

Асимптотическая разделимость гармоник методом анализа сингулярного спектра*

В. В. Некруткин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Некруткин В. В. Асимптотическая разделимость гармоник методом анализа сингулярного спектра // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 720–735.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.409>

Статья посвящена достаточным условиям асимптотической разделимости отдельных членов линейной комбинации гармоник методом Анализа сингулярного спектра (АСС). А именно, рассматривается ряд x_0, \dots, x_{N-1} с $x_n = \sum_{i=1}^r f_{i,n}$, где $f_{i,n} = b_i \cos(\omega_i n + \gamma_i)$, а амплитуды $|b_i|$ и частоты $\omega_i \in (0, 1/2)$ попарно различны. Тогда, как доказано в работе, при определенном соотношении амплитуд $|b_i|$ и выборе стандартных параметров метода АСС для этой задачи восстановленные значения $\tilde{f}_{i,n}$ оказываются близкими к $f_{i,n}$, причем для любого i $\max_n (|\tilde{f}_{i,n} - f_{i,n}|) = O(N^{-1})$, если $N \rightarrow \infty$.

Ключевые слова: обработка сигналов, анализ сингулярного спектра, линейная комбинация гармоник, разделимость гармоник, асимптотический анализ.

1. Введение. Постановка задачи. Одним из наиболее ярких экспериментальных результатов применения метода Анализа сингулярного спектра (далее — АСС) является выделение отдельных гармоник из их суммы. А именно, если рассмотреть ряд x_0, \dots, x_{N-1} с

$$x_n = \sum_{i=1}^r f_{i,n}, \quad \text{где } f_{i,n} = b_i \cos(\omega_i n + \gamma_i), \quad (1)$$

с различными амплитудами $|b_i|$ и частотами $\omega_i \in (0, 1/2)$, то при больших длинах ряда N и выборе стандартных параметров метода АСС для этой задачи (берется длина окна $L \approx N/2$, а для восстановления i -го слагаемого в сумме (1) используются две соответствующие последовательные главные компоненты, см. [1, гл. 1]) в результате полученные восстановленные значения $\tilde{f}_{i,n}$ оказываются близкими к $f_{i,n}$.

Например, если взять в (1) $r = 3$, $\gamma_i = 0$, $b_1 = 1$, $b_2 = 0.8$, $b_3 = 0.6$ и

$$\omega_1 = \sqrt{2}/4 \approx 0.35356, \quad \omega_2 = \sqrt{3}/4 \approx 0.43301, \quad \omega_3 = \sqrt{5}/5 \approx 0.44721,$$

то, обозначив $r_i(N) = \tilde{f}_{i,N} - f_{i,N}$ и определив максимальные ошибки восстановления как $\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)|$, а среднеквадратические ошибки восстановления формулой $\sqrt{\sum_{0 \leq i < N} r_i^2(N)/N}$, мы получим данные табл. 1 и 2, подтверждающие приведенные рассуждения.

Таблица 1. Максимальные ошибки восстановления при $L = N/2$

N	1-е слагаемое	2-е слагаемое	3-е слагаемое
500	0.051	0.094	0.092
1000	0.031	0.077	0.071
2000	0.026	0.064	0.055
5000	0.004	0.007	0.009

Таблица 2. Среднеквадратические ошибки восстановления при $L = N/2$

N	1-е слагаемое	2-е слагаемое	3-е слагаемое
500	0.0434	0.0209	0.0196
1000	0.0025	0.0124	0.0125
2000	0.0010	0.0069	0.0070
5000	0.0001	0.0006	0.0006

Как уже говорилось, все подобные результаты являются экспериментальными, т. е. формально не доказанными. В настоящей работе приведены достаточные условия асимптотической (при $N \rightarrow \infty$) разделимости гармоник (точную постановку задачи и полученный результат см. в разделе 4).

Эти условия проще всего объяснить при $r = 2$ с $|b_1| > |b_2|$. В этом случае компьютерные эксперименты показывают, что для успешного восстановления обоих слагаемых в (1) достаточно, чтобы (кроме условия $\omega_1 \neq \omega_2$) у гармоник были различные (и сколь угодно близкие) амплитуды $|b_1|, |b_2|$.

В утверждении, доказанном в настоящей статье (см. теорему 3 и Заключение), между $|b_1|$ и $|b_2|$ предполагается некий «зазор», т. е. отношение $|b_2|$ к $|b_1|$ считается достаточно малым (точнее, требуется, чтобы $|b_2/b_1| < 0.5$). При $r > 2$ все в целом аналогично.

Конечно, подобные ограничения являются весьма обременительными, однако при этом удастся доказать, что все ошибки восстановления имеют порядок $O(N^{-1})$.

Перейдем теперь к изложению содержания работы. Определяющим для доказательства теоремы 3 является следующее утверждение.

Обозначим при $n \geq 0, r \geq 2, 1 \leq k < r$ и $\omega_i \in (0, 1/2)$ с $\omega_i \neq \omega_j$ при $i \neq j$

$$f_n = f_n^{(k)} = \sum_{i=1}^k \beta_i \cos(2\pi\omega_i n + \gamma_i) \quad \text{и} \quad e_n = e_n^{(k)} = \sum_{i=k+1}^r \beta_i \cos(2\pi\omega_i n + \gamma_i),$$

где $1 = \beta_1 > |\beta_2| > \dots > |\beta_k| > |\beta_{k+1}| > \dots > |\beta_r| > 0$. (2)

Ряды с элементами f_n и e_n обозначим соответственно F и E , а при $0 \leq n < N - 1$ их отрезки f_0, \dots, f_{N-1} и e_0, \dots, e_{N-1} будем записывать как F_N и E_N .

Рассмотрим ряд $X_N = F_N + \delta E_N$ с элементами $x_n = f_n + \delta e_n, 0 \leq n < N - 1$, где δ — параметр возмущения.

Общая задача состоит в том, чтобы выделить сигнал F_N из суммы X_N при больших N с использованием метода АСС. Согласно [1] (см. также [4]) это происходит следующим образом.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 23-21-00222).
© Санкт-Петербургский государственный университет, 2023

После выбора *длины окна* $L < N$ ряд X_N преобразуется в ганкелеву (*траекторную*) матрицу $\mathbf{H}(\delta)$ размера $L \times K$ с элементами $\mathbf{H}(\delta)[ij] = x_{i+j-2}$, $1 \leq i \leq L$, $1 \leq j \leq K := N - L + 1$.

Затем осуществляется сингулярное разложение матрицы $\mathbf{H}(\delta)$. В [1] эта операция называется *вложением*.

Заметим, что $\text{rank } \mathbf{H}(\delta) = 2r$ при $\min(L, K) \geq 2r$. Поскольку в дальнейшем предполагается, что $N \rightarrow \infty$, а $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, то можно считать, что сингулярное разложение матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ состоит из суммы $2r$ элементарных (т. е. имеющих ранг 1) матриц.

Далее, обозначим через $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ сумму $2k$ главных (т. е. имеющих наибольшие нормы Фробениуса) элементарных матриц и найдем ближайшую (тоже в норме Фробениуса) к $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ ганкелеву матрицу. Применяв к этой матрице операцию, обратную вложению, получим ряд $F_N(\delta) = (f_0(\delta), \dots, f_{N-1}(\delta))$, который и объявляется приближением к сигналу F_N .

