УДК 517.925.42 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1
MSC 34D10, 34D20

Периодические возмущения осцилляторов на плоскости

Ю. Н. Бибиков, Е. В. Васильева

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Бибиков Ю. Н., Васильева Е. В.* Периодические возмущения осцилляторов на плоскости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 38–47. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.102

Представлен обзор результатов исследований, выполненных в текущем столетии на кафедре дифференциальных уравнений Санкт-Петербургского государственного университета. Изучается проблема устойчивости нулевого решения уравнения второго порядка, описывающего периодические возмущения осциллятора с нелинейной восстанавливающей силой при обратимых и консервативных возмущениях. Такие возмущения относятся к трансцендентным возмущениям, при которых для решения вопроса об устойчивости необходимо учитывать все члены разложения правой части уравнения в ряд. Задача об устойчивости при трансцендентных возмущениях была поставлена в 1893 г. А. М. Ляпуновым. Представленные в данной статье результаты по устойчивости осциллятора проводились методами КАМ-теории: рассмотрены возмущения осциллятора с бесконечно малой и бесконечно большой частотой колебаний; даны условия наличия квазипериодических решений в любой окрестности временной оси, откуда следует устойчивость (не асимптотическая) нулевого решения возмущенного уравнения; даны условия устойчивости нулевого решения гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, невозмущенная часть которой описывается парой осцилляторов (в этом случае рассматриваются консервативные возмущения).

Ключевые слова: гармонический осциллятор, устойчивость, теория КАМ, консервативные возмущения, обратимые возмущения, гамильтонова система, квазипериодические решения.

1. Введение. В статье дан обзор результатов исследований поведения возмущенного осциллятора в окрестности особой точки, полученных уже в нынешнем столетии сотрудниками и аспирантами кафедры дифференциальных уравнений Санкт-Петербургского государственного университета. Этой кафедрой с 1960 по 2019 г. заведовал выдающийся ученый, профессор В. А. Плисс (член-корр. АН СССР с 1990 г.), под его руководством на кафедре проводилась научная работа по многим направлениям современной качественной теории дифференциальных уравнений. Обзор достижений сотрудников кафедры по локальной качественной теории дифференциальных уравнений, которые были получены в 70–90-е годы прошлого века, дан в [1]. Исследования, которые проводятся на кафедре, являются прямым продолжением работ А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, А. А. Андронова и других выдающихся ученых; характерным примером такого продолжения являются исследования по проблеме устойчивости нулевого решения возмущенного осциллятора.

В предлагаемой статье представлены результаты работы по проблеме устойчивости нулевого решения дифференциального уравнения, описывающего различные возмущения осциллятора. Это направление научных исследований актуально, результаты используются в приложениях. Исследование автономных возмущений негармонического осциллятора, было проведено еще А. М. Ляпуновым в 1893 г., в связи с этим следует отметить его монографию «Общая задача теории устойчивости движения», которая оказала большое влияние на работу кафедры, однако задача о поведении возмущенного осциллятора в окрестности особой точки осталась незавершенной. После А. М. Ляпунова исследования возмущений гармонического осциллятора проводились разными авторами — в рамках теории А. Н. Колмогорова — В. И. Арнольда — Ю. Мозера. А. Н. Колмогоров в 1954 г. разработал метод ускоренной сходимости построения квазипериодических решений гамильтоновых систем. При изучении осциллятора А. А. Андроновым и его последователями было введено понятие бифуркации рождения предельного цикла. В 1967 г. Ю. Н. Бибиковым и В. А. Плиссом в [2] было показано, что метод А. Н. Колмогорова применим не только к гамильтоновым системам. С этого времени проф. Ю. Н. Бибиков и его ученики ведут исследования по этой проблеме, были изучены обратимые и консервативные возмущения осциллятора с нелинейной восстанавливающей силой с бесконечно малой и бесконечно большой частотой колебаний. Построена теория, которую можно рассматривать как продолжение и завершение классических работ А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, В. И. Арнольда и Ю. Мозера по исследованию окрестности эллиптической особой точки при периодических по времени возмущениях.

