УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4
MSC 60F05

Об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений комбинаторных сумм*

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Фролов А. Н.* Об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений комбинаторных сумм // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 762–774.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.412

Исследовано асимптотическое поведение вероятностей умеренных уклонений комбинаторных сумм независимых случайных величин, имеющих моменты порядка $p > 2$. Найдены зоны, в которых эти вероятности эквивалентны хвосту стандартного нормального закона. Ширина зоны выражается в терминах логарифма комбинаторного варианта дроби Ляпунова. Ранее аналогичные результаты были получены автором при выполнении условий Бернштейна и Линника. Для доказательства новых результатов использован метод усечений

Ключевые слова: вероятности больших уклонений, вероятности умеренных уклонений, комбинаторная центральная предельная теорема, комбинаторная сумма.

1. Введение и результаты. Пусть $\{(X_{nij}), 1 \leqslant i, j \leqslant n, n = 2, 3, \ldots\}$ — последовательность матриц независимых случайных величин с конечными моментами порядка $p > 2$. Пусть $\{\vec{\pi}_n = (\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(n)),\ n = 2, 3, \ldots\}$ — последовательность случайных перестановок чисел $1, 2, \ldots, n$. Предположим, что $\vec{\pi}_n$ имеет равномерное распределение на множестве всех перестановок $1, 2, \ldots, n$ и не зависит от (X_{nij}) для любого n. Положим

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_{ni\pi_n(i)}.$$

Сумма S_n называется комбинаторной суммой.

Исследование асимптотического поведения распределений нормализованных комбинаторных сумм ведется давно и представляет существенный интерес. В частности, для вырожденных X-ов комбинаторные суммы представляют собой ранговые статистики, наиболее известным представителем которых является коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Сначала были получены различные варианты комбинаторной центральной предельной теоремы (ЦПТ), а затем различные оценки в ней (равномерные и неравномерные). Подробнее с результатами в этом направлении можно познакомиться в работах [1, 2] и литературе из этих работ. Хорошо известно, что из оценок в ЦПТ можно получать результаты об умеренных уклонениях. Это достаточно простой способ, который однако не дает оптимальных результатов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 23-21-00078.

Первый результат о поведении больших уклонений комбинаторных сумм был получен автором в [1]. Там предполагалось, что X_{nij} удовлетворяют условию Бернштейна. Для доказательства использовался метод сопряженных распределений, применявшийся к одной нормализованной случайной величине S_n. Отметим, что в классической теории суммирования независимых случайных величин сопряженное распределение суммы совпадает с распределением суммы сопряженных величин. Такого свойства в случае комбинаторных сумм нет, что существенно затрудняет доказательство. Поэтому в [1] анализировалось поведение производящей функции моментов и ее логарифмических производных в некотором круге комплексной плоскости. Это позволило с нужной точностью оценить близость сопряженного и нормального распределений. В работе [2] с помощью метода усечений было исследовано асимптотическое поведение больших уклонений комбинаторных сумм для X_{nij}, удовлетворяющих условию Линника. Ослабление условия Бернштейна до условия Линника, естественно, сужает зону нормальной сходимости, но и в том, и в другом случае эта зона степенная (степень дисперсии S_n). При логарифмической зоне большие уклонения принято называть умеренными. Первый результат об умеренных уклонениях комбинаторных сумм получен автором в работе [3] с использованием оценок в комбинаторной ЦПТ из [4]. В настоящей работе мы получим более общий результат с использованием метода усечений и результатов работы [1]. Мы покажем, что наши результаты оптимальны.

Если при всех n для любого i случайные величины $X_{ni1}, \ldots, X_{nin}$ одинаково распределены, то S_n будет суммой независимых случайных величин, не обязательно одинаково распределенных. Поэтому для анализа качества наших результатов мы обратимся к известным результатам об умеренных уклонениях из теории суммирования. Различные результаты об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений получены Линником [5], Нагаевым [6], Рубиным и Сетураманом [7], Нагаевым [8], Амосовой [9, 12], Михелем [10], Сластниковым [11, 15], Розовским [13, 18], Рыхликом [14], Фроловым [16, 17, 19] и другими авторами.

Предположим, что

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_{nij} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}X_{nij} = 0 \quad \text{при всех} \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n \tag{1}$$

для любого n. В этом случае

$$\mathbf{E}S_n = 0, \quad \mathbf{D}S_n = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j=1}^{n} (\mathbf{E}X_{nij})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}X_{nij}^2.$$

Таким образом, условие (1) обеспечивает центрированность комбинаторных сумм. Если $\mathbf{D}S_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то главной частью асимптотики этой дисперсии будет нормированная сумма вторых моментов

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}X_{nij}^2.$$

Поэтому в дальнейшем $\{B_n\}$ будет использоваться в качестве нормирующей последовательности для S_n.

Положим

$$L_n = \frac{1}{nB_n^{p/2}} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}|X_{nij}|^p, \quad c_n = \frac{1}{n} \max_i \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}X_{nij}^2 + \frac{1}{n} \max_j \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}X_{nij}^2.$$

Далее мы будем предполагать, что $B_n \to \infty$ и $L_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Из последнего соотношения, в частности, следует, что справедлива комбинаторная ЦПТ (см., например, [4]). Дробь L_n мы будем называть комбинаторной дробью Ляпунова.

Наш первый результат следующий.

Теорема 1. *Предположим, что для некоторого $p > 3$ неравенства*

$$\mathbf{E}|X_{nij}|^p \leqslant C\mathbf{E}|X_{nij}|^s \tag{2}$$

выполняются для $s = 1, 2, 3$, всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и всех $n \geqslant 2$. Пусть для всех i, j и n таких, что $\mathbf{P}(|X_{nij}| > 0) > 0$, выполняются неравенства

$$\mathbf{E}|X_{nij}|^p \geqslant cn^{-1/2}B_n^{(3-p)/2}. \tag{3}$$

Здесь c и C — абсолютные положительные постоянные.

