МАТЕМАТИКА

УДК 515.162
MSC 57M15

Родственные диаграммы

В. М. Нежинский

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
Российская Федерация, 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48

Для цитирования: *Нежинский В. М.* Родственные диаграммы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 713–719. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.408

Под диаграммой мы понимаем топологическое пространство, полученное приклеиванием к стандартной окружности конечного числа попарно непересекающихся замкнутых прямоугольников по их боковым сторонам, приклеенные прямоугольники попарно не пересекаются. Диаграммы — объекты не новые, они находили применение во многих разделах маломерной топологии. Наша главная цель — развить теорию диаграмм до уровня, достаточного для применения еще в одном разделе маломерной топологии — в теории тенглов. Содержание работы следующее. Мы снабжаем диаграммы дополнительными структурами — попарно согласованными друг с другом гладкостями входящих в нее окружности и прямоугольников, ориентацией окружности, отмеченной точкой на окружности; вводим для так оснащенных диаграмм новое (т. е., насколько известно автору, в научной литературе ранее не встречавшееся) отношение эквивалентности — родственность; определяем сюръективное отображение множества классов родственных диаграмм на множество классов диффеоморфных гладких компактных связных двумерных многообразий с краем и замечаем, что в простейших случаях эта сюръекция является также и биекцией. Применение построенной теории к теории тенглов требует дополнительной подготовки и потому в эту статью не включено; автор предполагает посвятить этому применению отдельную публикацию.

Ключевые слова: диаграмма, трансформер, дисково-ленточный граф.

1. Введение. Хордовая диаграмма — это пара, состоящая из стандартной окружности $S^1(\subset \mathbb{R}^2)$ и конечного набора (метрических) хорд, концы которых попарно не пересекаются. Изучение хордовых диаграмм, как правило, подчинено следующей схеме. Сначала диаграммы обогащают (нужными для применений) дополнительными структурами: ориентацией хорд (см., например, [6, диаграммы Гаусса]), оснащением хорд числами (см., например, [1] или раздел 4.1 настоящей статьи), конечным набором точек на окружности (см., например, [3–5]) и т. д. Затем множество диаграмм, обогащенных какими-нибудь из перечисленных выше структурами, разбивают на классы гомеоморфных диаграмм, гомеоморфизмы сохраняют соответствующие дополнительные структуры. После такой формализации задача сводится к изучению, а в благоприятных случаях вычислению множеств, составленных из соответствующих классов хордовых диаграмм.

Настоящая работа посвящена изучению хордовых диаграмм, каждая хорда которых оснащена меткой — нулем или единицей. Изложение подчинено приведенной выше схеме.

Теория хордовых диаграмм, содержащаяся в этой работе, была разработана автором, в первую очередь для нужд теории тенглов. Применению построенной в этой работе теории к теории тенглов автор предполагает посвятить отдельную статью.

2. Фундаментальные понятия. ***2.1. Диаграммы.*** Рассмотрим топологическое пространство, полученное приклеиванием к стандартной единичной окружности конечного числа попарно непересекающихся замкнутых прямоугольников по их боковым сторонам, приклеенные прямоугольники попарно не пересекаются. Снабдим эти окружность и прямоугольники стандартными гладкими структурами и предположим, что пересечения прямоугольников с окружностью являются гладкими подмногообразиями окружности. Это пространство, снабженное упомянутыми выше структурами, мы будем называть *диаграммой*, окружность — *базой диаграммы*, приклеенные прямоугольники — *лентами диаграммы.*

Дадим еще одно определение, которое понадобится нам лишь в разделе 4.1. Назовем ленту *ориентируемой*, если существует ориентация этой ленты, такая что пересечения края ленты с базой диаграммы индуцируют одну и ту же ориентацию базы диаграммы, и *неориентируемой* в противном случае.

2.2. Дисково-ленточные графы. Назовем гладкое компактное двумерное многообразие с краем *дисково-ленточным графом*, если задано разбиение его на ручки, обладающее следующими тремя свойствами. Во-первых, число ручек разбиения конечно. Во-вторых, все ручки являются только ручками индексов или нуль (т. е. дисками), или один (т. е. лентами). Наконец, в-третьих, ручки индексов нуль и один попарно не пересекаются, ручки разных индексов пересекаются только по своим краям, при этом каждая ручка индекса один пересекается с объединением всех ручек индекса нуль по двум попарно непересекающимся дугам. Это многообразие мы будем называть *носителем дисково-ленточного графа*, ручки индексов нуль — его *вершинами*, ручки индексов один — его ребрами.

Хорошо известно, что *любое связное гладкое компактное двумерное многообразие с краем структурой дисково-ленточного графа снабдить можно* (ср., например, [2, глава I, раздел 12]) и ясно, что *такая структура не единственна.*

В этой работе мы ограничимся рассмотрением дисково-ленточных графов со *связными* носителями и это, как правило, оговаривать не будем.