2. Возмущения гармонического осциллятора. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = X(x, \dot{x}, t), \tag{1}$$

где $X(x, y, t)$ — сходящийся в некоторой окрестности точки $(x = 0, y = 0)$ ряд с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами; λ — иррациональное число. Разложение X не содержит членов ниже второго порядка.

В комплексно-сопряженных переменных $y = x - i(\lambda)^{-1}\dot{x}$, $\overline{y} = x + i(\lambda)^{-1}\dot{x}$ уравнение (1) примет вид системы

$$\begin{aligned} \dot{y} &= i\lambda y + Y(y, \overline{y}, t), \\ \dot{\overline{y}} &= -i\lambda \overline{y} + \overline{Y}(y, \overline{y}, t). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем (в разделе 2) черта означает комплексное сопряжение. Так как λ — иррациональное, то нормальная форма системы (2) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\lambda z + z\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k+1}(z\overline{z})^k, \\ \dot{\overline{z}} &= -i\lambda \overline{z} + \overline{z}\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a}_{2k+1}(z\overline{z})^k, \end{aligned} \tag{3}$$

где a_{2k+1} — постоянные.

Система (3) определяет две вещественные последовательности $g_1, g_2, \ldots$ и $h_1, h_2, \ldots$, где $g_k = Re(a_{2k+1}), h_k = Im(a_{2k+1})$. Еще А. Пуанкаре и А. М. Ляпунов установили, что вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (1) решается знаком первого ненулевого члена последовательности $\{g_k\}$, который называется фокусной величиной. При этом условие иррациональности λ можно ослабить до неравенства

$$q\lambda + p \neq 0, \tag{4}$$

где q и p — целые числа, $0 <\mid q \mid\leq 2n+2$, где n — номер первого ненулевого члена последовательности $\{h_k\}$.

Однако возможен случай, когда все g_k равны нулю. А. М. Ляпунов назвал такой случай трансцендентным (в отличие от алгебраического, когда существует фокусная величина). При этом, если не все h_k равны нулю, этот случай будем называть общим трансцендентным. Исследование трансцендентного случая представляет значительные трудности, так как при вычислении коэффициентов нормализующего преобразования приходится делить на числа вида (4) (проблема «малых знаменателей»). Эти трудности удалось преодолеть предложенным А. Н. Колмогоровым в 1954 г. методом ускоренной сходимости построения квазипериодических решений гамильтоновых систем. Из работы [2] следует, что к системе (2) можно применить метод А. Н. Колмогорова. На этом пути была установлена устойчивость по Ляпунову нулевого решения уравнения (1) в общем трансцендентном случае [3, 4, доп. 3].

Уравнение (1) называется обратимым, если возмущение X удовлетворяет условию

$$X(x, \dot{x}, t) = X(x, -\dot{x}, -t). \tag{5}$$

При выполнении последнего условия имеет место трансцендентный случай.

Теорема 1 [3, 4]. *В общем трансцендентном случае нулевое решение обратимого уравнения (1) устойчиво по Ляпунову (неасимптотически).*

Приведем основные моменты доказательства.

Достаточно доказать существование квазипериодического решения в любой окрестности точки $(x = 0,\ y = 0)$.

Оборвем формальный ряд нормализующего преобразования на члене порядка $2n+1$, где n — номер первого ненулевого члена последовательности $\{h_k\}$. В полученной системе введем полярные координаты $r,\ \varphi$ по формулам $z = \sqrt{r}e^{i\varphi},\ \overline{z} = \sqrt{r}e^{-i\varphi}$. Получим систему

$$\begin{cases} \dot{r} = O(r^{n+2}), \\ \dot{\varphi} = \lambda + h_n r^n + O(r^{n+1}), \end{cases} \tag{6}$$

в которой введем параметр $c \in \left((\frac{1}{2})^n,\ (\frac{3}{2})^n\right)$ согласно формуле

$$r = \varepsilon(c^{\frac{1}{n}} + \sqrt{\varepsilon}\rho), \tag{7}$$

где ε — малый положительный параметр. Получим систему

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} R, \\ \dot{\varphi} = \lambda + h_n c\varepsilon^n + \varepsilon^{n+\frac{1}{2}}\Phi, \end{cases} \tag{8}$$

где Φ, R — ограниченные функции.