Предположим, что $\ln(1/L_n) = O(\ln B_n)$ при $n \to \infty$.

Пусть $\{u_n\}$ — последовательность вещественных чисел такая, что $u_n \to \infty$, $\lambda_n = u_n^2 - 2\ln(1/L_n) - (p-1)\ln\ln(1/L_n) \to -\infty$ и

$$u_n^3\sqrt{n}c_n = o(B_n) \tag{4}$$

при $n \to \infty$.

Тогда выполняется соотношение

$$\mathbf{P}\left(S_n \geqslant u_n\sqrt{B_n}\right) \sim 1 - \Phi(u_n) \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{5}$$

где $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения.

Неравенство (2) является равномерным вариантом тривиальной оценки $\mathbf{E}|X_{nij}|^p \leqslant C_{nij}\mathbf{E}|X_{nij}|^s$, а замена его неравенством с $C = C(n)$ приведет к сужению области изменения u_n. По неравенствам Ляпунова и (2) мы имеем $\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leqslant (\mathbf{E}|X_{nij}|^p)^{s/p} \leqslant (C\mathbf{E}|X_{nij}|^s)^{s/p}$. Это дает $\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leqslant C^{s/(p-s)}$. В частности, $B_n \leqslant C^{2/(p-2)}n$ и $c_n \leqslant C^{2/(p-2)}$. Из условия (2) и определения L_n следует, что $L_n \leqslant CB_n^{(2-p)/2}$. Кроме того, в силу неравенств Ляпунова и Гёльдера

$$nB_n \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} (\mathbf{E}|X_{nij}|^p)^{2/p} \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}|X_{nij}|^p\right)^{2/p} n^{2(p-2)/p} = B_n L_n^{2/p} n^{2(p-1)/p}.$$

Значит, $n^{(2-p)/2} \leqslant L_n$ и $(p-2)\ln n \geqslant 2\ln(1/L_n) \geqslant (p-2)\ln B_n - 2\ln C$. Таким образом, зона нормальной сходимости в теореме 1 имеет логарифмический порядок по n.

Отметим, что правая часть в неравенстве (3) стремится к нулю. Это условие выполнено, если абсолютные моменты порядка p отделены от нуля.

Хотя c_n ограничено, соотношение (4) является условием, если B_n мало по сравнению с n. Условие (4) выполнено, если $B_n \geqslant n^{(1+\delta)/2}$ при некотором $\delta > 0$.

Условия (2) и (3) выполнены, например, если каждая из случайных величин X_{nij} может иметь одно из k заданных распределений. Если при этом для любого n число невырожденных в нуле случайных величин в матрице с номером n больше $n^{(3+\delta)/2}$, где $\delta \in (0,1)$, то выполнено и условие (4).

Перейдем к случаю $p \leqslant 3$.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условий (2). Предположим, что для некоторого $p \leqslant 3$, всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и всех $n \geqslant 2$ выполняются неравенства (2) для $s = 1, 2$ и*

$$\mathbf{E}|X_{nij}|^p \leqslant C\mathbf{E}|X_{nij}|^3 I\{|X_{nij}| \leqslant \sqrt{B_n}\}. \tag{6}$$

Тогда выполняется соотношение (5).

Если при всех n для любого i случайные величины $X_{ni1}, \ldots, X_{nin}$ одинаково распределены (при этом они автоматически будут центрированы в силу условия (1)), то S_n будет суммой независимых случайных величин, а L_n будет обычной дробью Ляпунова. Известно (см., например, [17]), что в этом случае условие $\lambda_n = u_n^2 - 2\ln(1/L_n) - (p-1)\ln\ln(1/L_n) \to -\infty$ при $n \to \infty$, определяющее ширину зоны нормальной сходимости, оптимально. Таким образом, в этой ситуации результаты теорем 1 и 2 оптимальны по ширине зоны.

В теореме 2 зона нормальной сходимости шире, чем в теореме 3 из [3], полученной с помощью оценки в комбинаторной ЦПТ из [4].

Можно отказаться от условия (2) в теоремах 1 и 2 за счет выбора другого уровня усечения в доказательстве. При этом зона нормальной сходимости сократится, а для $p \leqslant 3$ мы получим результат хуже, чем теорема 3 из [3]. Это обусловлено тем, что остаточный член в комбинаторной ЦПТ имеет порядок L_n, а разность вероятностей умеренных уклонений комбинаторных сумм усеченных и неусеченных случайных величин — порядок $u_n^p L_n$. Поэтому случай $p \leqslant 3$ мы не рассматриваем. С другой стороны, в [3] результатов для $p > 3$ нет. Для этого случая мы и сформулируем следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $p > 3$, $\{u_n\}$ — последовательность вещественных чисел такая, что $u_n \to \infty$ $\lambda_n = u_n^2 - 2\ln(1/L_n) + (p+1)\ln\ln(1/L_n) \to -\infty$,*

$$u_n^3 \max_{i,j} \mathbf{E}|X_{nij}| = o(\sqrt{B_n}). \tag{7}$$

и выполнено соотношение (4) при $n \to \infty$.

Тогда выполняется соотношение (5).

2. Доказательства. Перейдем к доказательствам наших результатов.