Согласно [1] ряд $F_N(\delta)$ называется *результатом восстановления ряда* F_N по первым $2k$ главным компонентам ряда X_N , а ряд с элементами $r_i(\delta) = r_i^{(k)}(\delta) = f_i - f_i(\delta)$ при $0 \leq i \leq N - 1$ — *рядом ошибок этого восстановления*.

Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $N \rightarrow \infty$ и $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, то $\max_i |r_i^{(k)}(\delta)| = O(N^{-1})$ при*

$$|\delta| < \delta^{(k)} := 0.5 \min \left(\frac{|\beta_{k+1}|}{|\beta_k|}, \frac{\beta_k^2}{\sum_{j=k+1}^r \beta_j^2} \right).$$

Доказательство этого факта основано на теории, развитой в [2], которая, в свою очередь, базируется на фундаментальных результатах Т. Като (см. [3]). В целях краткости изложения необходимое утверждение, фактически содержащееся в [2], сформулировано в теореме 2 раздела 3, все остальное в этом разделе — это применение теоремы 2 в конкретных условиях настоящей задачи.

Для этого применения оказалось необходимым доказать многочисленные вспомогательные утверждения, сосредоточенные в разделе 2. Так, в раздел 2.1 представлено несколько элементарных тождеств, связанных с суммированием произведений синусов и косинусов, раздел 2.2 посвящен доказательству предложения 1, необходимого для нахождения асимптотик положительных собственных чисел нужных нам матриц, а в разделе 2.3 содержатся факты, относящиеся к асимптотическому поведению равномерных норм некоторых матриц растущей размерности.

Собрав все эти утверждения вместе, мы и получаем доказательство теоремы 1. Наконец, раздел 4 посвящен собственно доказательству теоремы 3, являющейся, как уже говорилось, целью настоящей работы и дающий достаточные условия разделимости гармоник в терминах их амплитуд [см. формулу (17)].

2. Вспомогательные факты. 2.1. Элементарные тождества. Следующие тождества, необходимые для всего дальнейшего, легко доказываются представлением синусов и косинусов через мнимые экспоненты.

Лемма 1. *Пусть $\omega_1, \omega_2 \in (0, 1/2)$. Обозначим $\cos_{j1}(\gamma) = \cos(2\pi\omega_1 j + \gamma)$, $\cos_{j2}(\gamma) = \cos(2\pi\omega_2 j + \gamma)$, $\sin_{j1}(\gamma) = \sin(2\pi\omega_1 j + \gamma)$, и $\sin_{j2}(\gamma) = \sin(2\pi\omega_2 j + \gamma)$.*

Тогда

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos_{j_1}(\gamma_1) \cos_{j_2}(\gamma_2) = \frac{\sin(\pi(\omega_1 + \omega_2)n)}{2 \sin(\pi(\omega_1 + \omega_2))} \cos(\pi(\omega_1 + \omega_2)(n-1) + \gamma_1 + \gamma_2) + \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{\sin(\pi(\omega_1 - \omega_2)n)}{\sin(\pi(\omega_1 - \omega_2))} \cos(\pi(\omega_1 - \omega_2)(n-1) + \gamma_1 - \gamma_2) & \text{при } \omega_1 \neq \omega_2, \\ n \cos(\gamma_1 - \gamma_2) & \text{при } \omega_1 = \omega_2, \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sin_{j_1}(\gamma_1) \sin_{j_2}(\gamma_2) = -\frac{\sin(\pi(\omega_1 + \omega_2)n)}{2 \sin(\pi(\omega_1 + \omega_2))} \cos(\pi(\omega_1 + \omega_2)(n-1) + \gamma_1 + \gamma_2) + \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{\sin(\pi(\omega_1 - \omega_2)n)}{\sin(\pi(\omega_1 - \omega_2))} \cos(\pi(\omega_1 - \omega_2)(n-1) + \gamma_1 - \gamma_2) & \text{при } \omega_1 \neq \omega_2, \\ n \cos(\gamma_1 - \gamma_2) & \text{при } \omega_1 = \omega_2, \end{cases} \quad (4)$$

и

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos_{j_1}(\gamma_1) \sin_{j_2}(\gamma_2) = \frac{\sin(\pi(\omega_1 + \omega_2)n)}{2 \sin(\pi(\omega_1 + \omega_2))} \sin(\pi(\omega_1 + \omega_2)(n-1) + \gamma_1 + \gamma_2) - \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{\sin(\pi(\omega_1 - \omega_2)n)}{\sin(\pi(\omega_1 - \omega_2))} \sin(\pi(\omega_1 - \omega_2)(n-1) + \gamma_1 - \gamma_2) & \text{при } \omega_1 \neq \omega_2, \\ n \sin(\gamma_1 - \gamma_2) & \text{при } \omega_1 = \omega_2. \end{cases} \quad (5)$$

2.2. Асимптотика собственных чисел матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ и $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$. Обозначим \mathbf{H} и \mathbf{E} как ганкелевы матрицы размера $L \times K$, построенные из рядов F_N и E_N точно так же, как матрица $\mathbf{H}(\delta)$ строится исходя из ряда X_N . Если L и K достаточно большие, то $\text{rank } \mathbf{H} = 2k$ и $\text{rank } \mathbf{E} = 2(r - k)$.

В дальнейшем нам понадобятся результаты о поведении положительных собственных чисел матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ и $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$ при больших значениях длины ряда N . Эти результаты получаются с использованием леммы 2.1 статьи [5]. Сформулируем сначала эту лемму.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{G} : \mathbb{R}^K \mapsto \mathbb{R}^L$ и обозначим $d = \text{rank } \mathbf{G}$. Предположим, что $\mathbf{G} = \sum_{k=1}^d P_k Q_k^T$, где $P_k \in \mathbb{R}^L$ и $Q_k \in \mathbb{R}^K$, причем вектора P_1, \dots, P_d (и вектора Q_1, \dots, Q_d) линейно независимы. Обозначим $X_i = P_i / \|P_i\|$, $Y_i = Q_i / \|Q_i\|$,

$$\mathbf{X} = [X_1 : \dots : X_d], \quad \mathbf{Y} = [Y_1 : \dots : Y_d],$$

$\mathbf{U} = [P_1 : \dots : P_d]$ и $\mathbf{V} = [Q_1 : \dots : Q_d]$. Также положим

$$\Pi_P = \begin{pmatrix} \|P_1\| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|P_2\| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|P_d\| \end{pmatrix}, \quad \Pi_Q = \begin{pmatrix} \|Q_1\| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \|Q_2\| & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \|Q_d\| \end{pmatrix}$$

и $\Pi_{PQ} = \Pi_P \Pi_Q$. Наконец, обозначим $\mathbf{C} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \Pi_{PQ} \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \Pi_{PQ}$.

Лемма 2. Пусть λ – положительное собственное число матрицы $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$, соответствующее собственному вектору \mathbf{Z} . Тогда λ – собственное число матрицы \mathbf{C} , соответствующее ненулевому собственному вектору $\mathbf{X}^T \mathbf{Z}$.