Пусть ω — число, удовлетворяющее неравенству

$$\mid q\omega + p \mid> K\varepsilon^n q^{-2},\ (K > 0),$$

где $q \neq 0,\ p$ — целые числа, определенные в (4).

Наряду с системой (8) рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} R, \\ \dot{\varphi} = a + \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} \Phi. \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) удовлетворяет условиям теоремы из § 1 гл. II монографии [4]. Она утверждает, что существует функция

$$a^*(\varepsilon,\, c^{\frac{1}{n}}) = \omega + \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} \sigma(\varepsilon,\, c^{\frac{1}{n}})$$

такая, что при $a = a^*(\varepsilon,\, c^{\frac{1}{n}})$ система

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} R, \\ \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} \sigma(\varepsilon,\, c^{\frac{1}{n}}) + \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} \Phi \end{cases} \tag{10}$$

имеет квазипериодические решения

$$\begin{cases} \rho = v(\omega t + \varphi_0,\, t,\, \varepsilon,\, c^{\frac{1}{n}}), \\ \varphi = \omega t + \varphi_0 + w(\omega t + \varphi_0,\, t,\, \varepsilon,\, c^{\frac{1}{n}}). \end{cases} \tag{11}$$

Системы (8) и (10) совпадают, если

$$\lambda + h_n c \varepsilon^n = \omega + \varepsilon^{n+\frac{1}{2}} \sigma(\varepsilon,\, c^{\frac{1}{n}}). \tag{12}$$

Так как $h_n \neq 0$, то уравнение (12) имеет решение $c = \widetilde{c}(\varepsilon,\, \omega)$. Подставляя это решение в формулы (7) и (11), находим квазипериодические решения системы (6). Такие решения существуют в любой окрестности временной оси. Отсюда вытекает, что нулевое решение системы (6), а значит, и обратимого уравнения (1), устойчиво по Ляпунову.

3. Возмущения осцилляторов с бесконечно малой частотой колебаний. Рассмотрим осцилляторы, задаваемые уравнением:

$$\ddot{x} + x^{\frac{p}{q}} = 0, \tag{13}$$

где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, $p \neq q$; p и q — нечетные числа.

Введем в рассмотрение периодические функции $C(\varphi)$ и $S(\varphi)$, определяемые как решения задачи Коши

$$C' = -S,\ S' = C^{\frac{p}{q}},\ C(0) = 1,\ S(0) = 0.$$

При $p = q$ функции $C(\varphi)$ и $S(\varphi)$ превращаются в обычные $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Перейдем к координатам $r,\ \varphi$ по формулам

$$x = r^q C(\varphi),\ \dot{x} = -r^{\frac{p+q}{2}} S(\varphi) \tag{14}$$

Получим систему

$$\dot{r} = 0,\ \dot{\varphi} = r^{\frac{p-q}{2}}.$$

Таким образом, частота осциллятора (13) является бесконечно малой функцией амплитуды при $p > q$ и бесконечно большой при $p < q$.

Предположим, что $p > q$. Подвергнем осциллятор (13) возмущению $X(x,\, \dot{x},\, t)$, где $X(x, y, t)$ — вещественно аналитическая по x, y функция в некоторой окрестности точки ($x = 0$, $y = 0$), непрерывная и периодическая по t. Мы предполагаем, что разложение функции $X(x, y, t)$ по степеням x, y не содержит членов порядка ниже $p+1$, если переменной x приписать порядок q, а переменной y — порядок $\frac{p+q}{2}$.

Уравнение

$$\ddot{x} + x^{\frac{p}{q}} = X(x,\, \dot{x},\, t) \tag{15}$$

можно рассматривать как малое периодическое возмущение осциллятора (13). Оказывается [5], что, как и в случае возмущений гармонического осциллятора, можно построить последовательность чисел $\{g_k\}$, первый ненулевой член которой определяет характер устойчивости нулевого решения (15).

