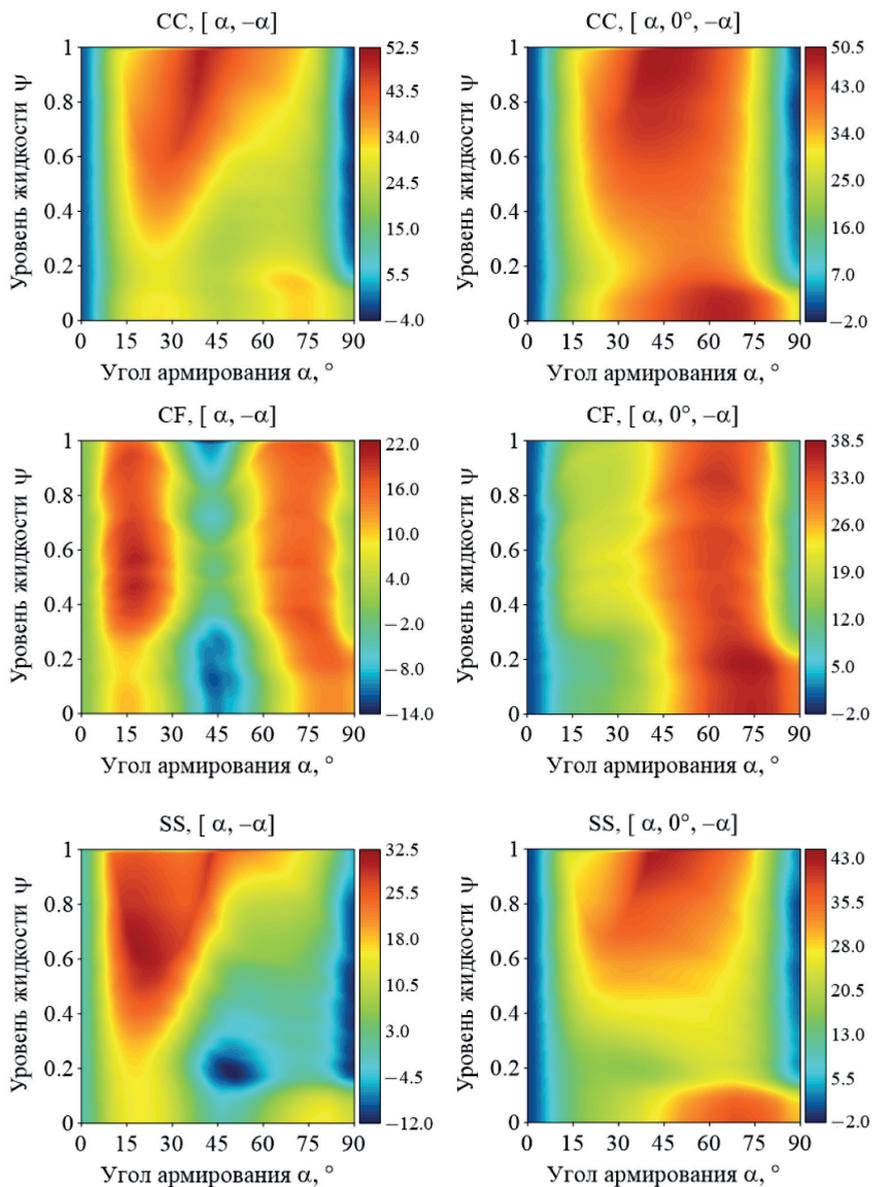


Рис. 5. Изоповерхности относительного изменения низшей частоты колебаний $\bar{\omega}$ слоистой оболочки с различными комбинациями граничных условий как функции угла армирования α и уровня жидкости ψ .

значение $j = 1$. В случае трехслойной оболочки (рис. 4, б) при $\alpha = 20^\circ$ происходит снижение с $j = 16$ при $\psi = 0$ до $j = 4$ при $\psi \approx 0.78$ и переход к $j = 1$ при $\psi \approx 0.83$.

Таким образом, при учете гидростатической нагрузки низшим частотам может соответствовать балочная мода колебаний. Данная особенность характерна только для определенных значений углов армирования. Например, для первого варианта, представленного на рис. 4, в случае только частичного заполнения ($0 \leq \psi < 1$), этот диапазон составляет $\alpha = 11^\circ \div 42^\circ$. Для второго варианта — $\alpha = 16^\circ \div 39^\circ$. При кон-

сольном закреплении свободный край оболочки препятствует появлению балочной формы колебаний с минимальной частотой. Наблюдаемое на кривых резкое снижение частоты при $\psi = 1$ связано с изменением граничных условий для жидкости. Эта особенность также проявляется на достаточно широком диапазоне углов армирования, что можно наблюдать ниже на рис. 5.