Доказательство теорем 1 и 2. Положим $y_n = u_n\sqrt{B_n}/\rho_n$, где $\rho_n = \min\{\ln u_n, e^{-\lambda_n/2p}\}$. Ясно, что $\rho_n \to \infty$ и $\rho_n = o(u_n)$ при $n \to \infty$. Для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и n положим

$$\bar{X}_{nij} = X_{nij} I\{|X_{nij}| < y_n\}, \quad \tilde{X}_{nij} = X_{nij} I\{|X_{nij}| \geqslant y_n\}, \quad \bar{a}_{nij} = \mathbf{E}\bar{X}_{nij},$$

$$\bar{a}_{ni.} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \bar{a}_{nij}, \quad \bar{a}_{n.j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \bar{a}_{nij}, \quad \bar{a}_{n..} = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{nij}, \quad \mu_{nij} = \bar{a}_{ni.} + \bar{a}_{n.j} - \bar{a}_{n..},$$

$$Y_{nij} = \bar{X}_{nij} - \mu_{nij}, \quad T_n = \sum_{i=1}^{n} \bar{X}_{ni\pi_n(i)}, \quad R_n = \sum_{i=1}^{n} Y_{ni\pi_n(i)}, \quad \bar{B}_n = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E} Y_{nij}^2.$$

Заметим, что μ_{nij} выбрано так, чтобы выполнялось условие (1) с заменой X_{nij} на Y_{nij}. При этом $\mathbf{E} R_n = 0$, а $\bar{B}_n$ — главная часть $\mathbf{D} R_n$.

Из соотношений $\{S_n \geqslant u_n \sqrt{B_n}\} \subset \{T_n \geqslant u_n \sqrt{B_n}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{X_{ni\pi_n(i)} \neq \bar{X}_{ni\pi_n(i)}\}$ и $\{T_n \geqslant u_n \sqrt{B_n}\} \subset \{S_n \geqslant u_n \sqrt{B_n}\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} \{X_{ni\pi_n(i)} \neq \bar{X}_{ni\pi_n(i)}\}$ следует, что

$$|\mathbf{P}(S_n \geqslant u_n \sqrt{B_n}) - \mathbf{P}(T_n \geqslant u_n \sqrt{B_n})| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{P}(|X_{nij}| \geqslant y_n). \tag{8}$$

Покажем сначала, что выполняется соотношение

$$\mathbf{P}(R_n \geqslant u_n \sqrt{\bar{B}_n}) \sim 1 - \Phi(u_n) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Для этого нам потребуется следующий результат из работы автора [1]. Для удобства мы его формулируем в терминах случайных величин Y_{nij}.

Теорема 4. *Пусть $\{M_n\}$ — неубывающая последовательность положительных постоянных такая, что для $s = 1, 2, 3$ неравенства*

$$\left| \mathbf{E} Y_{nij}^k \right| \leqslant D k! M_n^{k-s} \mathbf{E} |Y_{nij}|^s \tag{10}$$

выполняются для всех $k \geqslant s$, всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и всех $n \geqslant 2$, где D — абсолютная положительная постоянная. Положим

$$\gamma_n = \max \left\{ \max_{i,j} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{B}_n}} \mathbf{E} |Y_{nij}|, \ \max_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E} Y_{nij}^2}{\bar{B}_n}, \ \max_j \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{E} Y_{nij}^2}{\bar{B}_n}, \ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\mathbf{E} |Y_{nij}|^3}{\sqrt{n} \bar{B}_n^{3/2}} \right\}. \tag{11}$$

Тогда для любой последовательности вещественных чисел $\{u_n\}$ такой, что $u_n \to \infty$, $u_n^3 = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$ и $u_n = o(\sqrt{B_n}/M_n)$ при $n \to \infty$, выполняется соотношение (9).

Для проверки условий теоремы 4 нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть $y > e$, $p > 3$, $\mu \in (-1, 1)$, $\alpha > 0$, $a \in (0, 1)$ и $a \leqslant (p-3)/2$. Пусть X — случайная величина, $\bar{X} = X I\{|X| < y\}$ и $Y = \bar{X} - \mu$. Предположим, что $\mathbf{E}|Y|^p \leqslant \alpha \mathbf{E}|Y|^s$ при $s = 1, 2, 3$ и $|\mu| \leqslant y$.*

Тогда неравенства

$$|\mathbf{E} Y^k| \leqslant (3 + \alpha) k! M^{k-s} \mathbf{E} |Y|^s$$

выполнены для всех $k > s$ при $s = 1, 2, 3$, где $M = y/(a \ln y)$.

Доказательство. Для всех z из круга $|z| \leqslant a y^{-1} \ln y = 1/M < a e^{-1}$ и $s = 1, 2, 3$ мы имеем

$$|\mathbf{E} Y^s e^{zY}| \leqslant \mathbf{E} |Y|^s e^{|z||Y|}.$$

Разобьем на две части область интегрирования в последнем интеграле. Для первой части мы получим

$$\mathbf{E} |Y|^s e^{|z||Y|} I\{|Y| < e\} \leqslant e^{|z| e} \mathbf{E} |Y|^s \leqslant e^a \mathbf{E} |Y|^s.$$

Для второй части, учитывая неравенства $|Y| \leqslant y + |\mu| \leqslant 2y$, мы имеем

$$\mathbf{E}|Y|^s e^{|z||Y|} I\{|Y| \geqslant e\} = \mathbf{E}|Y|^s e^{|z|\frac{|Y|}{\ln|Y|}\ln|Y|} I\{|Y| \geqslant e\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}|Y|^s e^{|z|\frac{2y}{\ln(2y)}\ln|Y|} I\{|Y| \geqslant e\} \leqslant \mathbf{E}|Y|^s e^{|z|\frac{2y}{\ln y}\ln|Y|} I\{|Y| \geqslant e\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{E}|Y|^s e^{2a\ln|Y|} I\{|Y| \geqslant e\} \leqslant \mathbf{E}|Y|^{s+2a} \leqslant \mathbf{E}|Y|^p \leqslant \alpha \mathbf{E}|Y|^s.$$

Следовательно, в круге $|z| \leqslant 1/M$ для $s = 1, 2, 3$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{E}Y^s e^{zY}| \leqslant (3+\alpha)\mathbf{E}|Y|^s.$$

Используя неравенство Коши для коэффициентов разложения аналитической функции $\mathbf{E}Y^s e^{zY}$, мы получаем требуемое. □

Отметим, что следующий результат справедлив при любом выборе y_n.