2.3. Остовы. Дисково-ленточный граф называется *деревом*, если его носитель связен и односвязен. Ясно, что *носитель любого дерева диффеоморфен двумерному замкнутому кругу.*

Подграфом дисково-ленточного графа называется граф, состоящий из каких-нибудь его (целых) ручек. Подграф дисково-ленточного графа называется *остовом*, если он является деревом и содержит все вершины графа. Нетрудно видеть, что *любой связный дисково-ленточный граф остов имеет*, что *остов, вообще говоря, не один* и что *носитель любого остова* (поскольку он диффеоморфен замкнутому кругу, см. последнее замечание предыдущего абзаца) *ориентируем.*

2.4. Остатки. Возьмем дисково-ленточный граф. Выберем какой-нибудь его остов и в носителе дисково-ленточного графа рассмотрим дополнение к внутренности этого остова. Ясно, что это дополнение является объединением связного замкнутого одномерного многообразия и лент, подклеенных к нему своими боковыми сторонами, и что эти многообразие и ленты обладают гладкими структурами, наследуемыми ими от дисково-ленточного графа. Это подпространство носителя графа, снабженное разбиением, состоящим из упомянутых выше одномерного многообразия и лент, каждое из которых, в свою очередь, снабжено упомянутыми выше гладкими структурами, мы будем называть *остатком (ассоциированным с выбранным остовом).* Одномерное многообразие разбиения мы будем называть *базой остатка.*

Заметим, что *для любого остатка существует диаграмма и гомеоморфизм остатка на эту диаграмму, такие что сокращение гомеоморфизма на базу остатка является диффеоморфизмом базы остатка на базу диаграммы.* Подробнее об этом см. в разделе 3.4.

Ясно, что *для любого дисково-ленточного графа остов определяет соответствующий остаток и определяется им.*

2.5. Трансформеры. Пару, составленную из дисково-ленточного графа и упорядоченной пары его (не обязательно различных) остовов, мы будем называть *трансформером, переводящим остаток первого остова в остаток второго.* Этот дисково-ленточный граф мы будем называть *основой* трансформера.

3. Дополнительные структуры. ***3.1. Оснащение диаграммы.*** Назовем диаграмму *оснащенной*, если ее база стандартно ориентирована и выбрана и фиксирована точка, принадлежащая базе и не принадлежащая никакой ленте диаграммы.

Две оснащенные диаграммы (с одинаковым числом лент) мы будем называть *строго гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм первой диаграммы на вторую, сокращение которого на базы диаграмм есть сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, сокращение на каждую ленту есть диффеоморфизм, который переводит отмеченную точку первой диаграммы в отмеченную точку второй. Ясно, что *отношение строгой гомеоморфности есть отношение эквивалентности.*

3.2. Оснащение дисково-ленточного графа. Назовем дисково-ленточный граф *оснащенным*, если выбраны и фиксированы: вершина графа; ориентация этой вершины; точка на крае этой вершины, не принадлежащая никаким ребрам дисково-ленточного графа. Ясно, что *если оснащенный дисково-ленточный граф является деревом, то его носитель ориентируем (ср. 2.3) и, сверх того, ориентирован: его ориентация расширяет ориентацию с ориентации фиксированной вершины.* Эту ориентацию мы будем называть *стандартной.*

3.3. Оснащение остова. Назовем остов дисково-ленточного графа *оснащенным*, если он оснащен как граф.

Ясно, что *оснащение дисково-ленточного графа задает оснащение его остова: вершина графа, ее ориентация и отмеченная точка наследуются от графа.* Ясно также, что *если фиксированная точка на крае вершины не принадлежит никаким ребрам дисково-ленточного графа, то оснащение остова задает оснащение соответствующего дисково-ленточного графа.*

Замечу, что, согласно 3.2, *остов оснащенного дисково-ленточного графа стандартно ориентируем.*

3.4. Оснащение остатка. Назовем остаток дисково-ленточного графа *оснащенным*, если выбраны и фиксированы: ориентация базы остатка; точка, содержащаяся в базе остатка и не содержащаяся ни в каких ребрах дисково-ленточного графа.