Наглядно оценить зависимость минимальных частот колебаний от схемы укладки, угла армирования и уровня жидкости для оболочек с разными граничными условиями предоставляют данные, показанные на рис. 5. Приведенные здесь изоповерхности относительного изменения низшей собственной частоты колебаний $\bar{\omega}$ дают более полную информацию о распределении частотного спектра и в зависимости от эксплуатационных требований к конструкции позволяют подобрать подходящую совокупность параметров. В частности, очевидно, что трехслойная схема укладки слоистого композита является более предпочтительной, так как она для большинства проанализированных комбинаций обеспечивает более высокую максимизацию низшей частоты по сравнению с однонаправленным материалом и не содержит явных зон ее минимизации.

5. Заключение. Представлены результаты численного исследования собственных частот колебаний вертикальных круговых композитных цилиндрических оболочек, полностью или частично заполненных идеальной неподвижной жидкостью. Принято во внимание изменение в напряженно-деформированном состоянии смоченной поверхности упругого тела, подвергающегося воздействию гидростатического давления как функции гравитационных сил. Проанализировано влияние разных схем укладки слоистого композита на минимальные частоты колебаний оболочек, имеющих разнообразные граничные условия при различных значениях угла армирования и уровнях жидкости. В результате вычислительных экспериментов установлено, что для нагруженных оболочек с жидкостью при определенных углах армирования и комбинациях граничных условий возможно появление минимальных частот с балочной модой колебаний, способствующих проявлению резонансных явлений. Продемонстрировано, что в результате оптимального подбора схем укладки и углов армирования слоистого композиционного материала можно расширить границы безопасного функционирования изготовленной из него оболочки при ее частичном заполнении жидкостью.

Литература

1. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Compos. Struct.* **93**(1), 14–31 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
2. Qatu M., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010. *Open J. Compos. Mater.* **2**(3), 61–86 (2012). <https://doi.org/10.4236/ojcm.2012.23009>
3. Muggeridge D.B., Buckley T.J. Flexural vibration of orthotropic cylindrical shells in a fluid medium. *AIAA J.* **17**(9), 1019–1022 (1979). <https://doi.org/10.2514/3.61270>
4. Nurul Izyan M.D., Aziz Z.A., Viswanathan K.K. Free vibration of anti-symmetric angle-ply layered circular cylindrical shells filled with quiescent fluid under first order shear deformation theory. *Compos. Struct.* **193**, 189–197 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.034>
5. Nurul Izyan M.D., Aziz Z.A., Ghostine R., Lee J.H., Viswanathan K.K. Free vibration of cross-ply layered circular cylindrical shells filled with quiescent fluid under first order shear deformation theory. *Int. J. Press. Vessel. Pip.* **170**, 73–81 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2019.01.019>
6. Nurul Izyan M.D., Viswanathan K.K. Vibration of symmetrically layered angle-ply cylindrical shells filled with fluid. *PLoS ONE* **14**(7), e0219089 (2019). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0219089>