Действительно, перейдем в уравнении (15) к переменным r, φ по формулам (14).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2 [5, 6]. *Для полученной системы существует замена в виде формального ряда*

$$r = \rho + h_{s-\alpha}(\varphi,\, t)\rho^{s-\alpha} + \cdots\,, \tag{16}$$

которая приводит систему к виду

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= g_s\rho^s + g_{s+1}\rho^{s+1} + \cdots\,, \\ \dot{\varphi} &= \rho^{\alpha} + a_{s-1}(\varphi,\, t)\rho^{s-1} + \cdots\,, \end{aligned}$$

где g_k *— постоянные;* $\alpha = \frac{p-q}{2}$*;* $s \geq \alpha + 2$.

Если $q = 1,\ p = 2n - 1,\ \alpha = n - 1$, *то* $s = n + 1$, *если* n *— четное, и* $s = n + 2$, *если* n *— нечетное.*

Коэффициенты преобразования (16) определяются последовательно квадратурами.

Следствие. *Пусть* $g_s \neq 0$. *Тогда, если* $g_s < 0$, *то нулевое решение уравнения(15) асимптотически устойчиво, а если* $g_s > 0$, *то оно неустойчиво.*

Рассмотрим подробнее случай $q = 1$. Этот случай для автономных возмущений рассматривал А. М. Ляпунов [7]. В его обозначениях $p = 2n - 1,\ n \geq 2$ — целые, $C(\varphi) = Cs\varphi$, $S(\varphi) = Sn\varphi$, причем Cs и Sn — периодические функции. Это позволяет в трансцендентном случае, т. е. когда все $g_k = 0$, использовать, как и выше, теорему из § 1 гл. II монографии [4].

Подстановка (14) имеет вид $x = rCs\varphi$, $y = -r^n Sn\varphi$. В результате получим систему

$$\dot{r} = O(r^{n+1}),\ \dot{\varphi} = r^{n-1} + O(r^n),$$

аналогичную системе (6), где $\lambda = 0$, а роль ненулевой постоянной h_n играет коэффициент при r^{n-1}, т. е. $h_n = 1$. Отсюда следует теорема.

Теорема 3. *Пусть уравнение (15) — обратимое, т. е. выполняются равенства (5). Тогда нулевое решение уравнения (15) устойчиво по Ляпунову.*

В заключение заметим, что наряду с возмущениями осциллятора $\ddot{x} + x^{2n-1} = 0$ А. М. Ляпунов рассматривал автономные возмущения дифференциального уравнения $\ddot{x} + x^{2n-1} + bx^{n-1}\dot{x} = 0$, которое при $0 < |b| < 2\sqrt{n}$ также является осциллятором.

Эти исследования для периодических и квазипериодических возмущений были продолжены в работах [8–10].

В работе [8] предложен метод вычисления фокусной постоянной, аналогичный методу, упомянутому выше при исследовании осциллятора с бесконечно малой частотой невозмущенных колебаний при $b = 0$. Кроме того, для возмущений, зависящих от малого параметра $\varepsilon \geq 0$, построены бифуркационные уравнения, положительным корням которых соответствуют ответвления двухчастотных квазипериодических решений (инвариантных торов) при прохождении ε через нулевое значение.

В работе [9] рассматривались квазипериодические возмущения. При этом коэффициент в невозмущенной части также предполагался квазипериодической функцией времени.

В работах [8, 9] рассматривались алгебраические случаи.

Наконец, в работе [10] были исследованы обратимые возмущения. Доказано, что если $\max b(t)$ достаточно мал, то нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

4. Возмущения осциллятора с бесконечно большой частотой колебаний [11]. Пусть теперь в уравнении (15) $p < q$. Особенностью этого случая является то, что наинизшая часть разложения функции $X(x, \dot{x}, t)$ является линейной, независимо от p и q, точнее

$$X = a(t)x + b(t)\dot{x} + \cdots$$

Введем в уравнении (15) переменные r, φ по формулам (14).