Ясно, что *оснащение дисково-ленточного графа определяет оснащение (любого) его остатка: базу остатка ориентируем как край стандартно ориентированного ассоциированного с этим остатком остова; искомая точка — та же, что и у графа.* Заметим, что верно и обратное: *оснащение остатка определяет оснащение дисково-ленточного графа.*

Нетрудно видеть, что *для любого оснащенного остатка существует оснащенная диаграмма и гомеоморфизм оснащенного остатка на эту диаграмму, такие что: гомеоморфизм отображает отмеченную точку остатка в отмеченную точку диаграммы; сокращение гомеоморфизма на базу остатка является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом базы остатка на базу диаграммы; сокращение гомеоморфизма на каждую ленту остатка является диффеоморфизмом.* Эту оснащенную диаграмму мы будем называть *оснащенной диаграммой, ассоциированной с соответствующим оснащенным остатком.*

Несложная прямая проверка показывает, что *если две диаграммы ассоциированы с одним остатком, то они строго гомеоморфны.*

3.5. Оснащение трансформера. Назовем трансформер *оснащенным*, если его основа оснащена.

4. Основные результаты. Всюду в этом параграфе мы будем считать, что задано и фиксировано целое неотрицательное число n.

4.1. Материал, нужный для пункта 4.3. Обозначим через $A(n)$ множество классов строго гомеоморфных, оснащенных диаграмм с n лентами.

Лемма. *Число элементов множества $A(n)$ равно $(2n-1)!!2^n$.*

Доказательство. Возьмем последовательность первых $2n$ чисел натурального ряда. Разобьем эту последовательность на непересекающиеся между собой пары и снабдим каждую пару меткой 0 или 1. Обозначим через $B(n)$ совокупность всех таких снабженных метками разбиений последовательности $1, 2, \dots, 2n$.

Определим отображение

$$\Psi : A(n) \to B(n)$$

следующим правилом. Пусть $u \in A(n)$. Возьмем какую-нибудь оснащенную диаграмму из класса u. Рассмотрим совокупность дуг в базе диаграммы, по которым подклеены ленты, занумеруем эти дуги первыми числами натурального ряда, начиная от фиксированной точки, в порядке их следования при обходе базы в направлении, задаваемой ее ориентацией, разобьем эту последовательность на пары чисел, соответствующих парам дуг, принадлежащих одной ленте, и каждую такую пару снабдим меткой 0, если соответствующая лента ориентируема, и меткой 1, если соответствующая лента неориентируема. Мы получили элемент множества $B(n)$. Этот элемент и есть $\Psi(n)(u)$.

Ясно, что это отображение определено корректно и является биекцией.

Для завершения доказательства достаточно заметить, что число элементов множества $B(n)$ равно $(2n-1)!!2^n$.

4.2. Множество $C(n)$. Две оснащенные диаграммы называются *близнецами*, если существует трансформер, остаток первого остова которого ассоциирован с первой диаграммой, остаток второго остова — со второй диаграммой. Заметим, что *если какие-нибудь оснащенные диаграммы являются близнецами, то и любые строго эквивалентные им оснащенные диаграммы тоже являются близнецами.*

Нетрудно видеть, что *отношение «быть близнецами», определенное на множестве диаграмм, рефлексивно и симметрично*, и нетрудно привести пример, показывающий, что *это отношение не транзитивно.*

Две оснащенные диаграммы называются *родственными*, если существует конечная последовательность оснащенных диаграмм, начинающаяся с первой оснащенной диаграммы и заканчивающаяся второй, любые две соседние диаграммы которой являются близнецами. Ясно, что *отношение «быть родственным» является отношением эквивалентности.*

Через $C(n)$ мы будем обозначать множество классов родственных оснащенных диаграмм с n лентами.

4.3. Основная теорема. Обозначим через $D(n)$ множество классов диффеоморфных гладких связных компактных двумерных многообразий с краем, эйлерова характеристика каждого из которых равна $1-n$. Определим отображение

$$\Phi(n) : C(n) \to D(n)$$

правилом: классу оснащенной диаграммы с n лентами мы поставим в соответствие класс многообразия, полученного заклеиванием базы диаграммы диском. Что это определение корректно — очевидно.

Теорема. *Отображение $\Phi(n)$ является сюръекцией, а если $n \leq 2$, то биекцией.*

Первое следует из хорошо известной классификации связных компактных двумерных многообразий с краем (см., например, модели таких многообразий, приведенные в [2, гл. I, раздел 12]). Проверка инъективности не представляет труда, хотя и весьма трудоемка, и состоит в «переборе вариантов».

Заметим, что, поскольку существует проекция множества $A(n)$ на множество $C(n)$, число элементов множества $C(n)$ не больше, чем $(2n-1)!!2^n$ (см. раздел 4.1). Впрочем, эта оценка точна только для $n = 0$ и $n = 1$. Для $n = 2$, согласно замечанию, их должно быть не более двенадцати; в действительности, как показывает простая прямая проверка, различных классов родственных оснащенных диаграмм всего четыре.

Автор благодарит М. В. Петрова за полезные обсуждения.

Литература

1. Ландо С. К. J-инварианты орнаментов и оснащенные хордовые диаграммы. *Функциональный анализ и его приложение* **40** (1), 1–13 (2006).