Лемма 2. *Если выполнено условие (1) и $p > 1$, то для всех i, j и n выполняются неравенства*

$$|\bar{a}_{ni.}| \leqslant \frac{y_n^{1-p}}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|X_{nij}|^p, \quad |\bar{a}_{n.j}| \leqslant \frac{y_n^{1-p}}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}|X_{nij}|^p, \quad |\bar{a}_{n..}| \leqslant \frac{y_n^{1-p}}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{E}|X_{nij}|^p.$$

Если выполнено условие (1) и $p > 2$, то для всех n выполняется неравенство

$$|B_n - \bar{B}_n| \leqslant y_n^{2-p} B_n^{p/2} L_n + 14 y_n^{2-2p} B_n^p L_n^2.$$

Доказательство. Принимая во внимание условие (1), для всех i мы имеем

$$n|\bar{a}_{ni.}| = |\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\bar{X}_{nij}| = |\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}\tilde{X}_{nij}| \leqslant \sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|X_{nij}|I\{|X_{nij}| \geqslant y_n\} \leqslant y_n^{1-p}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{E}|X_{nij}|^p.$$

Аналогично мы получим второе и третье неравенства.

Оценим теперь $|B_n - \bar{B}_n|$. Мы имеем

$$B_n - \bar{B}_n = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}(\mathbf{E}X_{nij}^2 - \mathbf{E}Y_{nij}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}(\mathbf{E}X_{nij}^2 - \mathbf{E}(\bar{X}_{nij} - \mu_{nij})^2) =$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}(\mathbf{E}\tilde{X}_{nij}^2 - 2\mu_{nij}\mathbf{E}\bar{X}_{nij} + \mu_{nij}^2) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{E}\tilde{X}_{nij}^2 - \frac{2}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\mu_{nij}\bar{a}_{nij} + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\mu_{nij}^2.$$

Далее,

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\mu_{nij}\bar{a}_{nij} = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\bar{a}_{ni.}\bar{a}_{nij} + \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\bar{a}_{n.j}\bar{a}_{nij} - \frac{\bar{a}_{n..}}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\bar{a}_{nij} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\bar{a}_{ni.}^2 + \sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{n.j}^2 - n\bar{a}_{n..}^2.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\mu_{nij}^2 \leqslant \frac{3}{n}\sum_{i,j=1}^{n}(\bar{a}_{ni.}^2 + +\bar{a}_{n.j}^2 + \bar{a}_{n..}^2) = 3\sum_{i=1}^{n}\bar{a}_{ni.}^2 + 3\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{n.j}^2 + 3n\bar{a}_{n..}^2.$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$|B_n - \bar{B}_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}\tilde{X}_{nij}^2 + 5\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ni.}^2 + 5\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{n.j}^2 + 5n\bar{a}_{n..}^2.$$

Используя найденные выше оценки для $|\bar{a}_{ni.}|$ и $|\bar{a}_{n.j}|$, мы получим

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ni.}^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\bar{a}_{ni.}|\right)^2 \leqslant \left(\frac{y_n^{1-p}}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}|X_{nij}|^p\right)^2 = y_n^{2-2p} B_n^p L_n^2$$

и, аналогично, $\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{a}_{n.j}^2 \leqslant y_n^{2-2p} B_n^p L_n^2$. Кроме того, мы имеем

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}\tilde{X}_{nij}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}X_{nij}^2 I\{|X_{nij}| \geqslant y_n\} \leqslant y_n^{2-p}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}|X_{nij}|^p = y_n^{2-p} n B_n^{p/2} L_n.$$

Вместе с оценкой для $|\bar{a}_{n..}|$ это нам дает

$$|B_n - \bar{B}_n| \leqslant y_n^{2-p} B_n^{p/2} L_n + \frac{5(2n+1)}{n} y_n^{2-2p} B_n^p L_n^2.$$

Так как $n \geqslant 2$, это влечет требуемое неравенство. $\square$

С помощью леммы 1 покажем, что условие (10) выполнено для Y_{nij} с $M_n = y_n/(a\ln y_n)$. Нам нужно доказать, что $|\mu_{nij}| \leqslant y_n$ и $\mathbf{E}|Y_{nij}|^p \leqslant \alpha\mathbf{E}|Y_{nij}|^s$ при $s = 1, 2, 3$. При этом можно считать, что все X_{nij} не вырождены в нуле. Для вырожденных в нуле случайных величин условие (10) очевидно выполнено.

По лемме 2, определению c_n и условию (2) мы имеем

$$|\bar{a}_{ni.}| \leqslant C\frac{y_n^{1-p}}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|X_{nij}|^2 \leqslant Cc_n y_n^{1-p} \text{ для всех } i, \quad |\bar{a}_{n.j}| \leqslant Cc_n y_n^{1-p} \text{ для всех } j,$$

$$|\bar{a}_{n..}| \leqslant C\frac{y_n^{1-p}}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}|X_{nij}|^2 \leqslant C\frac{y_n^{1-p}}{n}\max_i \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}|X_{nij}|^2 \leqslant Cc_n y_n^{1-p}.$$

Используя условие (4), мы получим

$$\max_{i,j} |\mu_{nij}| \leqslant 3Cc_n y_n^{1-p} = o(n^{-1/2} u_n^{-2-p} \rho_n^{p-1} B_n^{(3-p)/2}) =$$
$$= o(u_n^{-1-p} n^{-1/2} B_n^{(3-p)/2}) = o(1) \quad (12)$$

при $n \to \infty$. Если $p \geqslant 3$, то последнее соотношение очевидно. Если $p < 3$, то, учитывая неравенство $B_n \leqslant C^{2/(p-2)} n$, мы получим $n^{-1/2} B_n^{(3-p)/2} = O(n^{(2-p)/2}) = o(1)$ при $n \to \infty$. Поэтому $\max\limits_{i,j} |\mu_{nij}| \leqslant y_n$ для всех достаточно больших n.