Как уже говорилось, доказательство этой леммы можно найти в [5, лемма 2.1]. Применим ее результат для наших целей.

Рассмотрим ряд $y_n = \sum_{\ell=1}^p \Delta_\ell \cos(2\pi\omega_\ell n + \gamma_\ell)$ с $\omega_\ell \in (0, 1/2)$, $\omega_\ell \neq \omega_j$ при $\ell \neq j$ и $|\Delta_1| \geq |\Delta_2| \geq \dots \geq |\Delta_p| > 0$. Обозначая $\cos_{k\ell}(\varphi_\ell) = \cos(2\pi k\omega_\ell + \varphi_\ell)$ и $\sin_{k\ell}(\varphi_\ell) = \sin(2\pi k\omega_\ell + \varphi_\ell)$, положим

$$C_{j\ell} = (\cos_{0\ell}(\psi_\ell), \dots, \cos_{j-1\ell}(\psi_\ell))^T \quad \text{и} \quad S_{j\ell} = (\sin_{0\ell}(\psi_\ell), \dots, \sin_{j-1\ell}(\psi_\ell))^T,$$

где $\psi_\ell = \gamma_\ell/2$. Кроме того, введем обозначения

$$X_\ell = \begin{cases} \text{sign } \Delta_\ell C_{L\ell} / \|C_{L\ell}\| & \text{при } 1 \leq \ell \leq p, \\ -\text{sign } \Delta_{p-\ell} S_{L\ell-r} / \|S_{L\ell-r}\| & \text{при } p < \ell \leq 2p, \end{cases}$$

$$Y_\ell = \begin{cases} C_{K\ell} / \|C_{K\ell}\| & \text{при } 1 \leq \ell \leq p, \\ S_{K\ell-p} / \|S_{K\ell-p}\| & \text{при } p < \ell \leq 2p, \end{cases}$$

$\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_{2p}]$, $\mathbf{Y} = [Y_1, \dots, Y_{2p}]$, $\mathbf{C}_{L,X} = \mathbf{X}^T \mathbf{X}$ и $\mathbf{C}_{K,Y} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$. Далее, введем $2r \times 2r$ диагональные матрицы $\mathbf{\Pi}_{P,L}$, $\mathbf{\Pi}_{Q,K}$ и \mathbf{D} с элементами

$$[\mathbf{\Pi}_{P,L}]_{\ell,\ell} = \begin{cases} \Delta_\ell \|C_{L\ell}\| & \text{при } 1 \leq \ell \leq p, \\ -\Delta_{p-\ell} \|S_{Lp-\ell}\| & \text{при } p < \ell \leq 2p, \end{cases}$$

$$[\mathbf{\Pi}_{Q,K}]_{\ell,\ell} = \begin{cases} \|C_{K\ell}\| & \text{при } 1 \leq \ell \leq p, \\ \|S_{Kp-\ell}\| & \text{при } p < \ell \leq 2p, \end{cases}$$

$$\mathbf{D}[\ell, \ell] = \begin{cases} \Delta_\ell & \text{при } 1 \leq \ell \leq p, \\ -\Delta_{p-\ell} & \text{при } p < \ell \leq 2p \end{cases}$$

и положим $\mathbf{\Pi}_{PQ} = \mathbf{\Pi}_{P,L} \mathbf{\Pi}_{Q,K}$. Наконец, пусть \mathbf{G} – траекторная матрица ряда y_n размерности $L \times K$, а $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{2p}$ – положительные собственные числа матрицы $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$.

Предложение 1. Если $\min(L, K) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, то $\lambda_i / LK \rightarrow \Delta_{[i/2]}^2 / 4$.

Доказательство. Так как

$$y_{n+m} = \sum_{\ell=1}^p \Delta_\ell \cos(2\pi n\omega_\ell + \psi_\ell) \cos(2\pi m\omega_\ell + \psi_\ell) - \sum_{\ell=1}^p \Delta_\ell \sin(2\pi n\omega_\ell + \psi_\ell) \sin(2\pi m\omega_\ell + \psi_\ell),$$

\mathbf{G} может быть представлена в виде

$$\mathbf{G} = \sum_{\ell=1}^p \Delta_\ell C_{L\ell} C_{K\ell}^T - \sum_{\ell=1}^p \Delta_\ell S_{L\ell} S_{K\ell}^T = \mathbf{X} \mathbf{\Pi}_{PQ} \mathbf{Y}^T.$$

Согласно лемме 2 множество положительных собственных чисел матрицы $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ совпадает со спектром матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{L,X}\mathbf{\Pi}_{PQ}\mathbf{C}_{K,Y}\mathbf{\Pi}_{PQ}$.

Так как элементы матрицы $\mathbf{C}_{K,Y}$ имеют вид

$$c_{\ell m}^{(K,Y)} = \begin{cases} C_{K\ell}^T C_{Km} / \|C_{K\ell}\| \|C_{Km}\| & \text{при } \ell, m \leq p, \\ S_{K\ell}^T S_{Km} / \|S_{K\ell}\| \|S_{Km}\| & \text{при } \ell, m > p, \\ C_{K\ell}^T S_{Km} / \|C_{K\ell}\| \|S_{Km}\| & \text{при } \ell \leq p \text{ и } m > p, \\ S_{K\ell}^T C_{Km} / \|S_{K\ell}\| \|C_{Km}\| & \text{при } \ell > p \text{ и } m \leq p, \end{cases}$$

то, согласно лемме 1, матрицы $\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \mathbf{C}_{K,Y}$ поэлементно сходятся при $K \rightarrow \infty$ к единичной матрице \mathbf{I}_{2p} размера $2p \times 2p$. Точно так же матрицы $\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{C}_{L,X}$ сходятся к \mathbf{I}_{2p} при $L \rightarrow \infty$.

Далее, $\sqrt{2}\mathbf{\Pi}_{P,L}/\sqrt{L} \rightarrow \mathbf{D}$ при $L \rightarrow \infty$ и соответственно $\sqrt{2}\mathbf{\Pi}_{Q,K}/\sqrt{K} \rightarrow \mathbf{I}_{2r}$ при $K \rightarrow \infty$. Это означает, что $4\mathbf{C}/KL \rightarrow \mathbf{D}^2$ при $L, K \rightarrow \infty$.

Поскольку \mathbf{D}^2 — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\Delta_1^2, \dots, \Delta_p^2, \Delta_1^2, \dots, \Delta_p^2,$$

а $\Delta_1^2 \geq \dots \geq \Delta_p^2 > 0$, то утверждение доказано. \square

Следствие 1. Рассмотрим траекторные матрицы \mathbf{H} и \mathbf{E} размером $L \times K$, построенные из рядов \mathbf{F}_N и \mathbf{E}_N соответственно. Пусть $L \sim \alpha N$ с $\alpha \in (0, 1)$ при $N \rightarrow \infty$.