Теорема 4. *Для полученной системы существует замена*

$$r = P(t)\rho + Q(t,\, \varphi)\rho^{1+s},\ \ P(t) \neq 0,$$

где $s = \frac{q-p}{2}$, $s \geq 1$, *приводящая систему к виду*

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= g\rho + O(\rho^{1+s}), \\ \dot{\varphi} &= (\rho P(t))^{-s} + O(1),\ \ \rho \to 0, \end{aligned}$$

где g *— постоянная, равная среднему значению функции* $\frac{1}{2}b(t)S^2(\varphi)$.

Следствие. *Если* $\overline{b}(t) > 0$, *то нулевое решение уравнения (15) неустойчиво. Если* $\overline{b}(t) < 0$, *то оно асимптотически устойчиво.*

Черта здесь обозначает среднее значение функции.

Случай $g = 0$ сводится к случаю $p > q$, если в качестве независимой переменной выбрать угловую переменную φ.

5. Консервативные возмущения [4]. Другой тип возмущений, кроме обратимых, также приводящий к трансцендентному случаю, — это консервативные возмущения. В этом случае возмущение $X(x,\, \dot{x},\, t)$ не зависит от $\dot{x}$.

Рассмотрим осциллятор (13) при $q = 1$, $p = 2m - 1$, $m \geq 2$ — целое. Случай $m = 1$ был изучен ранее В. И. Арнольдом и Ю. Мозером (см. обзор результатов в книге [12, доп. 8]). Возмущенное уравнение можно записать в виде гамильтоновой системы

$$\dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial y},\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x},$$

где $H = \frac{1}{2m}x^{2m} + \frac{1}{2}y^2 - \int\limits_0^x X(s,\, t)ds$.

Введем канонические обобщенные полярные координаты $r > 0$, φ:

$$x = ((m+1)r)^{\frac{1}{m+1}} C(\varphi), \ \ y = ((m+1)r)^{\frac{m}{m+1}} S(\varphi).$$

Переменную ρ введем по формуле

$$r = \frac{\varepsilon^{m+1}}{m+1}(c^{\frac{m+1}{m-1}} + \sqrt{\varepsilon}\rho), \ \ c \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Получим гамильтонову систему

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon^{m-\frac{1}{2}} R(\rho, \varphi, t, \sqrt{\varepsilon}, c), \\ \dot{\varphi} = c\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{m-\frac{1}{2}} \Phi(\rho, \varphi, t, \sqrt{\varepsilon}, c), \end{cases}$$

аналогичную системе (8).

Как было показано ранее, согласно КАМ-теории в любой окрестности временной оси существуют квазипериодические решения, что и обеспечивает устойчивость по Ляпунову нулевого решения возмущенного уравнения.

6. Две степени свободы. Рассмотрим вещественно аналитическую гамильтонову систему с двумя степенями свободы в окрестности положения равновесия в начале координат. Предположим, что невозмущенная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\lambda_1 y_1, \\ \dot{y}_1 = \lambda_1 x_1^{2m-1}, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 y_2, \\ \dot{y}_2 = -\lambda_2 y_2^{2n-1}, \end{cases}$$

тогда гамильтониан имеет вид $H = H_0 + H_1$, при этом невозмущенная часть гамильтониана есть

$$H_0 = \frac{\lambda_1}{2m}(x_1^{2m} + y_1^2) - \frac{\lambda_2}{2n}(x_2^{2n} + y_2^2),$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, а $m > 1$, $n > 1$ — натуральные числа. Разложение возмущения H_1 по степеням x_1, y_1, x_2, y_2 не содержит членов порядка ниже $2w+ \mid k - \ell \mid +1$, где w — наименьшее общее кратное чисел m и n, $w = m\ell = nk$, если, рассматривая переменную x_1 как величину ℓ-го измерения, а переменную x_2 как величину k-го измерения, приписать переменным y_1, y_2 измерение, равное w.

Замечание. Такая задача возникает при исследовании консервативных возмущений пары осцилляторов

$$\ddot{x}_1 + \lambda_1^2 x_1^{2m-1} = 0 \quad \text{и} \quad \ddot{x}_2 + \lambda_2^2 x_2^{2n-1} = 0.$$

В работах [13, 14] доказано:

1. Если $n \neq m$, то положение равновесия устойчиво по Ляпунову.