7. Xi Z. C., Yam L. H., Leung T. P. Free vibration of a laminated composite circular cylindrical shell partially filled with fluid. *Compos. B Eng.* **28** (4), 359–374 (1997). [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00047-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00047-9)
8. Xi Z. C., Yam L. H., Leung T. P. Free vibration of a partially fluid-filled cross-ply laminated composite circular cylindrical shell. *J. Acoust. Soc. Am.* **101** (2), 909–917 (1997). <https://doi.org/10.1121/1.418049>
9. Okazaki K., Tani J., Sugano M. Free vibrations of a laminated composite coaxial circular cylindrical shell partially filled with liquid. *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. C.* **68** (671), 1942–1949 (2002). <https://doi.org/10.1299/kikaic.68.1942>
10. Okazaki K., Tani J., Qiu J., Kosugo K. Vibration test of a cross-ply laminated composite circular cylindrical shell partially filled with liquid. *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. C.* **73** (727), 724–731 (2007). <https://doi.org/10.1299/kikaic.73.724>
11. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Natural vibrations and hydroelastic stability of laminated composite circular cylindrical shells. *Struct. Eng. Mech.* **81** (6), 769–780 (2022). <https://doi.org/10.12989/sem.2022.81.6.769>
12. Toorani M. H., Lakis A. A. Shear deformation in dynamic analysis of anisotropic laminated open cylindrical shells filled with or subjected to a flowing fluid. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **190** (37), 4929–4966 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00357-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00357-1)
13. Toorani M. H., Lakis A. A. Dynamic analysis of anisotropic cylindrical shells containing flowing fluid. *J. Press. Vessel Technol.* **123** (4), 454–460 (2001). <https://doi.org/10.1115/1.1401023>
14. Toorani M. H., Lakis A. A. Dynamics behavior of axisymmetric and beam-like anisotropic cylindrical shells conveying fluid. *J. Sound Vib.* **259** (2), 265–298 (2003). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5161>
15. Firouz-Abadi R. D., Haddadpour H., Kouchakzadeh M. A. Free vibrations of composite tanks partially filled with fluid. *Thin-Walled Struct.* **47** (12), 1567–1574 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.tws.2009.05.007>
16. Yao S., Zhang Y., Xue J., Jin F., He Z. Free vibration of non-shallow, laminated cylinders submerged in a fluid with general boundary conditions. *Appl. Ocean Res.* **125**, 103232 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.apor.2022.103232>
17. Thinh T. I., Nguyen M. C. Dynamic stiffness method for free vibration of composite cylindrical shells containing fluid. *Appl. Math. Model.* **40** (21–22), 9286–9301 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.06.015>
18. Hien V. Q., Thinh T. I., Cuong N. M. Free vibration analysis of joined composite conical-cylindrical-conical shells containing fluid. *Vietnam J. Mech.* **38**, 249–265 (2016). <https://doi.org/10.15625/0866-7136/6954>
19. Zhu H.-Z., Wu J.-H. Free vibration of partially fluid-filled or fluid-surrounded composite shells using the dynamic stiffness method. *Acta Mech.* **231** (9), 3961–3978 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02734-3>
20. Григолюк Э. И., Шклярчук Ф. Н. Уравнения возмущенного движения тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью. *ПММ* **34** (3), 401–411 (1970).
21. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Natural vibrations and stability of loaded cylindrical shells partially filled with fluid, taking into account gravitational effects. *Thin-Walled Struct.* **164**, 107867 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107867>
22. Горшков А. Г., Морозов В. И., Пономарев А. Т., Шклярчук Ф. Н. *Аэрогидроупругость конструкций*. Москва, Физматлит (2000).
23. Годунов С. К. *Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Т. I: Краевые задачи*. Новосибирск, НГУ (1994).
24. Бочкарев С. А., Лекомцев С. В., Матвеев В. П. Собственные колебания усеченных конических оболочек, содержащих жидкость. *ПММ* **86** (4), 505–526 (2022). <https://doi.org/10.31857/S0032823522040038>
25. Sheinman I., Greif S. Dynamic analysis of laminated shells of revolution. *J. Compos. Mater.* **18** (3), 200–215 (1984). <https://doi.org/10.1177/002199838401800301>
26. Кармишин А. В., Лясковец В. А., Мяченков В. И., Фролов А. Н. *Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций*. Москва, Машиностроение (1975).
27. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов В. Г. *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Москва, Машиностроение (1984).
28. Shu C. *Differential quadrature and its application in engineering*. London, Springer-Verlag (2000).

29. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Stability analysis of composite cylindrical shell containing rotating fluid. *IOP J. Phys.: Conf. Ser.* **1945**, 012034 (2021). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1945/1/012034>

Статья поступила в редакцию 21 марта 2023 г.;
доработана 4 мая 2023 г.;
рекомендована к печати 18 мая 2023 г.