Обозначим μ_1, \dots, μ_{2k} и $\mu_{2k+1}, \dots, \mu_{2r}$ как положительные собственные числа матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ и $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$ соответственно. Тогда, согласно Предложению 1, при $1 \leq i \leq 2r$

$$\mu_i/N^2 \rightarrow \alpha(1 - \alpha)\beta_{\lceil i/2 \rceil}^2/4.$$

В частности, если обозначить μ_{\max} и μ_{\min} как максимальное и минимальное положительные собственные числа матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$, то окажется, что

$$\mu_{\max} \sim N^2\alpha(1 - \alpha)/4 \quad \text{и} \quad \mu_{\min} \sim \beta_k^2 N^2\alpha(1 - \alpha)/4.$$

При этом все μ_i при $1 \leq i \leq 2r$ имеют порядок роста N^2 , а $\|\mathbf{H}\|$ и $\|\mathbf{E}\|$ растут линейно по N при $N \rightarrow \infty$.

2.3. Об асимптотике равномерной нормы некоторых матриц. В настоящей работе используются две матричные нормы. Спектральная норма $\|\mathbf{K}\|$ матрицы \mathbf{K} — это максимальное ее сингулярное число, иначе говоря, $\|\mathbf{K}\|^2$ — максимальное собственное число матрицы $\mathbf{K}\mathbf{K}^T$.

Равномерная норма $\|\mathbf{K}\|_{\max}$ — максимум из модулей элементов $L \times K$ матрицы \mathbf{K} . Эти нормы связаны следующими неравенствами (см. [7, § 2.3.2]):

$$\|\mathbf{K}\|_{\max} \leq \|\mathbf{K}\| \leq \sqrt{LK}\|\mathbf{K}\|_{\max}. \quad (6)$$

Кроме того, если \mathbf{K}_1 и \mathbf{K}_2 — матрицы размера соответственно $L \times K$ и $K \times M$, то

$$\|\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\|_{\max} \leq K \|\mathbf{K}_1\|_{\max} \|\mathbf{K}_2\|_{\max}. \quad (7)$$

В этом разделе помещены оценки скорости сходимости равномерных норм некоторых траекторных матриц для длинных рядов.

Так как $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{H}_i$, где \mathbf{H}_i — ганкелева матрица, порожденная рядом $f_{in} = \cos(2\pi\omega_i n + \gamma_i)$ с $i \leq k$, то $\|\mathbf{H}\|_{\max} \leq \sum_{i=1}^k |\beta_i|$. Аналогично $\|\mathbf{E}\|_{\max} \leq \sum_{i=k+1}^r |\beta_i|$.

Лемма 3. Рассмотрим сингулярное разложение матрицы \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{2k} \sqrt{\mu_i} U_i V_i^T,$$

причем предположим, что $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$. Обозначим $\mathbf{P}_{\mu_i} = U_i U_i^T$ как ортогональный проектор на одномерное пространство, порожденное собственным вектором U_i матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ с собственным числом μ_i , $i \leq 2k$.

Тогда $\|\mathbf{P}_{\mu_i} \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$, $\|\mathbf{P}_{\mu_i} \mathbf{H}\|_{\max} = O(1)$ и $\|\mathbf{P}_{\mu_i} \mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с $\|\mathbf{P}_{\mu_i} \mathbf{E}\|_{\max}$. Обозначим при $1 \leq j \leq k$

$$P_{j1} = (1, \cos(2\pi\omega_j), \dots, \cos(2\pi\omega_j(L-1)))^T,$$

$$P_{j2} = (0, \sin(2\pi\omega_j), \dots, \sin(2\pi\omega_j(L-1)))^T,$$

$$Q_{j1} = (1, \cos(2\pi\omega_j), \dots, \cos(2\pi\omega_j(K-1)))^T,$$

$$Q_{j2} = (0, \sin(2\pi\omega_j), \dots, \sin(2\pi\omega_j(K-1)))^T.$$

Тогда $U_i = \sum_{j=1}^k a_{ij1} P_{j1} / \|P_{j1}\| + \sum_{j=1}^k a_{ij2} P_{j2} / \|P_{j2}\|$, причем

$$1 = \|U_i\|^2 = \sum_{j=1}^k a_{ij1}^2 + \sum_{j=1}^k a_{ij2}^2 + 2 \sum_{m \neq \ell} a_{im1} a_{i\ell 1} (P_{m1}, P_{\ell 1}) / \|P_{m1}\| \|P_{\ell 1}\| + \\ + 2 \sum_{m \neq \ell} a_{im2} a_{i\ell 2} (P_{m2}, P_{\ell 2}) / \|P_{m2}\| \|P_{\ell 2}\| + 2 \sum_{1 \leq m, \ell \leq k} a_{im1} a_{i\ell 2} (P_{m1}, P_{\ell 2}) / \|P_{m1}\| \|P_{\ell 2}\|. \quad (8)$$

Поскольку, согласно лемме 1, все скалярные произведения в (8) ограничены по модулю, а нормы $\|P_{mi}\|$ растут как \sqrt{N} , то коэффициенты a_{ij1} и a_{ij2} тоже ограничены.

Далее,

$$\mathbf{P}_{\mu_i} = U_i U_i^T = \sum_{j,m=1}^k a_{ij1} a_{im1} P_{j1} P_{j1}^T / \|P_{j1}\| \|P_{m1}\| + \sum_{j,m=1}^k a_{ij2} a_{im2} P_{j2} P_{j2}^T / \|P_{j2}\| \|P_{m2}\| + \\ + 2 \sum_{j,m=1}^k a_{ij1} a_{im2} (P_{j1} P_{m2}^T + P_{m2} P_{j1}^T) / \|P_{j1}\| \|P_{m2}\|.$$

Заметим, что $\mathbf{E} = \sum_{i=k+1}^r \beta_i \mathbf{E}_i$. Так как, согласно неравенству (7), $\|P_{j\ell} P_{mq}^T \mathbf{E}_i\|_{\max} \leq \|P_{j\ell}\|_{\max} \|P_k^T \mathbf{E}_i\|_{\max}$, а $\|P_{mq}^T \mathbf{E}\|_{\max} = O(1)$ ввиду леммы 1, то первое утверждение доказано.

Далее, $V_i = \sum_{j=1}^k b_{ij1} Q_{j1} / \|Q_{j1}\| + \sum_{j=1}^k b_{ij2} Q_{j2} / \|Q_{j2}\|$, где, как и в первом случае, $|b_{ij1}| + |b_{ij2}| = O(1)$ при $N \rightarrow \infty$ для любых i, j . Поскольку

$$\mathbf{P}_{\mu_i} \mathbf{H} = \sqrt{\mu_i} U_i V_i^T = \sqrt{\mu_i} \left(\sum_{j=1}^k \sum_{m=1,2} a_{ijm} P_{jm} / \|P_{jm}\| \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \sum_{p=1,2} b_{i\ell p} Q_{\ell p} / \|Q_{\ell p}\| \right)^T = \\ = \sqrt{\mu_i} \sum_{j,\ell=1}^k \sum_{m,p=1,2} a_{ijm} b_{i\ell p} P_{jm} Q_{\ell p}^T / \|P_{jm}\| \|Q_{\ell p}\|,$$

а $\|P_{jm}Q_{\ell p}^T\|_{\max} = O(1)$ и $\sqrt{\mu_i}/\|P_{jm}\|\|Q_{\ell p}\| = O(1)$ при $N \rightarrow \infty$, то $\|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(1)$. Аналогичным образом, так как

$$\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\mathbf{E}^T = \sqrt{\mu_i} \sum_{q=k+1}^r \beta_q \sum_{j,\ell=1}^k \sum_{m,p=1,2} a_{ijm} b_{i\ell p} P_{jm} Q_{\ell p}^T \mathbf{E}_q^T / \|P_{jm}\|\|Q_{\ell p}\|,$$

$\|Q_m^T \mathbf{E}^T\|_{\max} = O(1)$ (см. лемму 1), а по неравенству (7)

$$\|P_{jm}Q_{\ell p}^T \mathbf{E}_q^T\|_{\max} \leq \|P_{jm}\|_{\max} \|Q_{\ell p}^T \mathbf{E}_q^T\|_{\max} = O(1),$$

то все утверждения леммы доказаны. \square

Введем следующие обозначения: U_0^\perp — линейное пространство столбцов матрицы \mathbf{H} ; \mathbf{P}_0^\perp — ортогональный проектор на это подпространство, а $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_{2k} - \mathbf{P}_0^\perp$ — ортогональный проектор на ортогональное дополнение U_0 к U_0^\perp .

