

## Модели механики деформируемого тела в задачах офтальмологии

*С. М. Бауэр, Л. А. Венатовская, Е. Б. Воронкова*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б. Модели механики деформируемого тела в задачах офтальмологии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 686–712.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.407>

В обзоре очень кратко представлены модели, построенные в сотрудничестве с врачами-офтальмологами: изменение напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после операций по коррекции зрения, изменение внутриглазного давления при введении лекарственных веществ в стекловидное тело. Обсуждаются математические модели, описывающие процесс определения истинного внутриглазного давления (ВГД) при помощи аппланационных методов. Отмечается, что модели биомеханики глаза помогли получить ряд новых результатов в механике деформируемого твердого тела, например решить задачу об устойчивости сферической оболочки, находящейся под действием сосредоточенной силы и внутреннего давления, об устойчивости осесимметричной формы равновесия кольцевых неоднородных ортотропных пластин, находящихся под действием равномерно распределенной нормальной нагрузки. Решены задачи о деформации трансверсально-изотропных сферических и цилиндрических слоев, находящихся под действием внутреннего и внешнего давлений, и проведено сравнение решений, полученных в рамках трехмерной теории с решениями, получающимися по неклассическим теориям оболочек. Это сравнение позволило оценить точность некоторых теорий.

*Ключевые слова:* математическое моделирование, внутриглазное давление, модели теории оболочек.

**1. Введение.** Более 30 лет на кафедре теоретической и прикладной механики Санкт-Петербургского университета в сотрудничестве с врачами ведутся работы по моделированию различных процессов в офтальмологии. Рассмотренные задачи ставились и результаты обсуждались со специалистами Санкт-Петербургского университета и в последнее время Чебоксарского филиала МНТК «Микрохирургия глаза» им. акад. С. Н. Федорова, со специалистами НМИЦ глазных болезней им. Гельмгольца.

Глаз представляет собой уникальный орган человека, его функционирование определяется законами и гидромеханики, и термодинамики, и оптики. Относительно недавно для исследования состояния глаза стали применяться методы механики деформируемого твердого тела (рис. 1). Исследования в области биомеханики глаза позволяют улучшить диагностику различных заболеваний, развивать новые методы терапевтического и хирургического лечения глаза. В связи с этим к математическому описанию глаза в целом и его отдельных элементов в частности обращались при

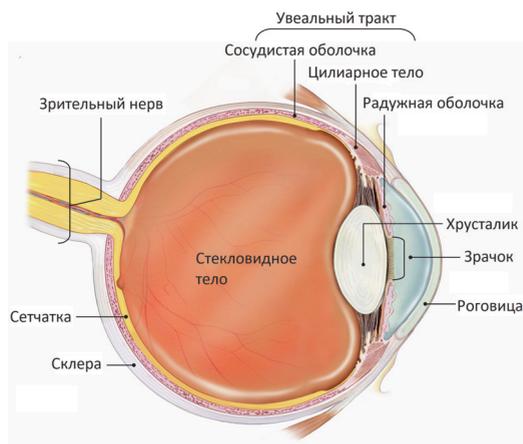


Рис. 1. Строение глаза (Изменено с <https://www.nei.nih.gov/>).

решении многих офтальмологических проблем, и даже упрощенные модели оказывались полезными для врачей-офтальмологов. Построен ряд математических моделей, связанных с деформированием элементов глаза. Глаз, в первом приближении шаровидной формы, имеет три основные оболочки: наружную плотную капсулу, включающую в себя склеру и роговицу, сосудистую оболочку и внутреннюю, очень тонкую оболочку, — сетчатку.

Возникновения отслойки внутренних оболочек глаза (сетчатки и сосудистой оболочки), глаукоматозной атрофии зрительного нерва, аккомодации — вопросы, связанные с деформированием составных элементов глаза, — остаются важными проблемами в офтальмологии [1]. С развитием рефракционной хирургии, меняющей параметры роговицы глаза, особое значение приобрели вопросы стандартизации измерения внутриглазного давления (ВГД), изучение влияния различных параметров глазного яблока на показатели тонометров, изменение показателей ВГД после операций и после инъекций (введение) растворов лекарственных веществ.

Первой задачей, с которой к нам обратились врачи в конце 1980-х гг., была задача математического моделирования операций по лечению отслойки сетчатки. Отслошкой сетчатки называют патологическое состояние, при котором сетчатка теряет контакт с сосудистой оболочкой и отходит от нее внутрь полости глаза. В большинстве случаев отслойка сетчатки подлежит хирургическому лечению с эвакуацией жидкости из образовавшейся полости и вдавлением наружных слоев оболочки глаза до совмещения их с отслоившейся сетчаткой. Для вдавливания склеральной оболочки применяли различные приемы: круговое вдавливание нитью, узкой или широкой лентой по параллели, так называемый циркляж, локальное пломбирование, или комбинированная нагрузка циркляжа и пломбы (рис. 2). Чрезмерное затягивание циркляжной ленты или швов над пломбой является одним из важнейших факторов, которые могут вызвать послеоперационные осложнения: повышение ВГД, продавливание ленты или пломбы сквозь склеру в полость глаза, отслойку сосудистой оболочки, возникновение дополнительных складок. В связи с этим рассматривался ряд моделей расчета напряженно-деформированного состояния оболочки глаза после выполнения противоотслоечных операций [2–7].

После операций, сопровождающихся вскрытием глазного яблока, иногда возникают осложнения, связанные с отслоением сосудистой (средней) оболочки глаза.

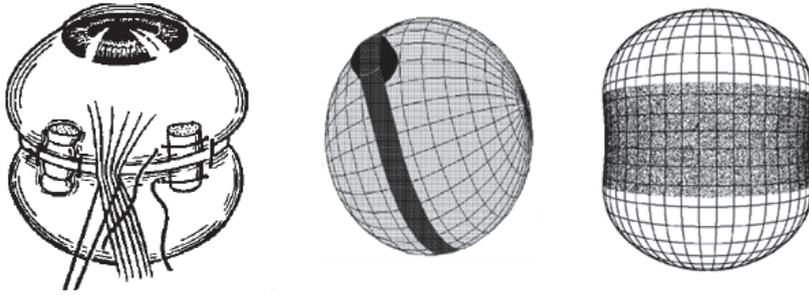


Рис. 2. Моделирование лечения отслойки сетчатки глаза.

В связи с этим рассматривалась механическая модель развития отслойки сосудистой оболочки, которую можно представить как одну из форм разрушения — в виде макротрещины, распространяющейся по поверхности раздела, т. е. трещины расслоения [5]. В частности, в зонах сжатия может произойти отслоение, причиной которого является местная потеря устойчивости. В клинических исследованиях наблюдаются различные (не только симметричные) формы отслоения, что может быть обусловлено разными факторами. В связи с этим рассмотрена задача о потере устойчивости сферической оболочки под действием сосредоточенной силы и внутреннего давления [8]. Для этого сначала с помощью асимптотических и численных методов определялись большие деформации в окрестности приложения сосредоточенной силы и далее определялась точка бифуркации осесимметричного равновесия сферической оболочки. Оценивалось влияние внутреннего давления на величину и форму потери устойчивости.

**2. Математические модели глаукомы.** Глаукома — группа тяжелых глазных заболеваний, при которых отмечается постоянное или периодическое повышение ВГД, снижение остроты зрения и атрофия зрительного нерва (оптическая нейропатия) [9]. Патологический процесс начинается с ухудшения бокового (периферического) зрения. Поражение зрительного нерва, приводящее к дефектам поля зрения, происходит в районе заднего полюса глаза. В этом месте, называемом решетчатой пластинкой диска зрительного нерва (РП), склеральная оболочка истончается и имеет множество отверстий, через которые проходят волокна зрительного нерва. Отмечается, что изменения (прогиб) диска зрительного нерва имеют значение для диагностики глаукомы и оценки эффективности проводимой терапии [9].

Решетчатую пластинку удобно рассматривать как круглую или близкую к круглой пластину или пологую оболочку с модулем упругости, убывающим при движении от центра пластины к ее краю [5, 10–13]. Задача о прогибе круглых цилиндрически ортотропных и трансверсально-изотропных неоднородных (по радиусу и углу) пластин решалась в рамках линейной и геометрически нелинейной общей уточненной теории С. А. Амбарцумяна [14], теории анизотропных оболочек средней толщины Паляя — Спино (ПС) [15] и уточненной итерационной теории Родионовой — Титаева — Черныха (РТЧ) [16]. Для однородных пластин получены соотношения для прогиба пластин по приближенным моделям [17, 18]. Неклассические теории оболочек и пластин позволяют учесть распределение напряжений и перемещений, возникающих в пластине, по ее толщине. При этом расчетная форма прогиба пластинки соответствует наблюдаемой форме деформации РП глаза.

РП является весьма пологой, и при уменьшении градиента давления (например, при повышении внутричерепного давления) она может прогнуться внутрь глаза, а далее может принимать вогнутую форму, соответствующую резко выраженному застою на диске [9]. С механической точки зрения это задача о прогибе сферической панели, нагруженной равномерно распределенным внешним давлением. Известно, что может произойти потеря устойчивости, т. е. «прощелкивание» панели в новое осесимметричное состояние. В работе [19] рассмотрена слабо неоднородная по радиусу пологая панель ( $E(r) = E_0(1 - \varepsilon r/R)$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр). Показано, что критическая нагрузка, соответствующая появлению предельной точки, снижается с ростом неоднородности панели. Таким образом, учет начальной кривизны пластины позволяет объяснить образование застойной дырки, наблюдаемого офтальмологами при уменьшении градиента давлений на уровне решетчатой пластины диска зрительного нерва.

В ряде случаев сильное увеличение ВГД может приводить к образованию складок и отеков по краю РП [9]. Одним из возможных механических объяснений появления таких «отеков и складок» может быть переход пластины в неосесимметричное состояние при больших прогибах. Д. Ю. Панов и В. И. Феодосьев, используя метод Галёркина, первыми получили решение, соответствующее несимметричным формам равновесия у симметрично нагруженной пластины [20]. Однако позже было показано, что одно- или двухпараметрическая аппроксимация недостаточно точно описывают докритическое состояние и, как следствие, приводят к ошибочным значениям критической нагрузки и формам потери устойчивости [21].

Задача о потере устойчивости симметричных форм равновесия круглой или кольцевой пластиной, модуль упругости которой изменяется при движении от центра пластины к ее краю, рассматривалась в работах [22–27]. Приведем кратко постановку задачи и результаты, полученные для неоднородных круглых пластин.