2. Масси У., Столлингс Дж. *Алгебраическая топология. Введение*, пер. с англ. Москва, Мир (1977).

3. Нежинский В. М. Пространственные графы, тенглы и плоские деревья. *Алгебра и анализ* **31** (6), 197–207 (2019).

4. Нежинский В. М. Изотопические инварианты пространственных графов. *Сиб. Электрон. матем. изв.* **17**, 769–776 (2020).

5. Nezhinskij V. M. Spatial graphs and their isotopy classification. *Сиб. электрон. матем. изв.* **18** (2), 1390–1396 (2021).

6. Прасолов В. В., Сосинский А. В. *Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия.* Москва, МЦНМО (1997).

Статья поступила в редакцию 3 апреля 2023 г.;
доработана 16 мая 2023 г.;
рекомендована к печати 18 мая 2023 г.

Контактная информация:

Нежинский Владимир Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; nezhin@pdmi.ras.ru

Kindred diagrams

V. M. Nezhinskij

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
The Herzen State Pedagogical University of Russia,
48, nab. r. Moiki, St. Petersburg, 191186, Russian Federation

For citation: Nezhinskij V. M. Kindred diagrams. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 713–719.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.408 (In Russian)

By a diagram we mean a topological space obtained by gluing to a standard circle a finite number of pairwise non-intersecting closed rectangles along their lateral sides, the glued rectangles are pairwise disjoint. Diagrams are not new objects; they were used in many areas of low-dimensional topology. Our main goal is to develop the theory of diagrams to a level sufficient for application in one more branch — in the theory of tangles. We provide the diagrams with simple additional structures — the smoothness of the circles and rectangles that are pairwise consistent with each other, the orientation of the circle, a point on the circle; we introduce new equivalence relation (that is, as far as the author knows, not previously encountered in the scientific literature) — kindred relation; we define a surjective mapping of the set of classes of kindred diagrams onto the set of classes of diffeomorphic smooth compact connected two-dimensional manifolds with boundary, and note that in the simplest cases this surjection is also a bijection. The application of the constructed theory to the tangle theory requires additional preparation and therefore is not included in this article; the author intends to devote a separate publication to this application.

Keywords: diagram, transformer, disk-band graph.

References

1. Lando S. K. J-Invariants of Plane Curves and Framed Chord Diagrams. *Funktsional'nyi analiz i ego prilozhenie* **40** (1), 1–10 (2006). (In Russian) [Eng. transl.: *Funct. Anal. Appl.* **40** (1), 1–10 (2006).

2. Massey W. S., Stollings J. S. *Algebraic Topology: An Introduction* (1971). [Rus. ed.: Massey W. S., Stollings J. S. *Algebraicheskaja topologija. Vvedenie.* Moscow, Mir Publ. (1977)].

3. Nezhinskij V. M. Spatial graphs, tangles and plane trees. *Algebra i analiz* **31** (6), 197–207 (2019) (In Russian) [Eng. transl.: *St. Petersburg Math.* **31** (6), (2020), 1055–1063].

4. Nezhinskij V. M. Isotopy invariants of spatial graphs. *Elektronnye matematicheskie izvestiia* **17**, 769–776 (2020). (In Russian)

5. Nezhinskij V. M. Spatial graphs and their isotopy classification. *Elektronnye matematicheskie izvestiia* **18** (2), 1390–1396 (2021).

6. Prasolov V. V., Sosinskii A. V. *Knots, links, braids and 3-manifolds.* Moscow, MCNMO Publ. (1997). (In Russian)

Received: April 3, 2023
Revised: May 16, 2023
Accepted: May 18, 2023

Author's information:

Vladimir M. Nezhinskij — nezhin@pdmi.ras.ru

ХРОНИКА

22 марта 2023 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступили доктор физ.-мат. наук, профессор С. М. Бауэр и кандидат физ.-мат. наук, доцент Г. В. Павилайнен (СПбГУ) с докладом на тему «Об исследованиях в области механики деформируемых тел и строительной механики, выполненных под руководством акад. Н. С. Соломенко — основателя кафедры гидроупругости Санкт-Петербургского университета (к 100-летию со дня рождения Н. С. Соломенко)».

Краткое содержание доклада:

Доклад посвящен памятной дате 2023 года — 100-летию со дня рождения Николая Степановича Соломенко, российского ученого-механика в области механики деформируемых тел и строительной механики корабля. Н. С. Соломенко — заслуженный деятель науки и техники РСФСР, академик АН СССР (1984), академик РАН (1991), лауреат Государственной премии СССР, участник Великой Отечественной войны, инженер-контр-адмирал. Н. С. Соломенко — организатор и первый директор Института проблем транспорта РАН (1990), который в 2006 году назван его именем, а также создатель в 1987 году и заведующий единственной в России кафедрой гидроупругости математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.