Из условий (2), (3) и соотношения (12) вытекает, что при $p > 3$ для $s = 1, 2, 3$ и всех i и j неравенства

$$|\mu_{nij}|^s \leqslant |\mu_{nij}| \leqslant 0.05C^{-1}\mathbf{E}|X_{nij}|^p \leqslant 0.05\mathbf{E}|X_{nij}|^s$$

выполнены для всех достаточно больших n. При $p \leqslant 3$ последние неравенства справедливы для $s = 1, 2$, а при $s = 3$ из условия (6) и неравенства $\sqrt{B_n} \leqslant y_n$ следует, что

$$|\mu_{nij}|^3 \leqslant 0.05\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3.$$

Поэтому при $p > 3$ для $s = 1, 2, 3$ мы имеем

$$\mathbf{E}|Y_{nij}|^p \leqslant 2^{p-1}(\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^p + |\mu_{nij}|^p) \leqslant 2^{p-1}(\mathbf{E}|X_{nij}|^p + |\mu_{nij}|) \leqslant 2^{p-1}(C + 0.05)\mathbf{E}|X_{nij}|^s.$$

При $p \leqslant 3$ вместо последнего неравенства для $s = 3$ будет верно

$$\mathbf{E}|Y_{nij}|^p \leqslant 2^{p-1}(\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^p + |\mu_{nij}|^p) \leqslant 2^{p-1}(\mathbf{E}|X_{nij}|^p + |\mu_{nij}|) \leqslant 2^{p-1}(C + 0.05)\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3.$$

В последнем неравенстве мы использовали условие (6) и неравенство $\sqrt{B_n} \leqslant y_n$. Так как при $p > 3$ для $s = 1, 2, 3$ справедливы неравенства

$$\mathbf{E}|\tilde{X}_{nij}|^s = \mathbf{E}|X_{nij}|^s I\{|X_{nij}| \geqslant y_n\} \leqslant y_n^{s-p}\mathbf{E}|X_{nij}|^p \leqslant y_n^{3-p} C\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leqslant 0.05\mathbf{E}|X_{nij}|^s,$$

мы имеем

$$\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leqslant 3^{s-1}(\mathbf{E}|Y_{nij}|^s + \mathbf{E}|\tilde{X}_{nij}|^s + |\mu_{nij}|^s) \leqslant 9\mathbf{E}|Y_{nij}|^s + 0.9\mathbf{E}|X_{nij}|^s.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{E}|X_{nij}|^s \leqslant 90\mathbf{E}|Y_{nij}|^s$ и $\mathbf{E}|Y_{nij}|^p \leqslant \alpha\mathbf{E}|Y_{nij}|^s$, где $\alpha = 2^{p-1}(C + 0.05)90$. При $p \leqslant 3$ приведенные оценки сохраняются для $s = 1, 2$. При $s = 3$ мы имеем

$$\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3 \leqslant 4(\mathbf{E}|Y_{nij}|^3 + |\mu_{nij}|^3) \leqslant 4\mathbf{E}|Y_{nij}|^3 + 0.2\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3 \leqslant 5\mathbf{E}|Y_{nij}|^3$ и $\mathbf{E}|Y_{nij}|^p \leqslant \alpha\mathbf{E}|Y_{nij}|^s$, где $\alpha = 2^{p-1}(C + 0.05)90 + 5$.

По лемме 1 условие (10) выполнено для Y_{nij} с $M_n = y_n/a \ln y_n$.

По лемме 2 мы имеем

$$|B_n - \bar{B}_n| \leqslant u_n^{2-p}\rho_n^{p-2}B_nL_n + 14u_n^{2-2p}\rho_n^{2p-2}B_nL_n^2 = o(B_nL_n^{2/3}) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{13}$$

В частности, $B_n \sim \bar{B}_n$ при $n \to \infty$.

Покажем теперь, что в условиях теорем 1 и 2 выполняются соотношения $u_n^3 = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$ и $u_n = o(\sqrt{\bar{B}_n}/M_n)$ при $n \to \infty$. Мы имеем

$$\frac{u_nM_n}{\sqrt{\bar{B}_n}} = O\left(\frac{u_ny_n}{\sqrt{B_n}\ln y_n}\right) = O\left(\frac{u_n^2}{\rho_n(\frac{1}{2}\ln B_n + \ln u_n - \ln\rho_n)}\right) = O\left(\frac{\ln(1/L_n)}{\rho_n \ln B_n}\right) = o(1)$$

при $n \to \infty$. Для n таких, что $\gamma_n = \max_{i,j} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{B}_n}}\mathbf{E}|Y_{nij}|$, мы получим

$$\frac{u_n^3\gamma_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{u_n^3 \max_{i,j}\mathbf{E}|X_{nij}|}{\sqrt{B_n}} + \frac{u_n^3 \max_{i,j}|\mu_{nij}|}{\sqrt{B_n}} = o(1) + o(u_n^{2-p}n^{-1/2}B_n^{(2-p)/2}) = o(1)$$