Полагая, что модуль упругости пластины изменяется при удалении от центра пластины к ее краю, разрешающую безразмерную систему уравнений деформации круглой изотропной пластины, нагруженной равномерно распределенным давлением, можно записать в следующем виде [22, 24]:

$$\begin{aligned} g_1(r)\Delta\Delta w + g_1'(r)L_1^+(w) + g_1''(r)L_2^+(w) &= p + L(w, F), \\ g_2(r)\Delta\Delta F + g_2'(r)L_1^-(F) + g_2''(r)L_2^-(F) &= -L(w, w)/2, \\ g_1(r) &= E_0 f(r)/E_{av}, \quad g_2(r) = 1/g_1(r), \\ ( )' &= \partial( )/\partial r, \quad ( \dot{ } ) = \partial( )/\partial \theta, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $r, \theta$  — полярные координаты;  $w(r, \theta), F(r, \theta)$  — искомые безразмерные функции нормального прогиба и усилий;  $f(r)$  — достаточно гладкая функция, определяющая закон изменения модуля упругости пластины;  $E_{av}$  — среднее значение модуля упругости;  $p$  — безразмерное нормальное внешнее давление;  $\Delta$  — оператор Лапласа, записанный в цилиндрических координатах;  $L, L_i^\pm (i = 1, 2)$  — дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} L(x, y) &= x''(y'/r + \ddot{y}/r^2) + y''(x'/r + \ddot{x}/r^2) - 2(\dot{x}/r)'(\dot{y}/r)', \\ L_1^\pm(y) &= 2y''' + (2 \pm \nu)y''/r + 2(\dot{y})'/r^2 - y'/r^2 - 3\ddot{y}/r^3, \\ L_2^\pm(y) &= y'' \pm \nu(y'/r + \ddot{y}/r^2). \end{aligned}$$

Безразмерные величины в (1) связаны с размерными соотношениями:

$$r = \frac{\tilde{r}}{R}, \quad w = \beta \frac{\tilde{w}}{h}, \quad p = \beta^3 \frac{\tilde{p}R^4}{E_{av}h^4}, \quad F = \beta^2 \frac{\tilde{F}}{E_{av}h^3}, \quad \beta^2 = 12(1 - \nu^2),$$

где  $E_{av}$  — среднее значение модуля упругости сферической панели,

$$E_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R E(r)r \, dr d\theta, \quad E(r) = E_0 f(r).$$

На краю  $r = 1$  можно положить наличие упругой связи (пружины), препятствующей свободному смещению точек края в радиальном направлении, при котором радиальное перемещение  $u$  и усилие  $T_r$  взаимосвязаны:

$$w = w' = k_u u + T_r = S = 0. \quad (2)$$

Такое граничное условие наиболее естественным образом описывает поведение решетчатой пластинки в месте ее контакта со склеральной оболочкой глаза. Здесь  $T_r$ ,  $S$  — тангенциальные усилия,  $k_u$  — коэффициент упругости заделки. Отметим, что при  $k_u = 0$  условие (2) соответствует условию скользящей заделки, т. е. защемлению точек края без закрепления в радиальном направлении.

При малых значениях нагрузки система (1), дополненная необходимыми граничными условиями, имеет только симметричное решение. Для определения несимметричной формы потери устойчивости представим решение в виде  $w(r, \theta) = w_0(r) + w_n(r) \cos(n\theta)$ ,  $F(r, \theta) = F_0(r) + F_n(r) \cos(n\theta)$ , где  $w_0(r)$ ,  $F_0(r)$  определяют докритическое симметричное решение, а функции  $w_{ns}(r, \theta) = w_n(r) \cos(n\theta)$ ,  $F_{ns}(r, \theta) = F_n(r) \cos(n\theta)$  описывают поведение пластины сразу после ее перехода в неосесимметричное состояние,  $n$  — число волн в окружном направлении, образовавшихся в результате бифуркации.

Докритическое состояние пластины описывается системой

$$\begin{aligned} g_1 \left( \Theta_0'' + \frac{\Theta_0'}{r} - \frac{\Theta_0}{r^2} \right) + g_1' \left( \Theta_0' + \nu \frac{\Theta_0}{r} \right) &= \frac{Pr}{2} + \frac{\Theta_0 \Phi_0}{r}, \\ g_2 \left( \Phi_0'' + \frac{\Phi_0'}{r} - \frac{\Phi_0}{r^2} \right) + g_2' \left( \Phi_0' - \nu \frac{\Phi_0}{r} \right) &= -\frac{\Theta_0^2}{2r}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\Theta_0 = \Theta_0(r) = w_0'(r)$  и  $\Phi_0 = \Phi_0(r) = F_0'(r)$ .

Граничные условия (2) на внешнем крае пластины необходимо дополнить условиями ограниченности решений в центре  $w' = F' = 0$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Theta_0 = k_u g_2 (\Phi_0' - \nu \Phi_0) + \Phi_0 &= 0 \quad \text{при } r = 1, \\ \Theta_0 = \Phi_0 &= 0 \quad \text{при } r = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки выражений для  $w(r, \theta)$ ,  $F(r, \theta)$  в систему (1) и ее линеаризации относительно малых функций  $w_n(r)$ ,  $F_n(r)$  можно получить разрешающую систему для несимметричных составляющих функций прогиба  $w_n$  и усилий  $F_n$  [23, 24].

Метод решения задачи изложен, например, в работах [21–23]. Сначала для заданного значения нагрузки  $p$  решается симметричная задача. Обозначим через  $p_n$

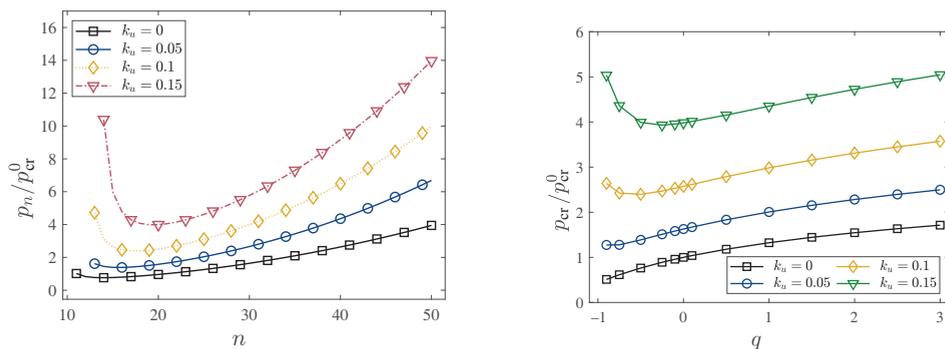


Рис. 3. Зависимость нагрузки  $p_n$  от условий закрепления (слева) и коэффициента неоднородности (справа). Модуль упругости пластины принят  $E(r) = E_0(1 - 0.5r^3)$  (слева) и  $E(r) = 1 + qr^3$  (справа);  $p_{cr}^0$  — критическая нагрузка для однородной круглой пластины при  $k_u = 0$  [24].

нагрузку, при которой для заданного числа волн в окружном направлении существуют отличные от нуля функции  $w_n$ ,  $F_n$ , т. е. существуют решения несимметричной задачи. Тогда критическая нагрузка  $p_{cr} = \min_n p_n$ , т. е. это наименьшее значение нагрузки  $p_n$ , при которой появляются волны в окружном направлении.

В работах авторов настоящей статьи [22–28], как и в работе [21], получено, что при условии скользящей заделки края однородная изотропная круглая пластина переходит в неосесимметричное состояние с образованием 14 волн по краю пластины, при этом безразмерная критическая нагрузка принимает значение  $p_{cr}^0 = 64956$ , а безразмерный прогиб пластины  $w = 46.53$ . При значении коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$  значение прогиба при переходе в неосесимметричное состояние  $\tilde{w} \approx 14h$ .

На рис. 3 приведены зависимости нагрузки  $p_n/p_{cr}^0$  от условий закрепления и от коэффициента неоднородности пластины в предположении, что модуль упругости изменяется по закону  $E(r) = E_0(1 + qr^3)$  [24]. Параметры закона изменения модуля Юнга  $E_0$ ,  $q$  подбирались так, чтобы среднее значение модуля упругости  $E_{av}$  осталось постоянным. При увеличении жесткости заделки  $k_u$  пластина переходит в несимметричное состояние при более высоких значениях нагрузки и с образованием большего числа волн по краю пластины. Так, при жесткости пружины  $k_u = 0.05$  критическая нагрузка возрастает в 1.63 для однородной пластины, при  $k_u = 0.1$  нагрузка возрастает более чем в 2.5 раза, а число волн увеличивается с 14 до 15 при  $k_u = 0.05$  и до 17 при  $k_u = 0.1$ .

Увеличение модуля упругости пластины к краю приводит к повышению значений нагрузки, при которой происходит переход в несимметричное состояние по сравнению с однородной пластиной, но число волн при потере устойчивости не меняется. Уменьшение модуля упругости пластины к краю снижает нагрузку, при которой происходит бифуркация в неосесимметричное состояние, только если сопротивление перемещению точек края в радиальном направлении отсутствует ( $k_u = 0$ ) или достаточно слабое ( $k_u = 0.05$ ). Если закрепление края близко к жесткому заземлению и материал пластины ослаблен к краю, появление складок по краю пластины происходит при нагрузках выше, чем для однородной пластины. При этом уменьшение модуля упругости пластины к краю приводит к увеличению числа волн, образующихся при потере осесимметричной формы равновесия [24]. Аналогичные результаты получены в [23] для случая, если модуль упругости убывает к краю по экспоненциальному закону.

В [28, 29] исследован переход в неосесимметричное состояние неоднородной сферической панели, нагруженной внутренним давлением. Показано, что бифуркация сферической панели в неосесимметричное состояние происходит при большей нагрузке, чем для круглой пластины. При этом с ростом параметра, характеризующего пологость панели, увеличивается волновое число, соответствующее критической нагрузке. С ростом неоднородности критическая нагрузка, при которой осесимметричная форма равновесия теряет устойчивость, может снижаться в 6 раз, а число образовавшихся при переходе в неосесимметричное состояние волн в окружном направлении увеличивается по сравнению с однородной оболочкой.

Задача о потере устойчивости осесимметричного равновесия однородной круглой пластиной исследована также методом конечных элементов с помощью прикладного пакета ANSYS в работе [25, 26]. Принимается, что пластина лежит в плоскости  $z = 0$ , и на границе пластины выполняются условия скользящей заделки или шарнирного опирания. При граничных условиях шарнирного опирания полагалось, что граничные точки при деформировании не могут выходить из плоскости  $z = 0$ , а момент в них равен нулю.

При исследовании устойчивости во всех внутренних узлах пластины случайным образом задавались незначительные несовершенства, заключающиеся в том, что узлы могут выходить из плоскости  $z = 0$ . Эти случайные отклонения узлов от плоскости  $z = 0$  не превышают 0.2% толщины пластины. Далее при линейном росте нагрузки решалась нелинейная задача, допускающая большие деформации пластины, и определились значения давления, при которых наблюдался быстрый локализованный рост прогибов при незначительном увеличении давления, т. е. потеря устойчивости деформирования.

Для случая скользящей заделки получено решение, соответствующее форме потери устойчивости с образованием волн ( $n = 14$ ) по краю пластины (рис. 4). Размерная критическая нагрузка в этом случае равна 3.6 МПа, что соответствует безразмерной нагрузке 63370 и согласуется с численным решением, основанном на аналитическом подходе, описанном выше.

При условии шарнирного опирания потеря устойчивости происходит при нагрузке, превосходящей критическое давление при скользящей заделке более чем в 4 раза. Были получены значения критической нагрузки, при которых появляются

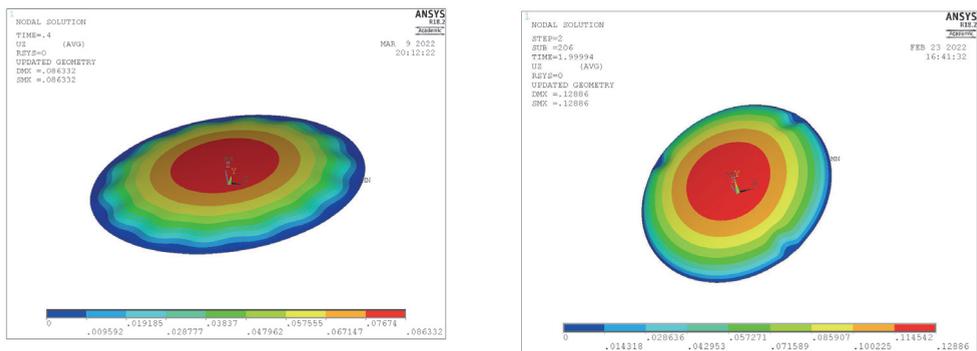


Рис. 4. Потеря осесимметричной формы равновесия круглой пластины со скользящей заделкой ( $n = 14$ ) (слева). Появление трех волн при шарнирном опирании края при размерной нагрузке  $\bar{p} = 16195160$  Па (справа) [26].