Лемма 4. Пусть $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда

1. $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = \|\mathbf{E}\mathbf{H}^T\|_{\max} = O(1)$.

2. Существуют такие постоянные C_f и C_e , что

$$\|\mathbf{H}\mathbf{H}^T\|_{\max} \leq 0.5K \sum_{i=1}^k \beta_i^2 + C_f = O(N) \quad \text{и} \quad (9)$$

$$\|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\|_{\max} \leq 0.5K \sum_{i=k+1}^r \beta_i^2 + C_e = O(N). \quad (10)$$

3. $\|\mathbf{B}(\delta)\|_{\max} = O(N)$.

4. $\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N)$.

5. $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.

6. $\|\mathbf{P}_0 \mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N)$.

7. $\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N)$.

8. $\|\mathbf{P}_0 \mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Следует из того, что $\mathbf{H}\mathbf{E}^T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=k+1}^r \beta_i \beta_j \mathbf{H}_i \mathbf{E}_j^T$, а, согласно равенству (3) для случая $\omega_1 \neq \omega_2$, $\|\mathbf{H}_i \mathbf{E}_j^T\|_{\max} = O(1)$.

2. Следует из равенства $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \beta_i \beta_j \mathbf{H}_i \mathbf{H}_j^T$, а также из того, что

$$\|\mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^T\|_{\max} \leq 0.5K + 0.5 \frac{1}{\sin(\pi\omega_i)},$$

а при $i \neq j$

$$\|\mathbf{H}_i \mathbf{H}_j^T\|_{\max} \leq 0.5 \left(\frac{1}{\sin(\pi|\omega_i - \omega_j|) + \sin(\pi|\omega_i + \omega_j|)} \right),$$

(см. равенство (3) леммы 1 при $\omega_1 = \omega_2$ и $\omega_1 \neq \omega_2$). Для случая $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$ все абсолютно аналогично.

3. Следует из определения $\mathbf{B}(\delta)$ и уже доказанных соотношений.

4. Используя неравенство (7) и лемму 3, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} &\leq |\delta| \|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + |\delta| \|\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + \delta^2 \|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} \leq \\ &\leq 2|\delta| L \|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + \delta^2 L^2 \|\mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{H}\|_{\max} = O(N). \end{aligned}$$

5. Так как $\mathbf{P}_0^\perp = \sum_{i=1}^{2k} \mathbf{P}_{\mu_i}$, то требуемое соотношение следует из леммы 3.

6. Заметим, что $\|\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} \leq \|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max}$. Далее,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} &\leq |\delta| \|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + \\ &+ |\delta| \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} + \delta^2 \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max}. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} &\leq L \|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N), \\ \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{H}\|_{\max} &\leq L^2 \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{H}^T\|_{\max} \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N), \\ \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} &\leq L^2 \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{H}\|_{\max} = O(1), \end{aligned}$$

то $\|\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{H}\|_{\max} = O(N)$ и, следовательно, утверждение доказано.

7. Следует из неравенства $\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \leq L \|\mathbf{B}(\delta)\|_{\max} \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}$ и леммы 3.

8. Так как $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}_{2k} - \mathbf{P}_0^\perp$, то

$$\|\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \leq \|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} + \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max}.$$

Первое слагаемое уже изучено (см. п. 4 настоящей леммы). Что касается второго слагаемого, то

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} &\leq |\delta| \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} + |\delta| \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} + \\ &+ \delta^2 \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = |\delta| J_1 + |\delta| J_2 + \delta^2 J_3. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} J_1 &= \|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \leq L \|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(1), \\ J_2 &\leq L^2 \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{H}\|_{\max} = O(1) \end{aligned}$$

и аналогично $J_3 = O(1)$, откуда и следует требуемое. \square

3. Основная теорема и ее применение. Обозначим, следуя [2], $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}\mathbf{E}^T + \mathbf{E}\mathbf{H}^T$, $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}\mathbf{E}^T$, $\mathbf{B}(\delta) = \delta\mathbf{A}^{(1)} + \delta^2\mathbf{A}^{(2)}$. Пусть, кроме того, μ_{\min} — минимальное положительное собственное число матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ и $B(\delta) := |\delta| \|\mathbf{A}^{(1)}\| + \delta^2 \|\mathbf{A}^{(2)}\|$.

Следующее утверждение является основным для получения окончательного результата — теоремы 3. Обозначим $\mathbf{A}_0^{(2)} = \mathbf{P}_0\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{P}_0$ и \mathbf{S}_0 — псевдообратную матрицу Мура — Пенроуза к матрице $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ с $\|\mathbf{S}_0\| = 1/\mu_{\min}$. Как и в лемме 3, пусть \mathbf{P}_{μ_i} — ортогональный проектор на одномерное пространство, порожденное собственным вектором U_i матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ с собственным числом μ_i , при этом $\mu_1 = \mu_{\max}$ и $\mu_{2k} = \mu_{\min}$.

Теорема 2. Пусть существует такое $\delta_k > 0$, что $B(\delta_k) \leq \mu_{\min}/4$. Тогда при $|\delta| < \delta_k$ имеет место неравенство $\|\delta \mathbf{A}_0^{(2)}/\mu_{\min}\| < 1$ и матрица $\mathbf{I} - \delta \mathbf{A}_0^{(2)}/\mu_{\min}$ обратима.

Обозначим $r_i(\delta) = r_i(\delta, N)$, $0 \leq i \leq N-1$, ошибки восстановления ряда X_N по X первым $2k$ главным компонентам методом АСС.