при $n \to \infty$. Здесь мы воспользовались (12). Для n таких, что γ_n совпадает со вторым или с третьим членом под максимумом в формуле (11), с учетом условия (4) и (12) выполняется соотношение

$$\frac{u_n^3\gamma_n}{\sqrt{n}} \leqslant 2\frac{u_n^3nc_n}{B_n\sqrt{n}} + 2\frac{u_n^3n(\max_{i,j}|\mu_{nij}|)^2}{B_n\sqrt{n}} = o(1) + o(u_n^{3-2p}n^{-3/2}B_n^{2-p}) = o(1) \tag{14}$$

при $n\to\infty$. Для n таких, что γ_n совпадает с четвертым членом в максимуме из (11), при $p\leqslant 3$, используя (12), мы имеем

$$\frac{u_n^3\gamma_n}{\sqrt{n}}\leqslant 4\sum_{i,j=1}^{n}\frac{u_n^3\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3}{nB_n^{3/2}}+4\sum_{i,j=1}^{n}\frac{u_n^3|\mu_{nij}|^3}{nB_n^{3/2}}\leqslant$$
$$\leqslant 4\sum_{i,j=1}^{n}\frac{u_n^3y_n^{3-p}\mathbf{E}|X_{nij}|^p}{nB_n^{3/2}}+4\sum_{i,j=1}^{n}\frac{u_n^3|\mu_{nij}|^3}{nB_n^{3/2}}=$$
$$=4u_n^3y_n^{3-p}B_n^{(p-3)/2}L_n+o(u_n^{-3p}n^{-1/2}B_n^{3(3-p)/2-3/2})=4u_n^{6-p}\rho_n^{3-p}L_n+o(1)=o(1)$$

при $n\to\infty$. Если $p>3$, то нужно оценить снова сумму $\mathbf{E}|\bar{X}_{nij}|^3$. Воспользуемся тем, что

$$\mathbf{E}|X_{nij}|^3=\mathbf{E}|X_{nij}|^3I\{|X_{nij}|<\sqrt{y_n}\}+\mathbf{E}|X_{nij}|^3I\{|X_{nij}|\geqslant\sqrt{y_n}\}$$
$$\leqslant\sqrt{y_n}\mathbf{E}X_{nij}^2+y_n^{(3-p)/2}\mathbf{E}|X_{nij}|^p\leqslant(\sqrt{y_n}+Cy_n^{(3-p)/2})\mathbf{E}X_{nij}^2\leqslant 2\sqrt{y_n}\mathbf{E}X_{nij}^2$$

при всех достаточно больших n. В этом случае

$$\frac{u_n^3\gamma_n}{\sqrt{n}}\leqslant 4\sum_{i,j=1}^{n}\frac{u_n^3\mathbf{E}|X_{nij}|^3}{nB_n^{3/2}}+o(1)=O\left(\frac{u_n^3\sqrt{y_n}}{B_n^{1/2}}\right)+o(1)=o(1)\qquad(15)$$

при $n\to\infty$.

Таким образом, по теореме 4 соотношение (9) выполнено.

По лемме 2 мы имеем

$$n|\bar{a}_{n..}|\leqslant\frac{y_n^{1-p}}{n}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{E}|X_{nij}|^p=y_n^{1-p}B_n^{p/2}L_n=u_n^{1-p}\rho_n^{p-1}\sqrt{B_n}L_n=o(\sqrt{B_n}L_n^{2/3})$$

при $n\to\infty$.

Далее, мы имеем

$$\mathbf{P}(T_n\geqslant u_n\sqrt{B_n})=\mathbf{P}(R_n+n\bar{a}_{n..}\geqslant u_n\sqrt{B_n})=\mathbf{P}(R_n\geqslant v_n\sqrt{\bar{B}_n}),$$

где

$$v_n=\frac{u_n\sqrt{B_n}-n\bar{a}_{n..}}{\sqrt{\bar{B}_n}}=\frac{u_n\sqrt{\bar{B}_n+O(B_nL_n^{2/3})}+O(\sqrt{B_n}L_n^{2/3})}{\sqrt{\bar{B}_n}}\sim u_n$$

при $n\to\infty$. В последнем равенстве мы использовали соотношение (13). Так как

$$\frac{v_n^2}{2}=\frac{u_n^2(\bar{B}_n+O(B_nL_n^{2/3}))+O(u_nB_nL_n^{2/3})}{2\bar{B}_n}=\frac{u_n^2}{2}+o(1)$$

при $n\to\infty$, мы заключаем, что $1-\Phi(v_n)\sim 1-\Phi(u_n)$ при $n\to\infty$. Учитывая, что соотношение (9) выполнено также с заменой u_n на v_n, мы получим

$$\mathbf{P}(T_n\geqslant u_n\sqrt{B_n})=\mathbf{P}(R_n\geqslant v_n\sqrt{\bar{B}_n})\sim 1-\Phi(u_n)\quad\text{при}\quad n\to\infty.$$

Теперь оценим правую часть (8). Мы имеем

$$r_n = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{P}(|X_{nij}| \geqslant y_n) \leqslant y_n^{-p}\frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}|X_{nij}|^p \leqslant y_n^{-p}B_n^{p/2}L_n = u_n^{-p}\rho_n^p L_n.$$

Если $u_n^2 \leqslant 2\ln(1/L_n)$, то

$$r_n u_n e^{u_n^2/2} \leqslant L_n(\ln u_n)^p u_n^{1-p}e^{u_n^2/2} \leqslant (\ln\ln(2\ln(1/L_n)))^p(2\ln(1/L_n))^{(1-p)/2} \to 0$$

при $n\to\infty$. Если $2\ln(1/L_n) \leqslant u_n^2 \leqslant 2\ln(1/L_n) + (p-1)\ln\ln(1/L_n) + \lambda_n$, то

$$r_n u_n e^{u_n^2/2} \leqslant L_n\rho_n^p u_n^{1-p}e^{u_n^2/2} \leqslant (2\ln(1/L_n))^{(1-p)/2}(\ln(1/L_n))^{(p-1)/2}e^{\lambda_n/2} \to 0$$