ся одна, две и три волны, отличающиеся между собой не более чем на 0.5%. При этом прогиб пластины в центре становится очень большим ( $\dot{w}/R \approx 0.3$ ) и уравнения пологих оболочек дают большую погрешность. Как отмечается в [25, 26], пластина в этом случае становится очень чувствительной к начальным несовершенствам. Также можно заметить, что трудности с получением численного решения на основе аналитического подхода, видимо, связаны с необходимостью более точного описания напряженно-деформированного докритического состояния пластины.

**3. Модели теории аккомодации.** Актуальной проблемой биомеханики глаза является описание механизма аккомодации. Аккомодация — это приспособление глаза к ясному видению предметов, находящихся на различных расстояниях. Достигается аккомодация в основном изменением кривизны (геометрической формы) хрусталика глаза (мягкой оболочкой, которую в первом приближении можно считать заполненной несжимаемой жидкостью).

До сих пор появляются новые теории, часто противоречащие классической теории аккомодации Гельмгольца, согласно которой в процессе участвуют только хрусталик и ресничная мышца. При сокращении мышцы происходит увеличение кривизны хрусталика (рис. 5). Однако в настоящее время известно, что в процессе аккомодации в небольшой степени участвуют и склера, и стекловидное тело, и наружные мышцы глаза [30].

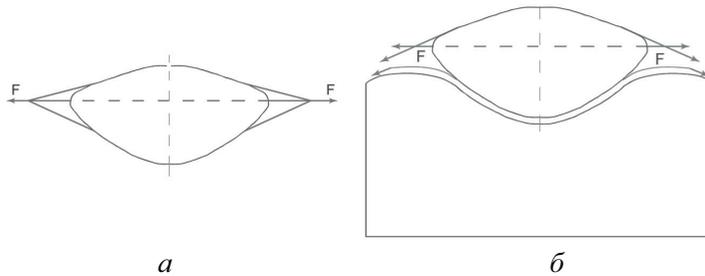


Рис. 5. Теоретические модели аккомодации.

Совместно с механиками из Королевского технического университета (г. Стокгольм) был сделан ряд работ, моделирующих процесс аккомодации методом конечных элементов в пакете ABAQUS с учетом новых данных [31, 32]. Выполненные работы подтвердили основные выводы теории Гельмгольца и опровергли возникшие в конце XX в. теории аккомодации Шахара и Фукусаку [30].

**4. Математические модели тонометрии.** Известно, что первый простой прибор для измерения внутриглазного давления создал А. Н. Маклаков в 1884 г. В тонометре Маклакова использовались грузы с плоским основанием весом 5 или 10 г. При этом глаз деформируется, и образуется «кружок сплющивания или аппланации». Измерение ВГД производится по величине деформации при одинаковой силе давления на глаз. В 1954 г. Г. Гольдман предложил тонометр, который стал международным стандартом. При измерении ВГД, по Гольдману, создается небольшая зона контакта (диаметр зоны сплющивания составлял 3.06 мм), и о величине ВГД судят по силе, которая требуется, чтобы сделать плоской эту часть роговицы. При такой малой зоне контакта предполагалось, что влияние сил упругости роговицы

очень мало, и тогда можно считать, что сила, вызывающая сплющивание роговицы, деленная на площадь контакта, будет равна давлению внутри мягкой оболочки. Диаметр апланации 3.06 мм был выбран, потому что он обеспечивает соотношение, когда внешнее давление на роговицу в 1.0 г соответствует внутриглазному давлению в 10 мм рт. ст. Надо подчеркнуть, что калибровка всех тонометров была основана на экспериментальных данных, т. е. на «средних» показателях. Предполагалось, что диаметр глазного яблока человека варьируется в очень малых пределах и в среднем равен 24 мм. Толщина роговицы переменна, но в центральной зоне минимальна и также варьируется в малых пределах и в среднем равна 0.52 мм. Однако в конце XX в. появились приборы, которые позволили при обследовании пациента точнее определить геометрические параметры роговицы, и, как следствие, появилось много работ, обсуждающих чувствительность показателей тонометра Гольдмана, считавшегося одним из самых точных тонометров, к толщине роговицы в центральной зоне. Кроме того, в конце прошлого столетия для коррекции миопии стали широко применять рефракционные операции, заключающиеся в удалении определенного слоя именно в центре роговицы глаза, для того чтобы сделать ее более полой. В работах офтальмологов представлены результаты определения уровня внутриглазного давления с использованием различных методик измерения после различных рефракционных операций и отмечены значительные расхождения значений ВГД, полученных различными тонометрами на одном и том же глазу (до 12 мм рт. ст.). В связи с этим стала актуальной задача о математическом моделировании тонометрии.

Еще в 1928 г. известный офтальмолог С. Ю. Кальфа [33] отмечал: «Если мы обратимся к методике исследования ВГД, то мы должны признать, что наши тонометрические определения не столько дают нам заключение о внутриглазном давлении, сколько о реакции глазных оболочек на приложение к глазу тонометра».

Известно, что роговица глаза близка к мягкой оболочке (т. е. к оболочке, не сопротивляющейся изгибу), модули упругости и склеры и роговицы в тангенциальном направлении на два порядка больше модуля упругости в направлении толщины оболочки [1]. При измерении ВГД апланационными методами различают тонометрическое давление:  $p_t = P/S$  ( $P$  — вес прилагаемого груза,  $S$  — площадь зоны контакта) и истинное давление  $p_0$ , т. е. давление до нагружения тонометром.

Первые модели апланационной тонометрии представлены в работах [34, 35]. Глаз рассматривался как две сопряженные оболочки с разными свойствами — роговица и склера (рис. 6).

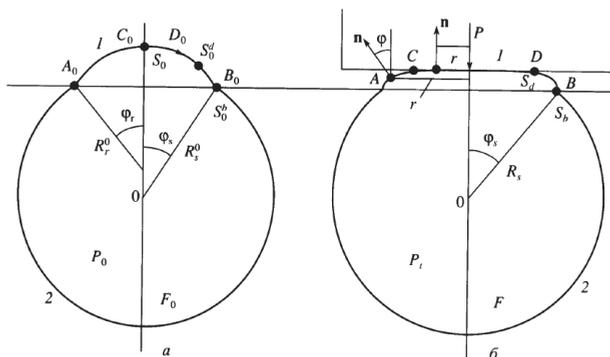


Рис. 6. Модель двух сопряженных сферических сегментов [35].

Предполагалось, что склера и роговица имеют форму сферических сегментов разного радиуса. Проводился анализ влияния упругих и геометрических свойств склеры и роговицы на изменение давления в глазу при его нагружении. Считалось, что глаз до нагружения заполнен несжимаемой жидкостью с давлением  $p_0$ , линия действия приложенной к оболочке внешней силы (веса груза) проходит через центры обоих сферических сегментов и что в результате действия груза склера деформируется так, что угол  $\varphi_s$ , под которым из центра склеры видна линия контакта, остается неизменным, а сферический сегмент, моделирующий склеру, остается сферическим сегментом, но с измененным радиусом —  $R_s$ . Деформация роговицы описывалась нелинейными уравнениями. Полагалось, что уменьшение объема  $\Delta V$  под сегментом  $ACDB$  (рис. 6) в результате действия груза:

$$\Delta V = \pi \int_0^{s_b} (r_0^2 \sin \varphi_0 - r^2 \lambda_1 \sin \varphi) ds_0$$

компенсируется растяжением склеры:

$$\Delta V = \Lambda(p - p_0), \quad \Lambda = \frac{3(1 - \nu_s)R_s^0}{2E_s h_s} V_s.$$

Переменная  $s_0$  — длина дуги образующей оболочки в ненагруженном состоянии, отсчитываемая от оси симметрии;  $r' = \lambda_1$ ;  $r, \varphi$  — расстояние до оси симметрии и угол между нормалью к оболочке и осью симметрии;  $\Lambda$  — податливость оболочки при повышении давления. Результаты расчетов показали, что на истинное значение ВГД оказывают влияние параметры не только роговицы, но и склеры.

Известно, что у людей с миопией (близорукостью) и гиперметропией (дальнозоркостью) часто глаз имеет форму эллипсоида, полуоси которого могут существенно отличаться. Причем у людей с миопией длина «передне-задней оси» и объем глаза больше, чем у людей с нормальной рефракцией и у людей с гиперметропией. В связи с этим в работе [36], продолжая исследования [35], также обсуждалась математическая модель измерения ВГД по методу Маклакова, но роговица и склера моделировались сегментом эллипсоидальной оболочки.

Как уже отмечалось, при аппланационной тонометрии измерение ВГД может производиться по величине деформации при заданном грузе (по методу Маклакова) или по величине давления на глаз при одной и той же зоне контакта (по методу Гольдмана). С точки зрения математики это прямая и обратная задачи при одной и той же механической модели. Описанная выше и подробно представленная в работах [34–36] модель сопряженных оболочек может быть использована и для описания тонометра Гольдмана.

В настоящее время во многих работах (например, [37]) обсуждается чувствительность показателей тонометра Гольдмана к толщине роговицы в центральной зоне. С учетом данных [37] в работе [38] проведен сравнительный анализ показателей ВГД, полученных на одних и тех же глазах разными методами. Результаты показали, что значения ВГД, полученные методом Маклакова, существенно менее чувствительны к значению толщины роговицы, чем данные, полученные тонометром Гольдмана.

В работе [39] построены модели аппланационной тонометрии (тонометр Маклакова и Гольдмана) с учетом многослойности роговицы. Сравнение результатов, полученных при моделировании аппланационных методов тонометрии для многослойной роговицы, с результатами, полученными тем же методом для однородной

роговицы, но с осредненными значениями упругих параметров составляющих ее слоев, показало, что зона контакта в первом случае больше, а следовательно, величина истинного внутриглазного давления меньше.

В работе ряда офтальмологов отмечается, что тонометр Маклакова является менее чувствительным к толщине, но если роговица является «слишком плоской», т. е. радиус кривизны становится достаточно большой, то тонометр Маклакова может давать заниженные показатели ВГД. В работе [40] рассматривалась задача о напряженно-деформированном состоянии и потере устойчивости трансверсально-изотропного сегмента переменной толщины, находящегося под действием внутреннего давления и груза с плоским основанием. Результаты расчетов при параметрах, близких к параметрам роговицы, показали, что при больших радиусах кривизны роговицы возможно нарушение контакта груза и оболочки в центре зоны контакта и, таким образом, увеличение внешнего радиуса контакта, что и приводит к заниженным показателям ВГД.

**5. Математические модели лазерной коррекции миопии.** В настоящее время лазерная кераторефракционная хирургия считается одним из самых популярных видов операций по коррекции различных аномалий рефракции. С 2007 г. появилась новая технология «безлоскутной» хирургии роговицы, а именно технология рефракционной экстракции лентикулы через малый надрез (SMILE), которая заняла значительную нишу в современных кераторефракционных операциях.

В последних исследованиях широко обсуждаются потенциальные биомеханические преимущества технологии операции SMILE по сравнению с операциями ЛАСИК и ФРК из-за отсутствия лоскута. В работе [41] выполняется построение и сравнение трех различных математических моделей, описывающих операции лазерной коррекции зрения: SMILE, лазерный кератомилез (ЛАСИК) и фоторефракционная кератэктомия (ФРК). Оценивается изменение напряженно-деформированного состояния роговицы после хирургической коррекции миопии.