Кроме того, положим $\mathbf{L}(\delta) = \mathbf{L}_1(\delta) + \mathbf{L}_1^T(\delta)$ с

$$\mathbf{L}_1(\delta) = \sum_{i=1}^{2k} \frac{\mathbf{P}_{\mu_i} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0}{\mu_i} \left(\mathbf{I} - \delta \mathbf{A}_0^{(2)}/\mu_i \right)^{-1}. \quad (11)$$

Тогда при $|\delta| < \delta_k$

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i < N} |r_i(\delta)| &\leq C \frac{\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta)\| \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}} \|\mathbf{H}\| + \\ &+ \|\mathbf{L}(\delta) \mathbf{H}\|_{\max} + |\delta| \|\mathbf{L}(\delta) \mathbf{E}\|_{\max} + |\delta| \|\mathbf{P}_0^{\perp} \mathbf{E}\|_{\max}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $C > 0$ — некоторая абсолютная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этого факта непосредственно вытекает из [2, теор. 2.5 и § 5.3], а также левого из неравенств (6). Заметим, что неравенство (12) фактически использовалось в [2, § 5.3.1] и в разделе 3 статьи [6]. \square

Лемма 5. Пусть $N \rightarrow \infty$ и $L \sim \alpha N$ с $\alpha \in (0, 1)$. Тогда существуют такие $\delta_k > 0$ и N_k , что при $N > N_k$ и $|\delta| < \delta_k$ выполняется неравенство $B(\delta) < \mu_{\min}/4$. При этом $1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} > 0$ при $|\delta| < \delta_k$ и достаточно большом N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из того, что μ_{\min} и $B(\delta)$ имеют одинаковый порядок роста при $N \rightarrow \infty$.

Действительно, $\mu_{\min} \sim \beta_k^2 \alpha (1 - \alpha) N^2/4$ при $N \rightarrow \infty$. Из п. 1 леммы 4 следует, что $\|\mathbf{A}^{(1)}\|_{\max} = O(1)$, поэтому $\|\mathbf{A}^{(1)}\| = O(N)$ [см. неравенство (6)].

Так как $\|\mathbf{A}^{(2)}\| = \mu_{2k+2} \sim \beta_{k+1}^2 \alpha (1 - \alpha) N^2/4$, то $B(\delta)/\mu_{\min} \rightarrow \delta^2 \beta_{k+1}^2/\beta_k^2$ при любом δ , откуда и следует требуемое с $\delta_k = 0.5|\beta_k|/|\beta_{k+1}|$.

Второе утверждение следует из того, что $\|\mathbf{B}(\delta)\| \leq B(\delta)$. \square

Дальнейшее действие состоит в получении оценок сверху всех слагаемых в правой части (12). Для этого нам понадобится еще несколько лемм, причем везде будет предполагаться, что $N \rightarrow \infty$ и $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$.

Лемма 6. Если $N \rightarrow \infty$ и $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, то $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta)\| = O(N^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\|\mathbf{S}_0\| = 1/\mu_{\min} \asymp N^{-2}$, а, как уже отмечалось, $\|\mathbf{A}^{(1)}\| = O(N)$, то нужно разобраться с нормой $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{A}^{(2)}\|$.

Так как $\mathbf{H} \mathbf{H}^T = \sum_{i=1}^{2k} \mu_i \mathbf{P}_{\mu_i}$, то $\mathbf{S}_0 = \sum_{i=1}^{2k} \mathbf{P}_{\mu_i}/\mu_i$ и

$$\begin{aligned} \|\mathbf{S}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T\| &\leq \sum_{i=1}^{2k} \|\mathbf{P}_{\mu_i} \mathbf{E} \mathbf{E}^T\|/\mu_i \leq \sum_{i=1}^{2k} \|\mathbf{P}_{\mu_i} \mathbf{E}\| \|\mathbf{E}\|/\mu_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{2k} \frac{\sqrt{LK}}{\mu_i} \|\mathbf{P}_{\mu_i} \mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{E}\| = O(N^{-1}), \end{aligned}$$

что и заканчивает доказательство. \square

Следствие 2. Если $|\delta| < \delta_k = 0.5|\beta_k|/|\beta_{k+1}|$, то в условиях леммы 6

$$\frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\| \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}} \|\mathbf{H}\| = O(N^{-1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 6

$$\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\| \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \leq \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\|^2 = O(N^{-2}).$$

Поскольку $\|\mathbf{H}\| = O(N)$, а $1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} > 0$ при $|\delta| < \delta_k$, то утверждение доказано. \square

Лемма 7. Обозначим $\mathbf{Z}_i = \delta\mathbf{A}_0^{(2)}/\mu_i = \delta\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0/\mu_i$ при $i = 1, \dots, 2k$. Тогда

$$\left\| \sum_{n \geq 1} \mathbf{Z}_i^n \right\|_{\max} = O(N^{-1}) \quad (13)$$

при достаточно малых δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $\|\mathbf{Z}_i\|_{\max} \leq |\delta|c/N$ при некотором $c > 0$.

Заметим, что $\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}\mathbf{E}^T - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{E}^T - \mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0^\perp + \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0^\perp$. Далее, согласно п. 2 леммы 4,

$$\|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\|_{\max} \leq 0.5K \sum_{j=k+1}^r \beta_j^2 + C_e.$$

Кроме того [см. п. 5 леммы 4 и неравенство (7)],

$$\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{E}^T\|_{\max} \leq L \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{E}\|_{\max} = O(1)$$

и $\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0^\perp\|_{\max} \leq L\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}^2 = O(N^{-1})$.

Тогда, так как (см. следствие 1) $\mu_i/N^2 \rightarrow \alpha(1 - \alpha)\beta_{\lceil i/2 \rceil}^2/4$, то

$$\begin{aligned} \|\mathbf{Z}_i\|_{\max} &\leq |\delta| \left(\frac{0.5K \sum_{j=k+1}^r \beta_j^2}{\mu_i} + O(N^{-1}) \right) \leq |\delta| \frac{\varkappa \sum_{j=k+1}^r \beta_j^2}{\alpha\beta_{\lceil i/2 \rceil}^2} \leq \\ &\leq |\delta| \frac{\varkappa \sum_{j=k+1}^r \beta_j^2/\beta_k^2}{\alpha} \frac{1}{N} \end{aligned}$$

при некотором $\varkappa > 2$. Поэтому неравенство $\|\mathbf{Z}_i\|_{\max} \leq |\delta|c/N$ доказано при

$$c = \frac{\varkappa \sum_{j=k+1}^r \beta_j^2/\beta_k^2}{\alpha}.$$

Далее, если взять

$$|\delta| < \delta^{(k,2)} := \frac{1}{2 \sum_{j=k+1}^r \beta_j^2/\beta_k^2} < 1/c, \quad (14)$$

то мы получим неравенство $|\delta|c < 1$. При этом условии легко показать, что $\|\mathbf{Z}_i^n\|_{\max} \leq |\delta|^n c^n/N$ для любого $n \geq 1$. Действительно, так как $\|\mathbf{Z}_i^n\|_{\max} \leq$

$L\|\mathbf{Z}^{n-1}\|_{\max}\|\mathbf{Z}\|_{\max}$ и $L\|\mathbf{Z}_i\|_{\max} \leq |\delta|c$, то это доказывается с помощью простой индукции. Отсюда сразу же следует нужное нам неравенство

$$\left\| \sum_{\ell \geq 1} \mathbf{Z}_i^\ell \right\|_{\max} \leq \frac{|\delta|c}{1 - |\delta|c} \frac{1}{N}, \quad (15)$$

и утверждение доказано. \square

Теперь рассмотрим матрицы $\mathbf{L}(\delta)\mathbf{H}$.