2. Если $n = m$, то положение равновесия условно устойчиво для начальных данных, удовлетворяющих условию $H \neq 0$.

Пусть $m = n$. Как показано в работе [14], в результате редуцирования системы на поверхность уровня $H = 0$ получим гамильтонову систему вида (6). Так как консервативные возмущения, как и обратимые, относятся к трансцендентным, то из рассуждений п. 2 следует, что нулевое решение условно устойчиво для начальных данных на поверхности уровня $H = 0$, удовлетворяющих условию типа неравенства.

Литература

1. Андреев А. Ф., Бибиков Ю. Н. Исследования по локальной качественной теории дифференциальных уравнений на кафедре дифференциальных уравнений Петербургского университета. В: *Нелинейные динамические системы.* Вып. 2, 36–70, Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та. (1999).

2. Бибиков Ю. Н., Плисс В. А. О существовании инвариантных торов в окрестности положения равновесия. *Дифференциальные уравнения* **3** (11), 1864–1881 (1967).

3. Bibikov Yu. N. Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 702. Springer-Verlag (1979).

4. Бибиков Ю. Н. *Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации.* Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1991).

5. Бибиков Ю. Н., Букаты В. Р., Трушина Н. В. Об устойчивости положения равновесия при периодических возмущениях осциллятора со степенной вoccстанавливающей силой с рациональным показателем. *Прикладная математика и механика* **80** (6), 629–636 (2016).

6. Бибиков Ю. Н., Савельева А. Г. Периодические возмущения нелинейного осциллятора. *Дифференциальные уравнения* **52** (4), 411–418 (2016). https://doi.org/10.1134/S0374064116040014

7. Ляпунов А. М. *Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения.* В: Собр. соч.: в 5 т. Т. 2. М; Л., Изд-во АН СССР (1956).

8. Бибиков Ю. Н., Савельева А. Г. Периодические возмущения неконсервативного центра. *Дифференциальные уравнения* **54** (3), 302–306 (2018). https://doi.org/10.1134/S0374064118030032

9. Басов В. В., Бибиков Ю. Н. Об устойчивости нелинейного центра при квазипериодических возмущениях. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 2, 269–276 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.209

10. Бибиков Ю. Н. Об устойчивости нулевого решения периодического обратимого дифференциального уравнения второго порядка. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 3, 474–479 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.308

11. Бибиков Ю. Н., Букаты В. Р. Об устойчивости положения равновесия осциллятора с бесконечно большой частотой собственных колебаний. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6** (64), вып. 3, 394–398 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.304

12. Арнольд В. И. *Методы классической механики.* Москва, Наука (1989).

13. Бибиков Ю. Н. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. *Прикладная математика и механика* **77** (2), 232–238 (2013).

14. Бибиков Ю. Н. Об устойчивости гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. *Математические заметки* **95** (2), 202–208 (2014). https://doi.org/10.421/mzm9115

Статья поступила в редакцию 15 февраля 2023 г.;
доработана 16 мая 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Бибиков Юрий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; bibicoff@yandex.ru
Васильева Екатерина Викторовна — д-р физ.-мат. наук, проф.; ekvas1962@mail.ru

Periodic perturbations of oscillators on the plane

Yu. N. Bibikov, E. V. Vasil'eva

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Bibikov Yu. N., Vasil'eva E. V. Periodic perturbations of oscillators on the plane. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 38–47. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.102 (In Russian)

A review of the results of research carried out in the current century at the Department of Differential Equations of St. Petersburg State University is presented. We study the problem of stability of the zero solution of a second-order equation describing periodic perturbations of an oscillator with a nonlinear restoring force under reversible and conservative perturbations. Such perturbations are related to transcendental perturbations, in which, in order to solve the problem of stability, it is necessary to take into account all the terms of the expansion of the right side of the equation into a series. The problem of stability under transcendental perturbations was posed in 1893 by A. M. Lyapunov. The results presented in this article on the stability of the oscillator were carried out using the KAM-theory methods: perturbations of the oscillator with infinitely small and infinitely large oscillation frequencies are considered; conditions for the presence of quasi-periodic solutions in any neighborhood of the time axis are given, from which follows the stability (not asymptotic) of the zero solution of the perturbed equation; stability conditions are given for the zero solution of a Hamiltonian system with two degrees of freedom, the unperturbed part of which is described by a pair of oscillators (in this case, conservative perturbations are considered).