Суть технологии ЛАСИК — выкраивание поверхностного лоскута роговицы с помощью фемтосекундного лазера и обработке стромы роговицы излучением эксимерного лазера, что называется абляцией роговицы. В случае формирования роговичного лоскута с помощью фемтосекундного лазера процедура называется Фемто-ЛАСИК. Перед операцией передние слои роговицы (лоскут) приподнимаются, после абляции поверхностный лоскут возвращается на место. В результате такого воздействия в роговице появляется дополнительный слой (лоскут — flap).

Процедура SMILE — это технология рефракционной экстракции лентикулы, при которой не выкраивается поверхностный лоскут роговицы, а формируется роговичный карман. Операция полностью выполняется фемтосекундным лазером внутри роговицы, не затрагивая ее поверхностные слои. В данной модели диаметр и толщина роговичного кармана принимаются равными размерам роговичного лоскута при ЛАСИК, но при этом отсутствует срез в направлении толщины.

Фоторефракционная кератэктомия (ФРК) — технология, при которой не вырезается поверхностный лоскут роговицы и не формируется роговичный карман, роговица снаружи обрабатывается излучением эксимерного лазера после удаления верхнего слоя — эпителия роговицы, так как устойчивый рефракционный эффект достигается только при изменении геометрии стромы (основного слоя роговицы).

На рис. 7 представлена конечно-элементная модель глазного яблока и основные параметры операций. В предложенных моделях диаметр лентикулы при операции

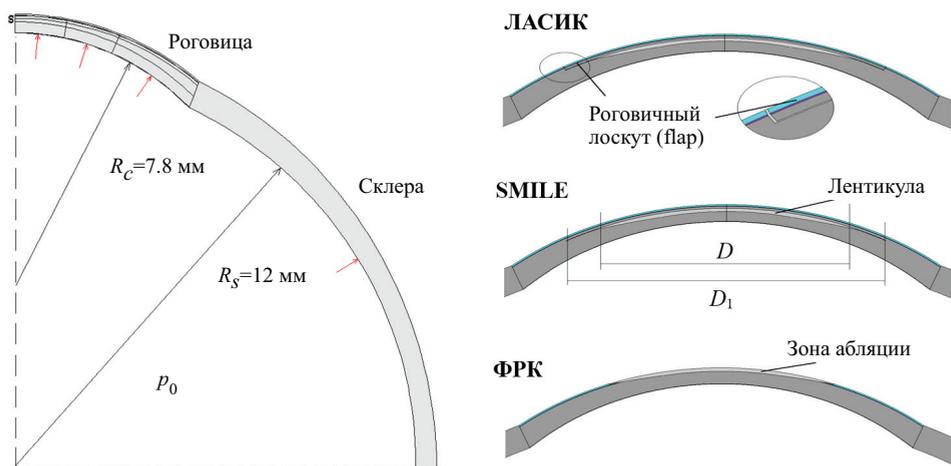


Рис. 7. Модель сопряженных оболочек переменной толщины (слева) и параметры операций ЛАСИК, SMILE, ФРК (справа).

SMILE и диаметр абляции при операциях ЛАСИК и ФРК являются сравнимыми параметрами, которые обуславливают рефракционный эффект лазерной коррекции зрения. Толщина лентикулы при операции SMILE и максимальная толщина (глубина) абляции роговицы при операциях ЛАСИК и ФРК также являются сравнимыми параметрами. В расчетах принимались следующие значения: диаметр лентикулы при SMILE или зоны абляции при ЛАСИК и ФРК составляет 6.5 мм, толщина лентикулы при SMILE или максимальная толщина (глубина) абляции при ЛАСИК или ФРК 100 микрон, толщина крышки при SMILE или роговичного лоскута при ЛАСИК 120 микрон, диаметр крышки при SMILE или роговичного лоскута при ЛАСИК 7.9 мм. Слой, который представляет собой лентикулу, зону абляции или разрез роговицы, моделируется одним материалом с одинаковыми упругими характеристиками.

Численные результаты показали, что при одинаковых параметрах напряжения в роговице, а также перемещения центральной части роговицы наибольшие в модели ЛАСИК, затем в модели SMILE и наименьшие при ФРК. При этом склера оказывает существенное влияние на напряженно-деформированное состояние составной оболочки. Проведение операции в более глубоких внутренних слоях стромы, что характерно для SMILE, приводит к большим смещениям центральной части роговицы, т. е. позволяет корректировать большие ошибки рефракции. При равных значениях напряжений SMILE позволяет удалять больший слой роговичной ткани, чем ЛАСИК и сильнее изменять геометрию роговицы. Учет многослойной структуры роговицы показал, что наибольшие напряжения возникают в боуеновой и десцеметовой оболочках. В моделях ЛАСИК и ФРК боуенова оболочка или срезается, или подвергается воздействию лазера, в то время как при SMILE данная оболочка сохраняется целой. SMILE и ФРК можно рассматривать эквивалентными с точки зрения биомеханической стабильности. Преимуществом операции SMILE является возможность коррекции больших ошибок рефракции по сравнению с ФРК при одинаковых входных данных операций.

**6. Коррекция миопии методом имплантации кольца MyoRing.** Лазерная коррекция зрения обеспечивает эффективную коррекцию миопии. Однако при высоких степенях миопии, в том числе при тонкой роговице, лазерная коррекция нецелесообразна, так как помимо остаточной миопии высок риск развития послеоперационных осложнений [42]. В 2007 г. Дахер (A. Daxer) предложил метод интрастромальной имплантации MyoRing как альтернативный метод коррекции миопии высокой степени при тонкой роговице. В связи с этим рассматривалась математическая модель, описывающая изменение напряженно-деформированного состояния глаза после имплантации кольца MyoRing. Двумерное осесимметричное моделирование выполнялось в программном пакете ANSYS. Корнеосклеральная оболочка глаза моделировалась соединенными сферическими сегментами переменной толщины с разным радиусом и разными упругими свойствами при нормальном внутриглазном давлении 15 мм рт. ст. Согласно методике кольцо имплантируют в роговичный карман диаметром 9 мм, сформированный фемтосекундным лазером, на глубину 80 % от исходной толщины роговицы. В результате данного вида коррекции происходит изменение начального профиля роговицы.

Процесс имплантации кольца моделировался тремя контактными парами «поверхность — поверхность». Моделирование роговичного кармана выполнялось за счет разделения роговицы на два отдельных слоя (рис. 8). Первая пара контактов описывает контакт между слоями роговицы в результате формирования кармана. Вторая и третья пары задавали взаимодействие соответственно между нижним слоем роговицы и нижней поверхностью кольца, верхним слоем роговицы и верхней поверхностью кольца. Далее решалась нелинейная задача при больших деформациях. В контактных парах с кольцом задавался начальный геометрический зазор (gap), который на каждом шаге решения постепенно уменьшался до тех пор, пока кольцо полностью не устанавливалось в область кармана.

На рис. 9 представлены результаты расчетов для кольца высотой 0.28 мм и жесткостью  $E = 1800$  МПа. Упругие параметры материалов глаза принимались следующие: средние значения для модуля упругости роговицы  $E_c = 0.3$  МПа и склеры

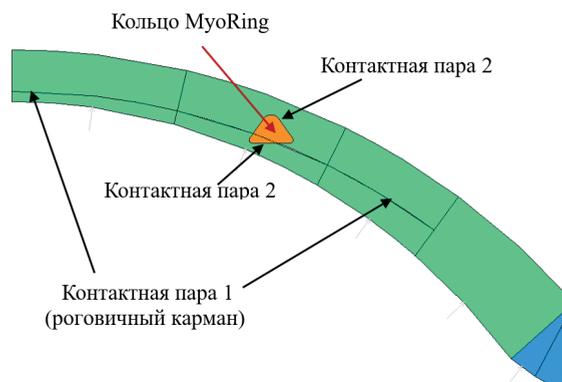


Рис. 8. Контактное взаимодействие между слоями: контактная пара 1 — между внутренними слоями роговицы (в результате формирования роговичного кармана); контактная пара 2 — между нижним слоем роговицы и нижней поверхностью кольца; контактная пара 3 — между верхним слоем роговицы и верхней поверхностью кольца.

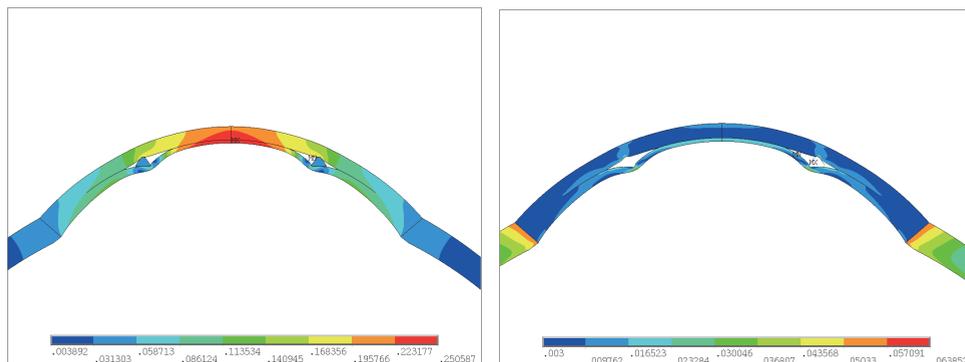


Рис. 9. Напряженно-деформированное состояние оболочек глазного яблока, находящееся под действием внутриглазного давления 15 мм рт. ст. Деформации (слева) и напряжения по Мизесу (справа) в результате имплантации кольца высотой 0.28 мм.

$E_s = 10$  МПа, модули упругости роговицы и склеры в нормальном направлении полагались в 20 раз меньше, чем на поверхности изотропии.

Получены изменения радиусов кривизны роговицы, вычисляемые по перемещению апекса роговицы после деформации в ответ на приложение давления 15 мм рт. ст., после установки колец высотой 0.2 мм, 0.4 мм.

Численное моделирование позволило получить профиль роговицы после коррекции кольцом MyoRing, соответствующий клиническим данным. Картина напряженно-деформированного состояния оболочек для колец разной высоты показывает, что установка колец большей высоты сильнее влияет на изменение профиля роговицы, соответственно позволяет исправлять большие рефракционные ошибки.

**7. Изменение ВГД после инъекций.** Одним из современных способов лечения некоторых глазных заболеваний являются инъекции — введение небольшой (до 0.2 мл) дозы лечебного средства в стекловидное тело. За счет кратковременного увеличения внутреннего объема глазного яблока в первый момент после инъекции происходит резкое увеличение ВГД. Даже кратковременное увеличение ВГД выше определенного уровня может привести к нарушению кровообращения в сетчатке и в диске зрительного нерва, поэтому важно в каждом конкретном случае оценить возможный уровень изменения ВГД и риск для пациента, а также, возможно, на основе этих данных рекомендовать уменьшенную дозу препарата для определенных больных. С точки зрения механики — это задача определения изменения внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема жидкости. В работах [43, 44] в рамках трехмерной теории упругости построено решение задачи Ламе о прогибе трансверсально-изотропного сферического слоя с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним радиусом  $R_2$  под действием внутреннего давления  $p$ . В этом случае уравнение равновесия трансверсально-изотропной оболочки имеет вид

$$\frac{d^2 u_\rho}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{du_\rho}{d\rho} + \frac{2E(\nu' - 1)}{E'(1 - \nu)} \frac{u_\rho}{\rho^2} = 0.$$

Здесь  $E$ ,  $E'$  — соответственно модули Юнга в поверхности изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней;  $\nu$  и  $\nu'$  — коэффициенты Пуассона. Решение этого

уравнения имеет вид

$$u_\rho = \frac{C_1}{\rho^{m+1}} + C_2 u_\rho^m, \quad m = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4b}}{2}; \quad b = \frac{2E(\nu' - 1)}{E'(1 - \nu)}.$$

Отметим, что в изотропном случае  $m = 1$ , так как  $E = E'$ ,  $\nu' = \nu$  и  $b = 2$ , а решение совпадает с известным классическим. Константы  $C_i$  определяются из условий на поверхности сферы. На основе полученного решения определено изменение внутреннего давления в оболочке. Модуль упругости склеры в направлении ее толщины существенно меньше модуля упругости в тангенциальном направлении, для такой оболочки расчеты по различным теориям оболочек, полагающим толщину оболочки неизменной, могут привести к результатам, которые не согласуются с клиническими данными. Построенная модель позволяет для глаз, имеющих форму, близкую к сферической, адекватно оценить изменение ВГД при введении в склеральную оболочку глаза небольшой дозы препарата. Полученное аналитическое решение позволяет по соотношению для нормального перемещения получить изменение толщины слоя склеры под действием давления  $p$ :

$$\Delta h = u_\rho(R_2, p) - u_\rho(R_1, p).$$

Изменение толщины склеральной оболочки при увеличении ВГД, как один из результатов представленного моделирования, согласуется с имеющимися клиническими данными [43], а также с данными о том, что при глаукоме, заболевании, сопровождающемся, как правило, повышенным уровнем ВГД, также наблюдается уменьшение толщины склеры.