Лемма 8. $\|\mathbf{L}(\delta)\mathbf{H}\|_{\max} = O(N^{-1})$ при $N \rightarrow \infty$ и достаточно малых δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbf{P}_0\mathbf{H} = \mathbf{0}$, то $\mathbf{Z}_i\mathbf{H} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{L}_1(\delta)\mathbf{H} = \mathbf{0}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\delta)\mathbf{H} &= \mathbf{L}_1^T(\delta)\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{2k} \mathbf{L}_{1i}^T(\delta)\mathbf{H} \text{ с } \mathbf{L}_{1i}^T(\delta) = (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_i)^{-1} \frac{\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}}{\mu_i}, \text{ причем} \\ \mathbf{L}_{1i}^T(\delta)\mathbf{H} &= \frac{\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}}{\mu_i} + \left(\sum_{\ell \geq 1} \mathbf{Z}_i^\ell \right) \frac{\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}}{\mu_i}. \end{aligned}$$

Далее, по пп. 4 и 6 леммы 4, $\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N)$ и $\|\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N)$. Поэтому, согласно лемме 7,

$$\left\| \left(\sum_{\ell \geq 1} \mathbf{Z}_i^\ell \right) \mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H} \right\|_{\max} \leq L \left\| \sum_{\ell \geq 1} \mathbf{Z}_i^\ell \right\|_{\max} \|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\|_{\max} = O(N),$$

и утверждение доказано. \square

Лемма 9. При достаточно малом δ и $N \rightarrow \infty$, $\|\mathbf{L}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению $\mathbf{L}(\delta)\mathbf{E} = \mathbf{L}_1(\delta)\mathbf{E} + \mathbf{L}_1^T(\delta)\mathbf{E}$ с

$$\mathbf{L}_1(\delta)\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{2k} \mathbf{L}_{1i}(\delta)\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{2k} \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0}{\mu_i} (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_i)^{-1} \mathbf{E}.$$

Начнем с $\|\mathbf{L}_1(\delta)\mathbf{E}\|_{\max}$. Так как

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{1i}(\delta)\mathbf{E} &= \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0}{\mu_i} (\mathbf{I} - \mathbf{Z}_i)^{-1} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0}{\mu_i} \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0}{\mu_i} \left(\sum_{\ell \geq 1} \mathbf{Z}_i^\ell \right) \mathbf{E} = \\ &= \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{E}}{\mu_i} - \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}}{\mu_i} + \frac{\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)}{\mu_i} \left(\sum_{\ell \geq 1} \mathbf{Z}_i^\ell \right) \mathbf{E}, \text{ а} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\|_{\max} &\leq |\delta| \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} + |\delta| \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\mathbf{H}^T\|_{\max} + \delta^2 \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\mathbf{E}^T\|_{\max} \leq \\ &\leq |\delta| \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} + |\delta| L \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{H}\|_{\max} + \delta^2 L \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} \|\mathbf{E}\|_{\max} = O(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} &\leq L \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\|_{\max} \|\mathbf{E}\|_{\max} = O(N), \text{ и} \\ \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} &\leq L \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\|_{\max} \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = O(1), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}_{1i}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} &\leq \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{E}\|_{\max}/\mu_i + \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}/\mu_i + \\ &+ L^2 \|\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{B}(\delta)\|_{\max} \left\| \left(\sum_{\ell \geq 1} \mathbf{Z}_i^\ell \right) \right\|_{\max} \|\mathbf{E}\|_{\max}/\mu_i = O(N^{-1}). \end{aligned}$$

Перейдем к $\|\mathbf{L}_1^T(\delta)\mathbf{E}\|_{\max}$.

$$\mathbf{L}_{1i}^T(\delta)\mathbf{E} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_i\right)^{-1} \frac{\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}}{\mu_i} = \frac{\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}}{\mu_i} + \left(\sum_{\ell \geq 1} \mathbf{Z}_i^\ell\right) \frac{\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}}{\mu_i}.$$

Так как (см. пп. 7 и 8 леммы 4) $\|\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N)$ и $\|\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_{\mu_i}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N)$, а $\left\| \sum_{\ell \geq 1} \mathbf{Z}_i^\ell \right\| = O(N^{-1})$ (см. лемму 7), то

$$\|\mathbf{L}_1^T(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} \leq \|\mathbf{L}_{11}^T(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} + \|\mathbf{L}_{12}^T(\delta)\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1}).$$

Утверждение доказано. \square

Собрав вместе результаты следствия 2, лемм 8 и 9, а также п. 5 леммы 4, получаем из неравенства (12) теоремы 2 окончательный результат работы — теорему 1, приведенную во введении.

4. Выделение гармонических слагаемых из их суммы. Теперь перейдем к выделению гармонических слагаемых из их суммы. Рассмотрим ряд x_0, \dots, x_{N-1} с

$$x_n = \sum_{i=1}^r f_{i,n}, \quad \text{где } f_{i,n} = b_k \cos(\omega_i n + \gamma_i) \quad (16)$$

с попарно различными частотами $\omega_i \in (0, 1/2)$ и амплитудами $|b_i|$, удовлетворяющими неравенству $1 = b_1 > |b_2| > \dots > |b_r| > 0$.

Пусть $N \rightarrow \infty$. Для асимптотического выделения каждого слагаемого $f_{i,n}$ в сумме (16) применим метод АСС со следующими параметрами: ширина окна $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, а для восстановления i -го слагаемого в сумме (16) используются две главные компоненты с номерами $2i - 1, 2i$ (см. [1, гл. 1]).

Обозначим соответствующие восстановленные значения $\tilde{f}_{i,n}$ и положим $r_{i,n}(N) = \tilde{f}_{i,n} - f_{i,n}$.

Теорема 3. *Обозначим при $1 \leq k < r$ $\delta_k = b_{k+1}/b_k$. Если при всех k*

$$|\delta_k| < 0.5 \frac{1}{1 + \sum_{j=k+2}^r \left(\prod_{i=k+1}^{j-1} \delta_i \right)^2}, \quad (17)$$

то $\max_{0 \leq n < N} |r_{i,n}(N)| = O(N^{-1})$ при $1 \leq i \leq r$.

Доказательство. Обозначим для краткости $\cos_j = \cos(2\pi\omega_j n + \gamma_j)$ и перепишем (16) в терминах δ_i :

$$x_n = \cos_1 + \delta_1 \cos_2 + \delta_1 \delta_2 \cos_3 + \dots + \delta_1 \dots \delta_{r-1} \cos_r = \cos_1 + \sum_{j=2}^r \left(\prod_{i=1}^{j-1} \delta_i \right) \cos_j. \quad (18)$$

Зафиксировав $1 \leq k < r$, запишем (18) в виде

$$x_n = \cos_1 + \sum_{j=2}^k \left(\prod_{i=1}^{j-1} \delta_i \right) \cos_j + \delta_k \left(\prod_{i=1}^{k-1} \delta_i \cos_{k+1} + \sum_{j=k+2}^r \left(\prod_{i=1}^{j-1} \delta_i \right) / \delta_k \cos_j \right) \quad (19)$$

и, введя обозначения $\beta_j = \prod_{i=1}^{j-1} \delta_i$ при $j \leq k$ и

$$\beta_j = \left(\prod_{i=1}^{j-1} \delta_i \right) / \delta_k = \prod_{i=1}^{k-1} \delta_i \prod_{i=k+1}^{j-1} \delta_i = \beta_k \prod_{i=k+1}^{j-1} \delta_i$$

при $j \geq k$, переписываем (19) в стандартном виде

$$x_n = \cos_1 + \sum_{j=2}^k \beta_j \cos_j + \delta_k \sum_{j=k+1}^r \beta_j \cos_j$$

и тем самым приходим к результату теоремы 1: если

$$|\delta_k| < 0.5 \min \left(\frac{|\beta_{k+1}|}{|\beta_k|}, \frac{\beta_k^2}{\sum_{j=k+1}^r \beta_j^2} \right), \quad (20)$$

то максимальные ошибки восстановления сигнала $f_n = \cos_1 + \sum_{j=2}^k \beta_j \cos_j$ от помехи $\delta_k \sum_{j=k+1}^r \beta_j \cos_j$ будут иметь вид $O(N^{-1})$.