при $n\to\infty$. Здесь мы воспользовались тем, что $\rho_n^p \leqslant e^{-\lambda_n/2}$ и $\lambda_n \to -\infty$ при $n\to\infty$. Следовательно,

$$r_n = o((1-\Phi(u_n))) \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{16}$$

Из неравенства (8) и соотношения (16) следует, что

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant u_n\sqrt{B_n}) = \mathbf{P}(T_n \geqslant u_n\sqrt{B_n}) + O(r_n) \sim 1-\Phi(u_n) \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Теоремы 1 и 2 доказаны. □

Доказательство теоремы 3. Мы будем следовать схеме доказательства теоремы 1. Положим $y_n = \sqrt{B_n}/(u_n\rho_n)$, где $\rho_n = \min\{\ln u_n, e^{-\lambda_n/2p}\}$. Все остальные обозначения из доказательства теоремы 1 мы сохраняем.

Вместо леммы 1 мы воспользуемся тем, что

$$|\mathbf{E}Y_{nij}^k| \leqslant (y_n + |\mu_{nij}|)^{k-s}\mathbf{E}|Y_{nij}|^s$$

для всех $k \geqslant s$. По лемме 2 мы имеем

$$\max_{i,j}|\mu_{nij}| \leqslant c_n y_n^{-1} = o(n^{-1/2}u_n^{-2}B_n^{1/2}\varrho_n) = o(y_n). \tag{17}$$

Следовательно, $|\mu_{nij}| \leqslant y_n$ при всех достаточно больших n. Поэтому условие (10) выполнено для Y_{nij} с $M_n = 2y_n$.

По лемме 2 мы получим оценку (13) и $B_n \sim \bar{B}_n$ при $n\to\infty$.

Покажем, что $u_n^3 = o(\sqrt{n}/\gamma_n)$ и $u_n = o(\sqrt{\bar{B}_n}/M_n)$ при $n\to\infty$ в условиях теоремы 3. Второе соотношение следует из того, что $\sqrt{\bar{B}_n}/M_n = O(u_n\rho_n)$ при $n\to\infty$. Для n таких, что $\gamma_n = \max_{i,j}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\bar{B}_n}}\mathbf{E}|Y_{nij}|$, используя условие (7), мы получим

$$\frac{u_n^3\gamma_n}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{u_n^3\max_{i,j}\mathbf{E}|X_{nij}|}{\sqrt{B_n}} + \frac{u_n^3\max_{i,j}|\mu_{nij}|}{\sqrt{B_n}} = o(1) + o(n^{-1/2}u_n\varrho_n) = o(1)$$

при $n\to\infty$. Для n таких, что γ_n совпадает со вторым или с третьим членом под максимумом в формуле (11), с учетом условия (4) и оценки (17) так же, как в (14), выполняется соотношение

$$\frac{u_n^3\gamma_n}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{u_n^3 n c_n}{B_n\sqrt{n}}\right) + o(n^{-3/2}u_n^{-1}\varrho_n^2) = o(1)$$

при $n \to \infty$. В четвертом случае так же, как в оценке (15), мы получим

$$\frac{u_n^3 \gamma_n}{\sqrt{n}} = O\left(\frac{u_n^3 \sqrt{y_n}}{B_n^{1/2}}\right) + o(n^{-1/2} u_n^{-3} \varrho_n^3) = o(1)$$

при $n \to \infty$. Таким образом, по теореме 4 соотношение (9) выполнено.

Все остальные оценки доказательства теоремы 1 сохраняются за исключением оценки для r_n, которая станет такой:

$$r_n \leqslant u_n^p \rho_n^p L_n.$$

Так как $u_n^2 \leqslant 2\ln(1/L_n) - (p+1)\ln\ln(1/L_n) + \lambda_n$, мы имеем

$$r_n u_n e^{u_n^2/2} \leqslant L_n \rho_n^p u_n^{1+p} e^{u_n^2/2} \leqslant (2\ln(1/L_n))^{(1+p)/2} (\ln(1/L_n))^{-(1+p)/2} e^{\lambda_n/2} \to 0$$

при $n \to \infty$. Отсюда мы получим (16). □

Литература

1. Frolov A. N. On large deviations for combinatorial sums. *Journal of Statistical Planning and Inference* **217**, 24–32 (2022).

2. Фролов А. Н. О вероятностях больших уклонений комбинаторных сумм независимых случайных величин, удовлетворяющих условию Линника. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 3, 546–554 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.308

3. Фролов А. Н. О вероятностях умеренных уклонений комбинаторных сумм. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **2** (60), вып. 1, 60–67 (2015).

4. Frolov A. N. 2014. Esseen type bounds of the remainder in a combinatorial CLT. *J. Statist. Planning and Inference* **149**, 90–97 (2014).

5. Линник Ю. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин I, II, III. *Теория вероятностей и ее применение* I, **6** (2), 145–163 (1961); II, **6** (4), 377–391 (1961); III, **7** (2), 121–134 (1962).

6. Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для больших уклонений. *Теория вероятностей и ее применение* **10** (2), 231–254 (1965).

7. Rubin H., Sethuraman J. Probabilities of moderate deviations. *Sankhya. Ser. A* **27** (2–4), 325–346 (1965).

8. Нагаев А. В. Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера. *Изв. АН УзССР. Серия физ.-мат. наук* **6**, 17–22 (1969).

9. Амосова Н. Н. О предельных теоремах для вероятностей умеренных уклонений. *Вестник Ленинградского университета* **13**, 5–14 (1972).

10. Michel R. Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations. *Ann. Probab.* **4** (1) 102–106 (1976).

11. Сластников А. Д. Предельные теоремы для вероятностей умеренных уклонений. *Теория вероятности и ее применение* **23** (2) 340–357 (1978).