Решение более общей задачи об изменении внутреннего давления при изменении внутреннего объема оболочки эллипсоидальной формы позволит оценивать ВГД после инъекций в дальновзорких и близоруких глазах. Известно, что зависимость объем — давление очень чувствительна к начальной форме. На рис. 10, а представлено относительное изменение объема изотропных эллипсоидальных оболочек, имеющих первоначально одинаковый объем, но разные отношения вертикального и горизонтального диаметра оболочки  $k$  при нагружении внутриглазным давлением 45 мм рт. ст. (Расчеты проведены при  $R_0 = 12$  мм,  $E = 14.3$  МПа,  $h = 0.5$  мм.) [44]. На рис. 10, б для тех же оболочек представлено изменение давления при изменении объема на 0.1 мл (объем введенного препарата). Видно, что форма оболочки

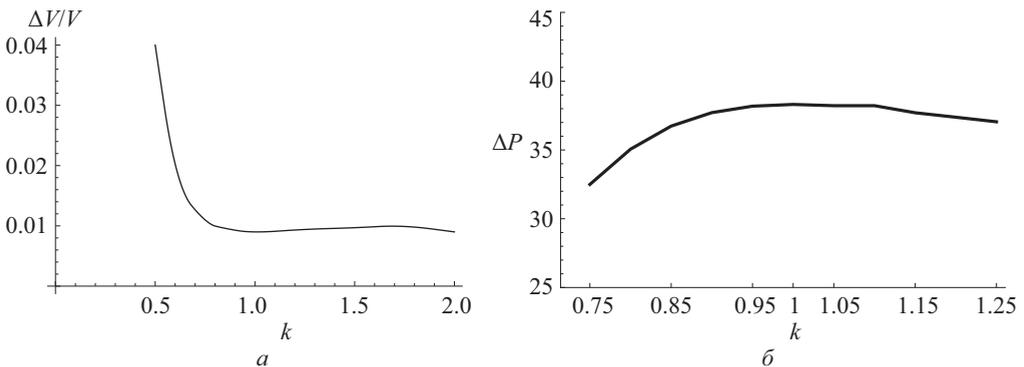


Рис. 10. Абсолютное (а) и относительное (б) изменение давлений [45].

существенно влияет на отношение  $\Delta P/\Delta V$ . Максимальное значение это отношение принимает для сферической оболочки.

Биологические оболочки иногда обладают достаточно большим отношением толщины к радиусу и, кроме того, часто обладают большой податливостью на межслоевой сдвиг, поэтому исследование напряженно-деформированного состояния таких оболочек требует более точного подхода, чем в рамках классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа — Лява. В работе [45] задачи о деформации сферической и цилиндрической трансверсально-изотропных оболочек, находящихся под действием нормального давления, решаются с использованием трехмерной теории упругости, а также неклассических теорий оболочек Родионовой — Титаева — Черныха [16] и Палия — Спиро [15]. Решение такой задачи для цилиндрических оболочек может помочь при описании деформации кровеносных сосудов. Сравнение точного решения, полученного в рамках трехмерной теории упругости, с решениями на основе теории анизотропных оболочек позволяет оценить, насколько точно теории оболочек могут описывать решение задачи и насколько они применимы для оболочек более сложной формы.

Рассмотрим сначала трансверсально-изотропный сферический слой. Будем считать, что слой является тонким, т. е. относительная толщина оболочки  $\alpha = h/R$  является малой величиной. Здесь  $h = R_2 - R_1$  — толщина слоя (оболочки),  $R = (R_1 + R_2)/2$  — радиус срединной поверхности слоя. Тогда по классической теории оболочек прогиб сферической оболочки под действием внутреннего давления имеет вид

$$u^{kl} = p \frac{(1 - \nu)R^2}{2Eh}.$$

(как и раньше,  $E$  — тангенциальный модуль упругости в поверхности изотропии). Для трансверсально-изотропного слоя первые два члена асимптотического разложения функции прогиба срединной поверхности, полученной по трехмерной теории [45], в безразмерном виде дадут соотношение

$$u^{3D}/u^{kl} = 1 - \alpha(1 - \nu^*) - \alpha^2 \frac{3\nu' - \nu^* - 11\nu^*\nu'}{12\nu'}.$$

Здесь

$$\nu^* = \frac{E}{E'} \frac{\nu'}{1 - \nu} \quad E^* = \frac{E'}{1 - 2\nu'\nu^*},$$

$E'$  — модуль Юнга при растяжении — сжатии в направлении, перпендикулярном плоскости изотропии.

Нормальные напряжения в срединной поверхности слоя

$$\sigma_{zz}^{3D}/p = -\frac{1}{2} \left( 1 - \alpha - \frac{\alpha^2}{4} \left( \frac{E}{E'} \frac{1 - \nu'}{1 - \nu} - 1 \right) \right).$$

Уточненная теория анизотропных пластин и оболочек, представленная в монографии В. А. Родионовой, Б. Ф. Титаева, К. Ф. Черныха [16], позволяет при построении модели деформации анизотропных оболочек, учитывать не только поперечные сдвиги, поперечные нормальные напряжения, повороты волокон, но и изменения их длины в процессе деформации.

Безразмерные соотношения для нормального прогиба и нормальных напряжений, полученные по итерационной теории РТЧ, имеют вид

$$u^{RTCh}/u^{kl} = 1 - \alpha(1 - \nu^*) - \frac{\alpha^2}{12} \left( 3 - 12\nu^* - 2(\nu^*)^2 - \frac{6E}{5(1 - \nu)E^*} \right),$$

$$\sigma_{zz}^{RTCh}/p = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{3}{8}\alpha^2 \right).$$

Безразмерные соотношения для нормального прогиба и нормальных напряжений, полученные по теории оболочек средней толщины Палия – Спиро, имеют вид [15]

$$u^P/u^{kl} = 1 - \alpha(1 - \nu^*), \quad \sigma_{zz}^P/p = -\frac{1}{2} \left( 1 - \alpha + \frac{\alpha^2}{4} \right).$$

Таким образом, обе теории оболочек, учитывающие изменение толщины оболочки при деформации, позволяют построить для прогиба первые два члена асимптотического разложения точного решения при малых значениях  $\alpha = h/R$ .

Для цилиндрической трансверсально-изотропной оболочки, находящейся под действием внутреннего давления, можно получить следующие разложения по параметру  $\alpha = h/R$  для функции прогиба срединной поверхности  $u_c^{3D}$  и нормальных напряжений в срединной поверхности слоя  $\sigma_{c,zz}^{3D}$  [45]:

$$u_c^{3D}/u_c^{kl} = 1 - \frac{\alpha}{2}(1 - \nu^*) - \frac{\alpha^2}{12} \left( 1 + \frac{9}{2}\nu^* + \frac{E_{11}}{2E_{33}} \right),$$

$$\sigma_{zz(c)}^{3D}/p = -\frac{1}{2} \left( 1 - \alpha\frac{3}{4} - \frac{\alpha^2}{8} \left( \frac{E_{11}}{E_{33}} - 1 \right) \right),$$

где  $u_c^{kl}$  – прогиб цилиндрической оболочки, полученный в рамках классической теории оболочек,

$$u_c^{kl} = p \frac{(1 - \nu^2)R^2}{2Eh}.$$

Уточненная теория Родионовой – Титаева – Черныха [16] позволяет найти следующие соотношения для напряжений и нормального прогиба срединной поверхности:

$$\bar{u}_c^{RTCh}/u_c^{kl} = 1 - \alpha(1 - \nu^*) - \alpha^2 \left( \frac{E_{11}}{20E_{33}} - \frac{\nu^*}{4} - \frac{11\nu^{*2}}{120} \right) + \alpha^3 \dots,$$

$$\sigma_{zz(c)}^{RTCh}/p = -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3\alpha}{8} \right).$$

Многоточие означает, что данная теория при разложении по  $\alpha$  дает члены и более высокого порядка, которые здесь из-за громоздкости не приводятся.

По теории Палия – Спиро [15] для цилиндрической оболочки получаем

$$\sigma_{zz(c)}^P/p = -\frac{1}{2} \left( 1 - \alpha \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} + \frac{\alpha^2}{4} \right),$$

$$\bar{u}_c^P/u_c^{kl} = 1 - \frac{\alpha}{2}(1 - \nu^*).$$

Сравнение формул для сферы и цилиндра показывает, что обе теории оболочек позволяют построить для прогиба первые два члена асимптотического разложения точного решения при малых значениях  $h/R$ . Первые два члена соотношений, описывающих нормальные (также и тангенциальные) напряжения в сферической оболочке, полученные по теории Палия — Спино, также совпадают с точным решением. Результаты, получающиеся для нормальных напряжений по теории Родионовой — Титаева — Черныха, отличаются от точного решения уже во втором члене. Таким образом, в данной задаче для оценки напряжений более точные результаты получаются по теории Палия — Спино. Можно отметить также, что теория Палия — Спино является более простой, чем теория Родионовой — Титаева — Черныха.

**8. Моделирование глазного яблока с учетом двух камер.** В строении глаза выделяют две камеры: переднюю и заднюю (рис. 11). Передняя камера — это пространство глаза, ограниченное с одной стороны роговицей, с другой — радужкой. Задняя камера занимает небольшое пространство между радужной оболочкой и хрусталиком. Передняя и задняя камеры заполнены водянистой влагой, которая представляет собой прозрачную водянистую жидкость. Остальное внутреннее пространство глаза за хрусталиком заполнено стекловидным телом — желеобразным прозрачным веществом. В норме камеры имеют постоянный объем, регулирование которого происходит посредством образования и оттока внутриглазной жидкости. Измерение внутриглазного давления проводится через роговицу, а лекарственные вещества вводятся, как уже отмечалось, в стекловидное тело. В обычном состоянии предполагается, что давление и в стекловидном теле, и в передней камере глаза одинаковое. А. П. Нестеров в [46] предложил рассматривать глаз как гидростатическую систему, состоящую из нескольких закрытых камер и полуоткрытых полостей, отделенных друг от друга эластичными мембранами (рис. 11). Каждая полость имеет свой уровень давления, который несколько отличается от давления в других частях глаза. Как отмечается в [46], разность давлений в разных отделах глаза (исключая кровеносные сосуды) невелика, и практически ею можно пренебречь.