Заметив теперь, что $|\beta_{k+1}| = |\beta_k|$, а при $j > k$

$$\beta_j = \left(\prod_{i=1}^{j-1} \delta_i \right) / \delta_k = \prod_{i=1}^{k-1} \delta_i \prod_{i=k+1}^{j-1} \delta_i = \beta_k \prod_{i=k+1}^{j-1} \delta_i$$

получим, что условие (20) приобретает вид (17).

Пусть теперь (17) выполнено при любом k . Взяв $k = 1$ и $k = r - 1$, мы получим, что $\max_{0 \leq n < N} |r_{i,n}(N)| = O(N^{-1})$ при $i = 1$ и $i = r$, а из того, что (17) выполняется при $k = i - 1$ и $k = i$, следует, что $\max_{0 \leq n < N} |r_{i,n}(N)| = O(N^{-1})$ при $1 < i < r$. \square

5. Заключение. Конечно, результат теоремы 3 дает только достаточные условия для разделимости гармоник. Так, при $r = 2$ (и $k = 1$) условие (17) превращается в $|\delta_1| = |\delta_2| < 0.5$, в то время как вычислительные эксперименты показывают, что на самом деле условие должно быть $|\delta_2| < 1$.

Для $r = 3$ условия (17) имеют вид $|\delta_2| < 0.5 / (1 + \delta_2^2)$, $|\delta_2| = |b_3/b_2| < 0.5$, что не выполнено в примере, приведенном во введении, где $b_3/b_2 = 0.75$, а $b_2 = 0.8 > 0.5$. Это связано с применением общей техники возмущений самосопряженных операторов, развитой в [3]. Возможно, адаптация этой техники к решению конкретных задач метода АСС позволит по крайней мере ослабить эти достаточные условия.

Отметим также, что скорость сходимости $\max_i |r_i(N)| = O(N^{-1})$ для ошибок восстановления является, по-видимому, стандартной для решения задач выделения сигнала из суммы с осциллирующей помехой. По крайней мере именно такой результат получен в [6, разд. 2] для растущего экспоненциального сигнала и синусоидальной помехи при наличии дискретизации сигнала (как показано в [6, разд. 1], без дискретизации $\max_i |r_i(N)|$ не стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$).

Аналогичные оценки $\max_i |r_i(N)| = O(N^{-1})$ можно найти в [8], где рассматривается линейный сигнал, а также в [9], где обсуждаются вопросы так называемого рекуррентного прогноза в АСС.

6. Благодарности. Автор благодарит обоих анонимных рецензентов, замечания которых, несомненно, способствовали улучшению работы.

Литература/References

1. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques*. Champan & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington D. C. (2001).
2. Nekrutkin V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals. *Statistics and Its Interface* **3**, 297–319 (2010).
3. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag (1995).
4. Golyandina N., Zhigljavsky A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*, 2nd ed., Springer Briefs in Statistics, Springer (2020).
5. Nekrutkin V., Vasilinetc I. Asymptotic extraction of common signal subspaces from perturbed signals. *Statistics and its Interface*. **10**, 27–32 (2017).
6. Ivanova E., Nekrutkin V. Two asymptotic approaches for the exponential signal and harmonic noise in Singular Spectrum Analysis. *Statistics and its Interface* **12**, 49–59 (2019).
7. Golub G. H., Van Loan Ch. F. *Matrix computations*, 4th ed. *Johns Hopkins University Press*. (2013).
8. Zenkova N. V., Nekrutkin V. V. On the Asymptotical Separation of Linear Signals from Harmonics by Singular Spectrum Analysis. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **55** (2), 166–173 (2022).
9. Nekrutkin V. V. Remark on the Accuracy of Recurrent Forecasting in Singular Spectrum Analysis. *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **56**, 1, 35–45 (2023).

Статья поступила в редакцию 18 февраля 2023 г.;
доработана 12 мая 2023 г.;
рекомендована к печати 18 мая 2023 г.

Контактная информация:

Некруткин Владимир Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц.; vnekr@statmod.ru

Asymptotical separation of harmonics by Singular Spectrum Analysis*

V. V. Nekrutkin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Nekrutkin V. V. Asymptotical separation of harmonics by Singular Spectrum Analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 720–735. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.409> (In Russian)

The paper is devoted to the sufficient conditions for the asymptotical separation of distinct terms in the linear combination of harmonics by Singular Spectrum Analysis (briefly, SSA). Namely, let x_0, \dots, x_{N-1} be the series with $x_n = \sum_{i=1}^r f_{i,n}$, where $f_{i,n} = b_i \cos(\omega_i n + \gamma_i)$, and both amplitudes $|b_i|$ and frequencies $\omega_i \in (0, 1/2)$ are pairwise different. Then it is proved that under some relationship between amplitudes $|b_i|$ and the standard choice of

*The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-002220).

SSA parameters the so-called reconstruction values $\tilde{f}_{i,n}$ become very close to $f_{i,n}$ for big N . Moreover, $\max_n (|\tilde{f}_{i,n} - f_{i,n}|) = O(N^{-1})$ for any i as $N \rightarrow \infty$.

Keywords: signal processing, singular spectral analysis, linear combination of harmonics, separability of harmonics, asymptotical analysis.

Received: February 18, 2023

Revised: May 12, 2023

Accepted: May 18, 2023

Author's information:

Vladimir V. Nekrutkin — vnekr@statmod.ru

ХРОНИКА

26 апреля 2023 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступил кандидат физ.-мат. наук Д. С. Ролдугин (Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН) с докладом на тему «Динамика космических аппаратов с активной магнитной системой ориентации».

Краткое содержание доклада:

Изучается динамика космических аппаратов под управлением магнитной системы ориентации в основных режимах углового движения. Это — гашение угловой скорости, поддержание ориентации аппарата с ротором, одноосная стабилизация аппарата в режиме вращения и, отдельно, в режиме стабилизации на Солнце, стабилизация в произвольном трехосном положении. В ходе работы установлены конкретные приближенные выражения, характеризующие решение и его ключевые параметры — амплитуды колебаний, степень устойчивости и др. Эти выражения позволяют получить общее представление о свойствах движения аппарата в зависимости от его параметров, в первую очередь инерционных, и от параметров управления. Для актуальных режимов движения предложены новые алгоритмы ориентации.