12. Амосова Н. Н. О вероятностях умеренных уклонений сумм независимых случайных величин. *Теория вероятностей и ее применение* **24** (4), 858–865 (1979).

13. Розовский Л. В. О предельных теоремах для больших уклонений в узких зонах. *Теория вероятности и ее применение* **26** (4) 847–857 (1981).

14. Rychlik Z. Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations. *Theor. Probab. App.* **28** (4), 646–652 (1983).

15. Сластников А. Д. Узкие зоны нормальной сходимости для сумм неодинаково распределенных случайных величин. *Теория вероятности и ее применение* **29** (3), 551–554 (1984).

16. Frolov A. N. On one-sided strong laws for large increments of sums. *Statist. and Probab. Letters* **37**, 155–165 (1998).

17. Фролов А. Н. О вероятностях умеренных уклонений сумм независимых случайных величин. *Записки научных семинаров ПОМИ* **294**, 200–215 (2002).

18. Розовский Л. В. Суммы независимых случайных величин с конечными дисперсиями — умеренные уклонения и оценки в ЦПТ. *Записки научных семинаров ПОМИ* **311**, 242–259 (2004).

19. Фролов А. Н. Об асимптотическом поведении вероятностей умеренных уклонений. *Труды Санкт-Петербургского математического общества* **14**, 197–211 (2008).

Статья поступила в редакцию 8 февраля 2023 г.;
доработана 29 апреля 2023 г.;
рекомендована к печати 18 мая 2023 г.

Контактная информация:

Фролов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.frolov@spbu.ru

On asymptotic behaviour for probabilities of moderate deviations of combinatorial sums*

A. N. Frolov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Frolov A. N. On asymptotic behaviour for probabilities of moderate deviations of combinatorial sums. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 4, pp. 762–774. https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.412 (In Russian)

We investigate an asymptotic behaviour for probabilities of moderate deviations of combinatorial sums of independent random variables having moments of order $p > 2$. We find zones in which these probabilities are equivalent to the tail of the standard normal law. The width of zone is a function from the logarithm of a combinatorial variant for Lyapunov's ratio. The author earlier obtained similar results under Bernstein's and Linnik's conditions. The truncations method is used in proofs of the results.

Keywords: probabilities of large deviations, probabilities of moderate deviations, combinatorial central limit theorem, combinatorial sums.

References

1. Frolov A. N. 2022. On large deviations for combinatorial sums. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 217, 24–32.

2. Frolov A. N. On probabilities of large deviations of combinatorial sums of independent random variables satisfying Linnik's condition. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 3, 546–554. (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.308 (In Russian) (In print)

3. Frolov A. N. On the probabilities of moderate deviations for combinatorial sums. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (60), iss. 1, 60–67 (2015). (In Russian) [Engl. trans.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **48** iss. 1, 23–28 (2015). https://doi.org/10.3103/S1063454115010045].

4. Frolov A. N. Esseen type bounds of the remainder in a combinatorial CLT. *J. Statist. Planning and Inference* **149**, 90–97 (2014).

5. Linnik Yu. V. Limit theorems for sums of independent random variables. I, II, III. *Teoriia veroiatnostei i ee primenenie* I, **6** (2), 145–163 (1961); II, **6** (4), 377–391 (1961); III, **7** (2), 121–134 (1962). (In Russian)

6. Nagaev S. V. Some limit theorems for large deviations. *Theor. Probab. Appl.* **2**, 231–254 (1965). (In Russian)

7. Rubin H., Sethuraman J. Probabilities of moderate deviations. *Sankhya, Ser. A* **27** (2–4) 325–346 (1965)

8. Nagaev A. V. Limit theorems including the effecr of large deviations when Cramer's condition is violated. *Izvestiia AN UzSSR. Seriia fiz.-mat. nauk* **6**, 17–22 (1969). (In Russian)

9. Amosova N. N. On limit theorems for probabilities of moderate deviations. *Vestnik Leningrad University* **13**, 5–14 (1972). (In Russian)

*The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project 23-21-00078).

10. Michel R. Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations. *Ann. Probab.* **4** (1), 102–106 (1976).

11. Slastnikov A. D. Limit theorems for moderate deviation probabilities. *Theor. Probab. Appl.* **23** (2), 340–357 (1978). (In Russian)

12. Amosova N. N. On probabilities of moderate deviations for sums of independent random variables. *Theor. Probab. Appl.* **24** (4), 858–865 (1979). (In Russian)

13. Rozovskii L. V., Limit theorems for large deviations in narrow zones. *Theor. Probab. Appl.* **26** (4), 847–857 (1981). (In Russian)

14. Rychlik Z. Nonuniform central limit bounds with applications to probabilities of deviations. *Theor. Probab. Appl.* **28** (4), 646–652 (1983).

15. Slastnikov A. D. Narrow zones of normal convergence for sums of non-identically distributed random variables. *Theor. Probab. Appl.* **29** (3), 551–554 (1984). (In Russian)

16. Frolov A. N. On one-sided strong laws for large increments of sums. *Statist. and Probab. Letters* **37**, 155–165 (1998).

17. Frolov A. N. On probabilities of moderate deviations of sums of independent random variables. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **294**, 200–215 (2002). (In Russian)

18. Rozovskii L. V., Sums of independent random variables with finite variances — moderate deviations and bounds in CLT. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **311**, 242–259 (2004). (In Russian)

19. Frolov A. N. Asymptotic behaviour of probabilities of moderate deviations. *Trudy St. Petersburgskogo Mat. Obschestva* **14**, 197–211 (2008). (In Russian)

Received: February 8, 2023
Revised: April 29, 2023
Accepted: May 18, 2023

Author's information:

Andrei N. Frolov — a.frolov@spbu.ru