Гидростатическое равновесие между полостями глаза поддерживается благодаря существованию прямых связей между ними и эластичности внутриглазных диафрагм. К последним относятся все оболочки и мембраны, которые разделяют полости с различным уровнем давления [46]. Согласно процедуре проведения интравитреальной инъекции лекарство вводится в стекловидное тело в 3.5–4 мм от

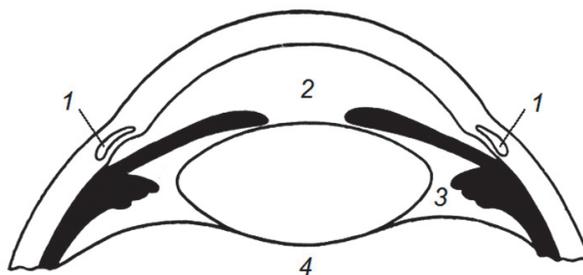


Рис. 11. Гидростатическая система глаза по [46].

1 — слезов канал, 2 — передняя камера, 3 — задняя камера, 4 — стекловидное тело.

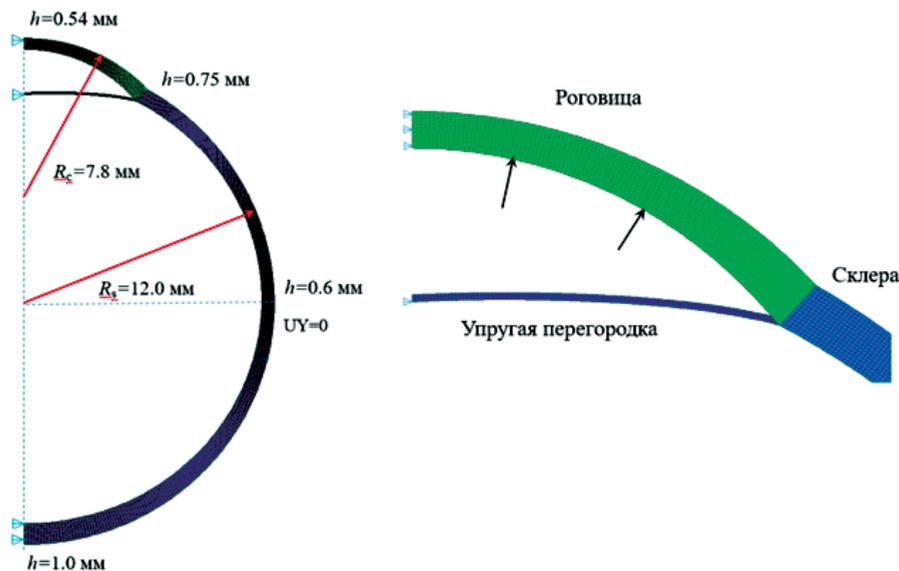


Рис. 12. Конечно-элементное моделирование корнеосклеральной оболочки глаза, заполненной несжимаемой жидкостью.

лимба [47]. Введение дополнительного объема в стекловидное тело приводит к увеличению давления в склеральном пространстве глаза и, как следствие, в передней и задней камере глаза.

При интравитреальной инъекции (ИВИ) разность давлений в передней камере и в стекловидном теле может увеличиваться.

В работе [48] представлены две конечно-элементные модели глаза, позволяющие оценить приращение ВГД после интравитреальной инъекции. В первой модели глазное яблоко моделировалось как составная оболочка с одним однородным внутренним объемом, во второй — была добавлена упругая перегородка, разделяющая внутренний объем на переднюю и витреальную полость. Результаты моделирования сравнивались с оболочечной моделью [45].

В предложенных моделях наружная поверхность роговицы представлена сферическим сегментом радиуса  $R_s = 7.8$  мм [49]. Толщина роговицы в ее центральной части равна среднему нормальному значению  $h_{AP} = 0.54$  мм и линейно увеличивается вдоль меридионального направления, в области лимба, где роговица соединяется со склерой, ее толщина составляет  $h_L = 0.75$  мм. Склера представлена сферическим сегментом с внешним радиусом  $R_s = 12$  мм. Толщина склеры вблизи экватора равна  $h_E = 0.6$  мм, в области заднего полюса —  $h_{PP} = 1$  мм (рис. 12). Ткани роговицы и склеры рассматривались как трансверсально-изотропный материал с главными осями в меридиональном и окружном направлениях.

В более простой модели не учитывалось наличие дополнительных компонент внутри глаза, и составная оболочка рассматривалась как полость, заполненная несжимаемой жидкостью с некоторым давлением  $p$ . Первоначально на внутренней поверхности оболочки задавалось физиологическое давление ( $p = 15$  мм рт. ст.), а затем давление увеличивалось так, чтобы внутренний объем моделируемого глазного яблока увеличился на объем вводимого лекарства при ИВИ.

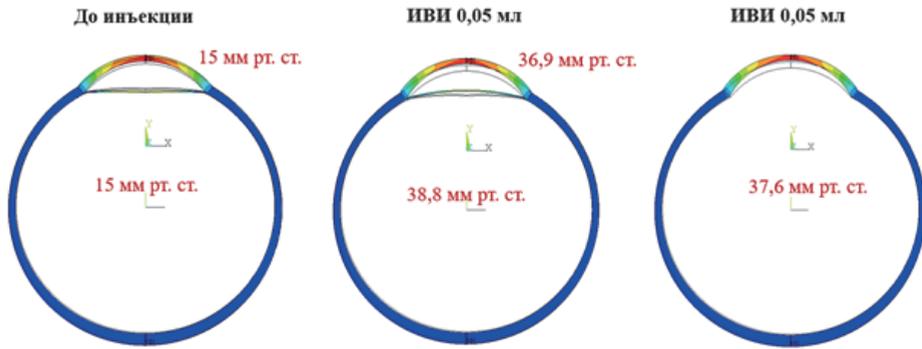


Рис. 13. Деформация наружной оболочки глаза до (слева) и после введения 0.05 мл препарата для модели с упругой перегородкой (в центре) и модели без перегородки (справа).

Во второй модели учитывалось наличие упругой перегородки, разделяющей внутреннее пространство глаза на две части (рис. 12). Данный подход позволяет по-разному оценивать приращения склерального  $V_s$  и подроговичного  $V_c$  объемов. На первом этапе к каждой закрытой камере прикладывается внутреннее давление 15 мм рт. ст. и фиксируется начальный объем. На следующем этапе давление в склеральном пространстве увеличивается на величину, необходимую для изменения начального объема склеры на объем вводимого лекарства. Предполагается, что внутренний объем в передней роговичной камере остается постоянным  $V_c = \text{const}$ , поэтому на третьем этапе подбирается давление в этой камере.

На рис. 13 показаны профили наружной оболочки глаза до и в результате ИВИ. После введения лечебного препарата в полости глаза внутреннее давление повысилось с 15 до 38.8 мм рт. ст. в склеральном пространстве и до 36.9 мм рт. ст. в подроговичном пространстве. Для модели без перегородки давление повышается до 37.6 мм рт. ст., что примерно соответствует среднему значению повышения давления по сравнению с моделью, содержащей упругую перегородку. Таким образом, рассмотрение перегородки позволяет более точно оценить изменение давления в разных камерах глазного яблока.

Для склеры с меньшим значением модуля Юнга ( $E_s = 7.0$  МПа,  $E'_s = E_s/40$ ) внутреннее давление увеличивается до 30 мм рт. ст. для склеральной камеры и до 29.0 мм рт. ст. для подроговичной камеры. Для модели с однородным внутренним пространством давление повышается до 29.2 мм рт. ст. Численное моделирование показывает, что упругие свойства склеры существенно влияют на оценку повышенного ВГД после интравитреальной инъекции.

В результате численного анализа получено, что деформации глазного яблока, вызванные давлением (в результате глаукомы или после внутриглазных инъекций), зависят главным образом от растяжимости склеры. Чтобы понять, можно ли пренебрегать роговицей при аналитическом моделировании для рассмотренных моделей, были проведены расчеты по теории Палия — Спиро (ПС), учитывающей влияние поперечного сдвига, деформирование в направлении нормали к срединной поверхности и изменение толщины оболочки. Нормальный прогиб срединной поверхности

сферической оболочки с внутренним радиусом  $R_1$  и внешним радиусом  $R_2$  рассчитывался по следующей формуле [45]:

$$u^{PS} = \frac{w}{R} = \frac{1 - \nu}{2E} \frac{p_1 - p_2}{\alpha} \left( 1 - \alpha(1 - \nu^*) \frac{p_1 + p_2}{p_1 - p_2} \right),$$

где  $w$  — перемещения срединной поверхности оболочки;  $\alpha = h/R$  — относительная толщина оболочки;  $h = R_2 - R_1$  и  $R = (R_2 + R_1)/2$  — толщина и радиус срединной поверхности оболочки;  $E$  и  $E'$  — модули Юнга на поверхности изотропии и в нормальном направлении;  $\nu$  и  $\nu'$  соответствующие коэффициенты Пуассона, а  $\nu^* = E\nu'/E'(1 - \nu)$ ;  $p_1$  и  $p_2$  — нормальное давление, приложенное к внутренней и внешней поверхностям оболочки.

В таблице приведены значения давления внутри оболочки глаза после инъекции, полученные в результате конечно-элементного моделирования с однородной внутренней полостью в рамках теории Паляя — Спиро (ПС). Для модели по теории ПС рассматривалась оболочка с равномерной толщиной  $h = 0.6$  мм. Проведено сравнение результатов моделирования для разных параметров упругих переменных склеры и роговицы. Для слабой роговицы ( $E_c = 0.3$  МПа,  $E'_c = E_c/20$  МПа) и очень жесткой склеры ( $E_s = 15$  МПа,  $E'_s = E_s/10$ ) аналитическая модель, основанная на теории ПС, приводит к почти вдвое большему внутреннему давлению. Для менее жесткой склеры ( $E_s = 10$  МПа и  $E_s = 7$  МПа) две модели дают более близкие результаты, при этом разница между прогнозами моделирования составляет около 30 %. Результаты моделей еще ближе, когда рассматривается более жесткая роговица ( $E_c = 1$  МПа,  $E'_c = E_c/20$ ).

**Давление в корнеосклеральной оболочке глаза  
после инъекции 0.05 мм, полученное в результате  
КЭ-моделирования и по теории ПС**

Модуль Юнга роговицы	Модуль Юнга склеры	КЭ модель	Модель ПС
$E_c = 0.3$ МПа $E'_c = E_c/20$	$E_s = 15$ МПа, $E'_s = E_s/10$ $E_s = 10$ МПа, $E'_s = E_s/10$ $E_s = 7$ МПа, $E'_s = E_s/40$	37.6 35.5 29.2	74.9 55.3 42.3
$E_c = 1.0$ МПа $E'_c = E_c/20$	$E_s = 7$ МПа, $E'_s = E_s/40$	35.5	42.35

Моделирование показывает, что упрощенные модели глаза, основанные на теории оболочек, могут дать удовлетворительные оценки, даже если они не учитывают сложную внутреннюю структуру глазного яблока.

**8. Заключение.** В обзоре представлена часть исследований, выполненных совместно с офтальмологами. Построен ряд математических моделей, связанных с деформированием элементов глаза. Исследования в области биомеханики глаза позволяют улучшить диагностику различных заболеваний, развивать новые методы терапевтического и хирургического лечения глазных болезней. В связи с этим к математическому описанию глаза в целом и его отдельных элементов в частности обращались при решении многих офтальмологических проблем, и даже упрощенные модели оказывались полезными для врачей-офтальмологов.