Keywords: harmonic oscillator, stability, KAM theory, conservative perturbations, reversible perturbations, Hamiltonian system, quasi-periodic solutions.

References

1. Andreev A. F., Bibikov Y. N. Investigations in the local qualitative theory of differential equations at the chair of differential equations of Petersburg university. In: *Nonlinear dynamic systems*, vol. 2, 36–70. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1999). (In Russian)

2. Bibikov Y. N., Pliss V. A. The existence of invariant tori in the neighborhood of the zero solution of a system of ordinary differential equations. *Differential Equations* **3** (11), 1864–1881 (1967). (In Russian)

3. Bibikov Yu. N. Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations. *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 702. Springer-Verlag (1979).

4. Bibikov Yu. N. *Multifrequency nonlinear oscillations and their bifurcations.* Leningrad, Leningrad University Press (1991). (In Russian)

5. Bibikov Yu., Bukaty V., Trushina N. On the stability of the equilibrium under periodic perturbations of an oscillator with a power-law restoring force with a rational exponent. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **80** (6), 629–636 (2016). (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **80** (6), 443–448 (2016). https:/doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.06.002].

6. Bibikov Y. N., Savel'eva A. G. Periodic perturbations of a nonlinear oscillator. *Differential Equations* **52** (4), 411–418 (2016). https://doi.org/10.1134/S0374064116040014 (In Russian) [Eng. transl.: *Differential Equations* **52** (4), 405–412 (2016). https://doi.org/10.1134/S0012266116040017].

7. Lyapunov A. M. *Investigation of one particular case of the problem of stability of motion.* In: Collected works: in 5 vols, vol. 2. Moscow, Leningrad, AN SSSR Publ. (1956). (In Russian)

8. Bibikov Y. N., Savel'eva A. G. Periodic perturbations of a nonconservative center. *Differential Equations* **54** (3), 302–306 (2018). https://doi.org/10.1134/S0374064118030032 (In Russian) [Eng. transl.: *Differential Equations* **54** (3), 295–299 (2018). https://doi.org/10.1134/S0012266118030023]

9. Basov V. V., Bibikov Y. N. On the stability of the nonlinear center under quasi-periodic perturbations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 2, 269–276 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.209 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **53**, iss. 2, 174–179 (2020). https://doi.org/10.1134/S1063454120020041].

10. Bibikov Y. N. On the Stability of the Zero Solution of a Periodic Reversible Second-Order Differential Equation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 3, 474–479 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.308 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 3, 297–300 (2022). https://doi.org/10.1134/S1063454122030062].

11. Bibikov Y. N., Bukaty V., Stability of the Equilibrium of an Oscillator with an Infinitely High Natural Oscillation Frequency. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (64) iss. 3, 394–398 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.304 (In

Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **52**, iss. 3, 259–262 (2019). https://doi.org/10.1134/S1063454119030051].

12. Arnold V. I. *Mathematical methods of classical mechanics.* Moscow, Nauka Publ. (1989). (In Russian)

13. Bibikov Y. N. The stability of the equilibrium position of Hamiltonian systems with two degrees of freedom. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **77** (2), 232–238 (2013). (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **77** (2), 167–171 (2013). https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2013.07.006].

14. Bibikov Y. N. On stability in Hamiltonian systems with two degrees of freedom. *Mathematical Notes* **95** (2), 202–208 (2014). https://doi.org/10.421/mzm9115 (In Russian) [Eng. transl.: *Mathematical Notes* **95** (2), 176–181 (2014). https://doi.org/10.1134/S0001434614010180].

Received: February 15, 2023
Revised: May 16, 2023
Accepted: August 31, 2023

Authors' information:

Yuri N. Bibikov — bibicoff@yandex.ru
Ekaterina V. Vasil'eva — ekvas1962@mail.ru