Контактная информация:

Bochkarev Sergey Arkadyevich — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; bochkarev@icmm.ru

Lekomtsev Sergey Vladimirovich — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; lekomtsev@icmm.ru

Matveenko Valeriy Pavlovich — д-р техн. наук, проф., гл. науч. сотр.; mvp@icmm.ru

Natural vibrations of composite cylindrical shells partially filled with fluid*

S. A. Bochkarev, S. V. Lekomtsev, V. P. Matveenko

Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
1, ul. Ak. Koroleva, Perm, 614068, Russian Federation

For citation: Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of composite cylindrical shells partially filled with fluid. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 616–631.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.403> (In Russian)

The article presents the results of studies of natural vibrations of circular vertical multi-layer cylindrical shells completely or partially filled with a stationary compressible fluid and subjected to hydrostatic load. The behavior of the elastic structure and the fluid medium is described using the classical shell theory and the Euler equations. The effects of sloshing on the free surface of the fluid are not considered. The linearized equations of motion for shells together with the corresponding geometric and physical relations are reduced to a system of ordinary differential equations with respect to new unknowns. The acoustic wave equation is transformed to a system of differential equations using the generalized differential quadrature method. The formulated boundary value problem is solved by Godunov's method of orthogonal sweep. The natural frequencies of vibrations are calculated based on the combination of a stepwise procedure and subsequent refinement by the method of dividing in half. The reliability of the obtained results is verified by comparison with the known numerical solutions. The dependence of low vibration frequencies on the reinforcing angle and the level of the structure filling with a fluid for simply supported, rigidly clamped and cantilevered two-layer and three-layer cylindrical shells with a fluid are analyzed in detail. It is demonstrated that the possibility of changing the frequencies and vibration modes through a suitable choice of the layer arrangement scheme and the reinforcing angle of the composite material is notably determined by a prescribed combination of boundary conditions for an elastic body.

Keywords: classical shell theory, compressible fluid, layered material, hydrostatic pressure, Godunov's orthogonal sweep method, generalized differential quadrature method, natural vibrations.

*The results were obtained within the framework of state task; state registration number of the topic АААА-А19-119012290100-8.

References

1. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Compos. Struct.* **93** (1), 14–31 (2010). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.05.014>
2. Qatu M., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analyses of composite shells: 2000–2010. *Open J. Compos. Mater.* **2** (3), 61–86 (2012). <https://doi.org/10.4236/ojcm.2012.23009>
3. Mugeridge D.B., Buckley T.J. Flexural vibration of orthotropic cylindrical shells in a fluid medium. *AIAA J.* **17** (9), 1019–1022 (1979). <https://doi.org/10.2514/3.61270>
4. Nurul Izyan M.D., Aziz Z.A., Viswanathan K.K. Free vibration of anti-symmetric angle-ply layered circular cylindrical shells filled with quiescent fluid under first order shear deformation theory. *Compos. Struct.* **193**, 189–197 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.03.034>
5. Nurul Izyan M.D., Aziz Z.A., Ghostine R., Lee J.H., Viswanathan K.K. Free vibration of cross-ply layered circular cylindrical shells filled with quiescent fluid under first order shear deformation theory. *Int. J. Press. Vessel. Pip.* **170**, 73–81 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2019.01.019>
6. Nurul Izyan M.D., Viswanathan K.K. Vibration of symmetrically layered angle-ply cylindrical shells filled with fluid. *PLoS ONE* **14** (7), e0219089 (2019). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0219089>
7. Xi Z.C., Yam L.H., Leung T.P. Free vibration of a laminated composite circular cylindrical shell partially filled with fluid. *Compos. B Eng.* **28** (4), 359–374 (1997). [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(96\)00047-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(96)00047-9)
8. Xi Z.C., Yam L.H., Leung T.P. Free vibration of a partially fluid-filled cross-ply laminated composite circular cylindrical shell. *J. Acoust. Soc. Am.* **101** (2), 909–917 (1997). <https://doi.org/10.1121/1.418049>
9. Okazaki K., Tani J., Sugano M. Free vibrations of a laminated composite coaxial circular cylindrical shell partially filled with liquid. *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. C.* **68** (671), 1942–1949 (2002). <https://doi.org/10.1299/kikaic.68.1942>
10. Okazaki K., Tani J., Qiu J., Kosugo K. Vibration test of a cross-ply laminated composite circular cylindrical shell partially filled with liquid. *Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. C.* **73** (727), 724–731 (2007). <https://doi.org/10.1299/kikaic.73.724>
11. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Natural vibrations and hydroelastic stability of laminated composite circular cylindrical shells. *Struct. Eng. Mech.* **81** (6), 769–780 (2022). <https://doi.org/10.12989/sem.2022.81.6.769>
12. Toorani M.H., Lakis A.A. Shear deformation in dynamic analysis of anisotropic laminated open cylindrical shells filled with or subjected to a flowing fluid. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* **190** (37), 4929–4966 (2001). [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(00\)00357-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00357-1)
13. Toorani M.H., Lakis A.A. Dynamic analysis of anisotropic cylindrical shells containing flowing fluid. *J. Press. Vessel Technol.* **123** (4), 454–460 (2001). <https://doi.org/10.1115/1.1401023>
14. Toorani M.H., Lakis A.A. Dynamics behavior of axisymmetric and beam-like anisotropic cylindrical shells conveying fluid. *J. Sound Vib.* **259** (2), 265–298 (2003). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5161>
15. Firouz-Abadi R.D., Haddadpour H., Kouchakzadeh M.A. Free vibrations of composite tanks partially filled with fluid. *Thin-Walled Struct.* **47** (12), 1567–1574 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.tws.2009.05.007>
16. Yao S., Zhang Y., Xue J., Jin F., He Z. Free vibration of non-shallow, laminated cylinders submerged in a fluid with general boundary conditions. *Appl. Ocean Res.* **125**, 103232 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.apor.2022.103232>
17. Thinh T.I., Nguyen M.C. Dynamic stiffness method for free vibration of composite cylindrical shells containing fluid. *Appl. Math. Model.* **40** (21–22), 9286–9301 (2016). <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.06.015>
18. Hien V.Q., Thinh T.I., Cuong N.M. Free vibration analysis of joined composite conical-cylindrical-conical shells containing fluid. *Vietnam J. Mech.* **38**, 249–265 (2016). <https://doi.org/10.15625/0866-7136/6954>
19. Zhu H.-Z., Wu J.-H. Free vibration of partially fluid-filled or fluid-surrounded composite shells using the dynamic stiffness method. *Acta Mech.* **231** (9), 3961–3978 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00707-020-02734-3>
20. Grigolyuk E.I., Shklyarchuk F.N. Equations of perturbed motion of a body with a thin-walled elastic shell partially filled with a liquid. *J. Appl. Math. Mech.* **34** (3), 379–389 (1970). [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(70\)90084-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(70)90084-5) (In Russian)

21. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Senin A. N. Natural vibrations and stability of loaded cylindrical shells partially filled with fluid, taking into account gravitational effects. *Thin-Walled Struct.* **164**, 107867 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107867>
22. Gorshkov A. G., Morozov V. I., Ponomarev V. I., Shklyarchuk F. N. *Aerohydroelasticity of Structures*. Moscow, Fizmatlit Publ. (2000). (In Russian)
23. Godunov S. K. *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniia s postoiannymi koeffitsientami. Vol. I. Kraevye zadachi*. Novosibirsk University Publ. (1994). (In Russian) [Engl. transl.: Godunov S. K. Ordinary differential equations with constant coefficients. Providence. *American Mathematical Society* (1997)].
24. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V., Matveenko V. P. Natural vibrations of truncated conical shells containing fluid. *Mech. Solids* **86** (4), 505–526 (2022). <https://doi.org/10.31857/S0032823522040038> (In Russian) [Eng. transl.: *Mech. Solids* **57** (8), 1971–1986 (2022). <https://doi.org/10.3103/S0025654422080064>].
25. Sheinman I., Greif S. Dynamic analysis of laminated shells of revolution. *J. Compos. Mater.* **18** (3), 200–215 (1984). <https://doi.org/10.1177/002199838401800301>
26. Karmishin A. V., Lyaskovets V. A., Myachenkov V. I., Frolov A. N. *The statics and dynamics of thin-walled shell structures*. Moscow, Mashinostroyeniye (1975). (In Russian)
27. Alfutov N. A., Zinov'ev P. A., Popov B. G. *Analysis of multilayer plates and shells of composite materials*. Moscow, Mashinostroyeniye (1984). (In Russian)
28. Shu C. *Differential quadrature and its application in engineering*. London, Springer-Verlag (2000).
29. Bochkarev S. A., Lekomtsev S. V. Stability analysis of composite cylindrical shell containing rotating fluid. *IOP J. Phys.: Conf. Ser.* **1945**, 012034 (2021). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1945/1/012034>

Received: March 21, 2023

Revised: May 4, 2023

Accepted: May 18, 2023

Authors' information:

Sergey A. Bochkarev — bochkarev@icmm.ru

Sergey V. Lekomtsev — lekomtsev@icmm.ru

Valerii P. Matveenko — mvp@icmm.ru