## Литература

1. Иомдина Е. Н., Бауэр С. М., Котляр К. Е. *Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения*. Москва, Реал Тайм (2015).
2. Bauer S. M., Tovstik P. E., Katchanov A. B. On the stability of the eye shell under encircling band. *Technische Mechanik* **15** (3), 183–190 (1995).
3. Мишина Э. Н. К расчету напряженно-деформированного состояния оболочки глаза при опоясывающей нагрузке. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1*. Вып. 2, 68–72 (1995).
4. Mironov A. N., Semenov B. N. Zum problem der mathematischen modellierung in der ophtalmologie. *Technische Mechanik* **16** (3), 245–249 (1996).
5. Бауэр С. М., Товстик П. Е., Зимин Б. А. *Простейшие модели теории оболочек и пластин в офтальмологии*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2000).
6. Bauer S. M., Mironov A. N. On the mathematical simulation of the stress-strain state of the eye shell undergoing the scleral buckling procedure. *Acta of Bioengineering and Biomechanics* **4** (NS), 726–727 (2002).
7. Бауэр С. М., Миронов А. Н. Контакт сферической оболочки с упругим кольцом. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1*, вып. 3, 111–114 (2007).
8. Bauer S. M., Tovstik P. E. Buckling of spherical shells under concentrated load and internal pressure. *Technische Mechanik* **18** (2), 135–139 (1998).
9. Волков В. В. *Глаукома при псевдонормальном давлении. Руководство для врачей*. Москва, Медицина (2001).
10. Бауэр С. М. Осесимметричные деформации неоднородных трансверсально-изотропных круглых пластин. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1*, вып. 3, 65–68 (2002).
11. Bauer S. M. Mechanical models of the development of glaucoma. In: *Advances in Mechanics of Solids*, vol. 15, 153–178, World Scientific (2006). [https://doi.org/10.1142/9789812773166\\_0008](https://doi.org/10.1142/9789812773166_0008)
12. Bauer S. M., Voronkova E. B. On the deformation of the Lamina Cribrosa under intraocular pressure. *Russian Journal of Biomechanics* **5** (1), 73–82 (2001). URL: <https://vestnik.pstu.ru/biomech> (дата обращения: 21.07.2023)
13. Bauer S. M., Voronkova E. B. The mechanical response of the Lamina Cribrosa to the elevated intraocular pressure. *Acta of Bioengineering and Biomechanics* **4** (NS), 712–713 (2002).
14. Амбарцумян С. А. *Теория анизотропных пластин: прочность, устойчивость и колебания*. Москва, Наука (1987).
15. Палий О. М., Спиро В. Е. *Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет*. Ленинград, Судостроение (1977).
16. Родионова В. А., Титаев В. Ф., Черных К. Ф. *Прикладная теория анизотропных пластин и оболочек*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1996).
17. Bauer S. M., Voronkova E. B. Nonclassical theories of bending analysis of orthotropic circular plate. В: *Shell Structures: Theory and Applications*, 57–60, CRC Press, (2013). <https://doi.org/10.1201/b15684>
18. Voronkova E. B., Bauer S. M., Eriksson A. Nonclassical Theories of Shells in Application to Soft Biological Tissues. В: *Shell-like Structures. Advanced Structured Materials*, vol. 15, 647–654, Springer (2011). [https://doi.org/10.1007/978-3-642-21855-2\\_42](https://doi.org/10.1007/978-3-642-21855-2_42)
19. Воронкова Е. Б. Деформация, устойчивость и свободные колебания решетчатой пластинки глаза. В: *Биомеханика глаза. Сб. трудов III семинара Московского НИИ глазных болезней им. Гельмгольца*, 105–106 (2002).
20. Панов Д. Ю., Феодосьев В. И. О равновесии и потере устойчивости пологих оболочек при больших прогибах. *Прикладная математика и механика* **12**, 389–406 (1948).
21. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *Quarterly of Applied Mathematics* **31** (1), 75–91 (1973).
22. Bauer S. M., Voronkova E. B. On the unsymmetrical buckling of the nonuniform orthotropic circular plates. В: *Numerical Analysis and Its Applications. NAA 2012. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 8236, 198–205. Berlin, Heidelberg, Springer (2013). <https://doi.org/10.1007/978-3-642-41515-920>
23. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б. Влияние условий закрепления на появление несимметричных форм равновесия у круглых пластин под действием нормального давления. *Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика*, вып. 1, 38–46 (2020). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-38-46>

24. Bauer S.M., Voronkova E.B. On non-axisymmetric buckling modes of inhomogeneous circular plates. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **54**, iss.2, 113–118 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1063454121020023>
25. Bauer S.M., Voronkova E.B., Semenov B.N. On the nonsymmetric equilibrium forms of circular plates under normal pressure. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **55**, iss.3, 275–280 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1063454122030050>
26. Bauer S.M., Indeitsev D.A., Semenov B.N., Voronkova E.B. Asymmetric buckling of orthotropic plates under normal pressure. In: *Advances in Solid and Fracture Mechanics. Advanced Structured Materials*, vol. 180, 13–22 Cham, Springer (2022). [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_2)
27. Bauer S.M., Voronkova E.B. Asymmetric buckling of heterogeneous annular plates. B: Bauer S., Eremeyev V.A., Mikhasev G.I., Morozov N.F., Altenbach H. (ed.). *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Advanced Structured Materials*, vol. 151, 17–26, Cham, Springer (2022). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_2)
28. Bauer S.M., Voronkova E.B. On buckling behavior of inhomogeneous shallow spherical caps with elastically restrained edge. B: *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials*, vol. 134, 65–74, Cham, Springer (2020). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_4)
29. Bauer S.M., Voronkova E.B. Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure. B: *Recent Developments in the Theory of Shells. Advanced Structured Materials*, vol. 110, 79–89, Cham, Springer (2019). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_6)
30. Страхов В.В. Очевидная анатомия и невероятная физиология аккомодации. URL: <https://www.detskozrenie.ru/uploads/lectur/ochevidnaya-anatomiya-i-neveroyatnaya-fiziologiya-akkomodatsii-strahov-vladimir-vitalevich.pdf> (дата обращения: 21.07.2023)
31. Ljubimova D.Y., Eriksson A., Bauer S.M. Numerical study of effect of vitreous support on eye accommodation. *Acta of Bioengineering and Biomechanics* **7**(2), 2–15 (2005). URL: <https://www.actabio.pwr.wroc.pl/Vol7No2/1.pdf> (дата обращения: 21.07.2023)
32. Ljubimova D.Y., Eriksson A., Bauer S.M. Aspects of eye accommodation evaluated by finite elements. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology* **7**(2), 139–150 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10237-007-0081-2>
33. Кальфа С.Ю. Эластометрия глаза. *Русский офтальмологический журнал* **8**(2), 250–262 (1928).
34. Bauer S.M., Lyubimov G.A., Tovstik P.E. On the mathematical simulation of the measuring of the intraocular pressure by maklakov method. *Technische Mechanik* **24**(3–4), 231–235 (2004). URL: <https://journals.ub.ovgu.de/index.php/techmech/article/view/924> (дата обращения: 21.07.2023)
35. Бауэр С.М., Любимов Г.А., Товстик П.Е. Математическое моделирование метода Маклакова измерения внутриглазного давления. *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, вып. 1, 24–39 (2005).
36. Бауэр С.М., Тияпьев А.С. О математической модели оценки внутриглазного давления по методу Маклакова. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1.*, вып. 4, 98–101 (2008).
37. Балашевич Л.И., Качанов А.Б., Никулин С.А., Головатенко С.П., Бауэр С.М., Зимин Б.А. Влияние толщины роговицы на пневмотонометрические показатели внутриглазного давления. *Офтальмохирургия*, вып. 1, 31–33 (2005).
38. Бауэр С.М. Об апланационных методах измерения внутриглазного давления. В: *Труды семинара «Компьютерные методы в механике сплошной среды», 2006–2007 гг.* 84–99. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2007).
39. Карамшина Л.А. Механические модели апланационной тонометрии с учетом многослойности роговицы. *Российский журнал биомеханики* **15**(3), 27–44 (2011). URL: <http://vestnik.pstu.ru/biomech/> (дата обращения: 21.07.2023)
40. Bauer S.M., Ermakov A.M. Buckling of a spherical segment under the flat base load. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference Optimization and Analysis of Structures*, 24–27 (2013). URL: <http://oas2015.ut.ee/OAS2013book.pdf> (дата обращения: 21.07.2023)
41. Bauer S.M., Venatovskaya L.A., Качанов А.Б., Kornikov V.V. Mathematical models of laser correction of myopia by LASIK, SMILE and PRK methods. *Russian Journal of Biomechanics* **25**(4), 317–322 (2021). <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2021.4.02>
42. Daxer A. Corneal intrastromal implantation surgery for the treatment of moderate and high myopia. *Journal of Cataract and Refractive Surgery* **34**(2), 194–198 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.jcrs.2007.10.011>
43. Kotliar K., Maier M., Bauer S., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I. Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model. *Acta Ophthalmologica Scandinavica* **85**(7), 777–781 (2007). <https://doi.org/10.1111/j.1600-0420.2007.00939.x>

44. Бауэр С. М., Воронкова Е. Б., Тиясов А. С. О зависимости объем-давления для глазного яблока. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1*, вып. 4, 86–93 (2010).
45. Bauer S. M., Voronkova E. B. Nonclassical Shell Theories in Ocular Biomechanics. В: *Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology. Advanced Structured Materials*, vol. 45, 81–97. Cham, Springer (2015). [https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3_4)
46. Нестеров А. П., Бунин А. Я., Кацнельсон Л. А. *Внутриглазное давление. Физиология и патология*. Москва, Наука (1974).
47. Rezaei K. A., Wen J. C. Intravitreal injection technique. *MedEdPORTAL: the journal of teaching and learning resources* **12**, 10502 (2016). [https://doi.org/10.15766/mep\\_2374-8265.10502](https://doi.org/10.15766/mep_2374-8265.10502)
48. Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B., Kachanov A. B. Modeling Approaches for an Eyeball Deformation After Intravitreal Injection. В: *Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications. Advanced Structured Materials*, vol. 155, 77–85. Cham, Springer (2022). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-81705-3\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-81705-3_6)
49. Lang G. K. *Ophthalmology*. Stuttgart, Thieme (2000).

Статья поступила в редакцию 14 февраля 2023 г.;  
доработана 29 апреля 2023 г.;  
рекомендована к печати 18 мая 2023 г.

#### Контактная информация:

Бауэр Светлана Михайловна — д-р физ.-мат. наук, проф.; s.bauer@spbu.ru  
Венатовская Людмила Александровна — канд. физ.-мат. наук, доц.; l.venatovskaya@spbu.ru  
Воронкова Ева Борузовна — канд. физ.-мат. наук, доц.; e.voronkova@spbu.ru

## Solid mechanics models in application to ophthalmology

S. M. Bauer, L. A. Venatovskaya, E. B. Voronkova

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B. Solid mechanics models in application to ophthalmology. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 686–712. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.407> (In Russian)

The review presents the models on a change in the stress-strain state of the eye shell after vision correction operations and a change in intraocular pressure with the introduction of drugs into the vitreous body. All mathematical models were developed in collaboration with ophthalmologists. Mathematical models that describe the process of determining the true intraocular pressure (IOP) by applanation methods are discussed. New results in solid mechanics were obtained while studying ocular biomechanics problems. For example, the problem of the stability of a spherical shell subjected to a concentrated force and internal pressure was solved, and the stability of the axisymmetric equilibrium state of annular inhomogeneous orthotropic plates under normal pressure was studied. The stress-strain states of transversely isotropic spherical and cylindrical layers subjected to internal and external pressures are discussed, and the solutions obtained in the framework of the three-dimensional theory are compared with the solutions obtained by non-classical shell theories. This comparison made it possible to assess the accuracy of approximate theories.

*Keywords:* mathematical modelling, intraocular pressure, shell theory models.

## References

1. Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotliar K. E. *Eye Biomechanics: Theoretical Aspects and Clinical Applications*. Moscow, Real Time Publ. (2015). (In Russian)

2. Bauer S. M., Tovstik P. E., Katchanov A. B. On the stability of the eye shell under encircling band. *Technische Mechanik* **15** (3), 183–190 (1995).
3. Mishina E. N. On the calculation of the stress-strain state of the eye shell at an encircling load. *Vestnik Saint Petersburg University. Ser. 1*, iss. 2, 68–72 (1995). (In Russian)
4. Mironov A. N., Semenov B. N. Zum problem der mathematischen modellierung in der ophthalmologie. *Technische Mechanik* **16** (3), 245–249 (1996).
5. Bauer S. M., Tovstik P. E., Zimin B. A. *The simple models of theory of shells and plates in ophthalmology*. St. Petersburg, St. Petersburg University Press, (2000). (In Russian)
6. Bauer S. M., Mironov A. N. On the mathematical simulation of the stress-strain state of the eye shell undergoing the scleral buckling procedure. *Acta of Bioengineering and Biomechanics* **4** (NS), 726–727 (2002).
7. Bauer S. M., Mironov A. N. Contact of a spherical shell with an elastic ring. *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1*, iss. 3, 111–114 (2007). (In Russian)
8. Bauer S. M., Tovstik P. E. Buckling of spherical shells under concentrated load and internal pressure. *Technische Mechanik* **18** (2), 135–139 (1998).
9. Volkov V. V. *Glaucoma under pseudonormal pressure. Doctor's guide*. Moscow, Meditsina Publ. (2001). (In Russian)
10. Bauer S. M. Axisymmetric deformation of nonuniform transversely isotropic circular plates. *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1*, iss. 3, 65–68 (2002). (In Russian)
11. Bauer S. M. Mechanical models of the development of glaucoma. In: *Advances in Mechanics of Solids*, vol. 15, 153–178, World Scientific (2006). [https://doi.org/10.1142/9789812773166\\_0008](https://doi.org/10.1142/9789812773166_0008)
12. Bauer S. M., Voronkova E. B. On the deformation of the Lamina Cribrosa under intraocular pressure. *Russian Journal of Biomechanics* **5** (1), 73–82 (2001). Available at: <https://vestnik.pstu.ru/biomech> (accessed: July 21, 2023).
13. Bauer S. M., Voronkova E. B. The mechanical response of the Lamina Cribrosa to the elevated intraocular pressure. *Acta of Bioengineering and Biomechanics* **4** (NS), 712–713 (2002).
14. Ambartsumyan S. A. *Theory of Anisotropic Plates*. Technomic Publishing, Stamford (1970). (In Russian)
15. Pali O. M., Spiro V. E. *Anisotropic Shells in Shipbuildings. Theory and Analysis*. Leningrad, Sudostroenie (1977) (In Russian)
16. Rodionova V. A., Titaev V. F., Chernykh K. F. *Applied Theory of Anisotropic Plates and Shells*. St. Petersburg St. Petersburg University Press, (1996) (In Russian)
17. Bauer S. M., Voronkova E. B. Nonclassical theories of bending analysis of orthotropic circular plate. In: *Shell Structures: Theory and Applications* 57–60, CRC Press, (2013). <https://doi.org/10.1201/b15684>
18. Voronkova E. B., Bauer S. M., Eriksson A. Nonclassical Theories of Shells in Application to Soft Biological Tissues. In: *Shell-like Structures. Advanced Structured Materials*, vol. 15, 647–654, Springer (2011). [https://doi.org/10.1007/978-3-642-21855-2\\_42](https://doi.org/10.1007/978-3-642-21855-2_42)
19. Voronkova E. B. Deformation, stability and vibrations of the Lamina Cribrosa of the eye. In: *Ocular Biomechanics. Proceedings of the 3rd seminar held by Moscow Helmholtz Research Institute of Eye Disease*, 105–106 (2002). (In Russian)
20. Panov D. Yu, Feodos'ev V. I. On the equilibrium and loss of stability of shallow shells in the case of large displacement. *Prikladnaya matematika i mekhanika* **12**, 389–406 (1948). (In Russian)
21. Cheo L. S., Reiss E. L. Unsymmetric wrinkling of circular plates. *Quarterly of Applied Mathematics* **31** (1), 75–91 (1973).
22. Bauer S. M., Voronkova E. B. On the unsymmetrical buckling of the nonuniform orthotropic circular plates. In: *Numerical Analysis and Its Applications. NAA 2012. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 8236, 198–205. Berlin, Heidelberg, Springer (2013). [https://doi.org/10.1007/978-3-642-41515-9\\_20](https://doi.org/10.1007/978-3-642-41515-9_20)
23. Bauer S. M., Voronkova E. B. Influence of boundary constraints on the appearance of asymmetrical equilibrium states in circular plates under normal pressure. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, iss. 1, 38–46 (2020). (In Russian) <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-1-38-46>
24. Bauer S. M., Voronkova E. B. On non-axisymmetric buckling modes of inhomogeneous circular plates. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **54** (2), 113–118 (2021). <https://doi.org/10.1134/S1063454121020023>
25. Bauer S. M., Voronkova E. B., Semenov B. N. On the nonsymmetric equilibrium forms of circular plates under normal pressure. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **55** (3), 275–280 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1063454122030050>

26. Bauer S. M., Indeitsev D. A., Semenov B. N., Voronkova E. B. Asymmetric buckling of orthotropic plates under normal pressure. In: *Advances in Solid and Fracture Mechanics. Advanced Structured Materials*, vol. 180, 13–22, Cham, Springer (2022). [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_2)
27. Bauer S. M., Voronkova E. B. Asymmetric buckling of heterogeneous annular plates. In: Bauer S., Eremeyev V. A., Mikhasev G. I., Morozov N. F., Altenbach H. (ed.). *Recent Approaches in the Theory of Plates and Plate-Like Structures. Advanced Structured Materials*, vol. 151, 17–26. Cham, Springer (2022). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-87185-7_2)
28. Bauer S. M., Voronkova E. B. On buckling behavior of inhomogeneous shallow spherical caps with elastically restrained edge. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials*, vol. 134, 65–74. Cham, Springer (2020). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_4)
29. Bauer S. M., Voronkova E. B. Unsymmetrical wrinkling of nonuniform annular plates and spherical caps under internal pressure. In: *Recent Developments in the Theory of Shells. Advanced Structured Materials*, vol. 110, 79–89. Cham, Springer (2019). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_6)
30. Strakhov V. V. Obvious anatomy and incredible physiology of accommodation. Available at: <https://www.detskozrenie.ru/uploads/lectur/ochevidnaya-anatomiya-i-neveroyatnaya-fiziologiya-akkomodatsii-strahov-vladimir-vitalevich.pdf> (accessed: July 21, 2023) (In Russian)
31. Ljubimov D. Y., Eriksson A., Bauer S. M. Numerical study of effect of vitreous support on eye accommodation. *Acta of Bioengineering and Biomechanics* **7**(2), 2–15 (2005). Available at: <https://www.actabio.pwr.wroc.pl/Vol7No2/1.pdf> (accessed: July 21, 2023) (In Russian)
32. Ljubimova D. Y., Eriksson A., Bauer S. M. Aspects of eye accommodation evaluated by finite elements. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology* **7**(2), 139–150 (2008). <https://doi.org/10.1007/s10237-007-0081-2>
33. Kal'fa S. Yu. Eye elastometry. *Russ. Ophthalmol. Zh.* **8**(2), 250–262 (1928). (In Russian)
34. Bauer S. M., Lyubimov G. A., Tovstik P. E. On the mathematical simulation of the measuring of the intraocular pressure by maklakov method. *Technische Mechanik* **24**(3–4), 231–235 (2004). Available at: <https://journals.ub.ovgu.de/index.php/techmech/article/view/924> (accessed: July 21, 2023)
35. Bauer S. M., Lyubimov G. A., Tovstik P. E. Mathematical modeling of Maklakoff's method for measuring the intraocular pressure. *Fluid Dynamics* **40**(1), 20–23 (2005). (In Russian)
36. Bauer S. M., Tipyasev A. S. On the mathematical model of the measuring of the intraocular pressure by Maklakov method. *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1*, iss. 4, 98–101 (2008). (In Russian)
37. Balashevich L. I., Kachanov A. B., Nikulin S. A., Golovatenko S. P., Bauer S. M., Zimin B. A. Influence of the corneal thickness on pneumotometric parameters of intraocular pressure. *Fyodorov Journal of Ophthalmic Surgery*, iss. 1, 31–33 (2005). (In Russian)
38. Bauer S. M. On applanational tonometry methods of intraocular pressure measurement. In: *Transactions of the seminar «Computer methods in continuum mechanics», 2006–2007*, 84–99. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (2007). (In Russian)
39. Karamshina L. A. Mechanical models of applanation tonometry taking into account the cornea multilayer structure. *Russian Journal of Biomechanics* **15**(3), 27–44 (2011). Available at: <http://vestnik.pstu.ru/biomech/> (accessed: July 21, 2023)
40. Bauer S. M., Ermakov A. M. Buckling of a spherical segment under the flat base load. *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference Optimization and Analysis of Structures*, 24–27 (2013). Available at: <http://oas2015.ut.ee/OAS2013book.pdf> (accessed: July 21, 2023)
41. Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Kachanov A. B., Kornikov V. V. Mathematical models of laser correction of myopia by LASIK, SMILE and PRK methods. *Russian Journal of Biomechanics* **25**(4), 317–322 (2021). <https://doi.org/10.15593/RZhBiomeh/2021.4.02>
42. Daxer A. Corneal intrastromal implantation surgery for the treatment of moderate and high myopia. *Journal of Cataract and Refractive Surgery* **34**(2), 194–198 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.jcrs.2007.10.011>
43. Kotliar K., Maier M., Bauer S., Feucht N., Lohmann C., Lanzl I. Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: clinical results and biomechanical model. *Acta Ophthalmologica Scandinavica* **85**(7), 777–781 (2007). <https://doi.org/10.1111/j.1600-0420.2007.00939.x>
44. Bauer S. M., Voronkova E. B., Tipyasev A. S. On pressure-volume relationship for a human eye shell. *Vestnik St. Petersburg University. Ser. 1*, iss. 4, 86–93 (2010). (In Russian)
45. Bauer S. M., Voronkova E. B. Nonclassical Shell Theories in Ocular Biomechanics. In: *Shell and Membrane Theories in Mechanics and Biology. Advanced Structured Materials*, vol. 45, 81–97. Cham, Springer (2015). [https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3_4)
46. Nesterov A. P., Bunin A. Ya., Katsnelson L. A. *Intraocular pressure. Physiology and Pathology*. Moscow, Nauka (1974). (In Russian)

47. Rezaei K. A., Wen J. C. Intravitreal injection technique. *MedEdPORTAL: the journal of teaching and learning resources* **12**, 10502 (2016). [https://doi.org/10.15766/mep\\_2374-8265.10502](https://doi.org/10.15766/mep_2374-8265.10502)
48. Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B., Kachanov A. B. Modeling Approaches for an Eyeball Deformation After Intravitreal Injection. In: *Advanced Materials Modelling for Mechanical, Medical and Biological Applications. Advanced Structured Materials*, vol. 155, 77–85. Cham, Springer (2022). [https://doi.org/10.1007/978-3-030-81705-3\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-81705-3_6)
49. Lang G. K. *Ophthalmology*. Stuttgart, Thieme (2000).

Received: February 14, 2023

Revised: April 29, 2023

Accepted: May 18, 2023

Authors' information:

Svetlana M. Bauer — s.bauer@spbu.ru

Ludmila A. Venatovskaya — l.venatovskaya@spbu.ru

Eva B. Voronkova — e.voronkova@spbu.ru