Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1
УДК 519.213+517
MSC 60E15, 60D05

Вероятность попадания случайного вектора в усеченный многогранный конус: мажоризационный аспект

М. И. Ревяков

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ РАН),
Российская Федерация, 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27

Для цитирования: *Ревяков М. И.* Вероятность попадания случайного вектора в усеченный многогранный конус: мажоризационный аспект // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 131–140. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.108

В статье приводятся условия, при которых вероятность попадания линейной комбинации случайных векторов в сжатый (сверху) многогранный конус, в частности усеченный конус, является *Schur*-вогнутой функцией от вектора, отвечающего этой линейной комбинации. Требуется, чтобы сжатый конус был выпуклым, содержал точку $\mathbf{0}$, его ребра были параллельны осям координат, а плотность распределения векторов была логарифмически вогнутой знакоинвариантной функцией. Кроме того, получена в дифференциальной форме характеризация функций, сохраняющих один известный предпорядок, находящийся внутри мажоризационного предпорядка.

Ключевые слова: усеченный конус, G-мажоризация, знакоинвариантная плотность, логарифмическая вогнутость, предпорядок внутри мажоризации.

1. Введение. В статье [1], касающейся полных многогранных конусов, мы ради ясности предлагаемого подхода шли от частного к общему — от хорошо известной мажоризации к G-мажоризации (см. [2, § 14.C. 8]). Теперь, в разделе 2, где рассматриваются определенным образом сжатые конусы, при использовании того же подхода изложение строится иначе: частное формулируется как следствие общего, и тогда появляются *Schur*-вогнутые функции.

Раздел 3 посвящен введенному в [2, § 5.B] предпорядку векторов в $\mathbb{R}^n$, более редкому, чем мажоризация. В частности, в дифференциальной форме приводится характеризация функций, сохраняющих данный предпорядок.

2. Сжатые конусы. Пусть в $\mathbb{R}^n, n \geqslant 2$, $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $c_i \neq 0$, — вершина многогранного конуса, содержащего $\mathbf{0}$, и все n ребер которого параллельны осям координат. Возьмем по одной точке на каждом из этих ребер: $(c_1, \ldots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \ldots, c_n)$, $i = 1, \ldots, n$. Поскольку они лежат на открытых лучах, исходящих от вершины конуса и параллельных осям координат, то через них, очевидно, нельзя провести $(n-2)$-мерную плоскость. Следовательно (см., например, [3, § 3.3.5]), существует единственная $(n-1)$-мерная плоскость, содержащая эти точки.

Эта гиперплоскость делит конус на n-мерную пирамиду с вершиной в точке c и n-мерный усеченный многогранный конус, содержащий $\mathbf{0}$. Возьмем теперь произвольное выпуклое множество, содержащееся в пирамиде и включающее в себя ее основание. Нетрудно видеть, что объединение этого множества с усеченным конусом также выпукло. Обозначим образовавшийся в результате объединения, можно сказать, *сжатый* (сверху) конус через $\widetilde{\angle}(c_1,\ldots,c_n)$. Крайними представителями сжатого конуса являются: (а) полный конус и (б) усеченный конус. Случай (а) рассмотрен в [1].

Нам потребуется ввести ряд понятий, заимствованных в [4] и касающихся G-мажоризации. Пусть $Z : m \times n$ — случайная матрица со строками $Z_1',\ldots,Z_m'$, обозначим через V векторное пространство $m \times n$ матриц. Для данного множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$ и вектора $a \in \mathbb{R}^m$ пусть

$$\varphi_A(a) = P\left\{\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell Z_\ell' \in A\right\}. \tag{1}$$

Теперь возьмем группу G_0, состоящую из всех $m\times m$ матриц перестановок и всех $m \times m$ диагональных матриц с элементами ± 1 на диагонали. Группа G_0 порождает частичное упорядочение на $\mathbb{R}^m$ следующим образом. Для каждого $b \in \mathbb{R}^m$ пусть $\rho(b)$ означает выпуклую оболочку множества $\{gb : g \in G_0\}$ и будем писать $a \leqslant b$ в случае $a \in \rho(b)$. Такое упорядочение обстоятельно обсуждено в [5].

Функцию τ, определенную на $\mathbb{R}^m$, называют *убывающей* относительно данного упорядочения, если $a \leqslant b$ влечет за собой $\tau(a) \geqslant \tau(b)$. Следующая теорема 4.2 работы [4] служит нам отправной точкой.

Теорема 1 [4]. *Предположим, что f, плотность Z, удовлетворяет условиям:*

$$(i) \qquad f(gz) = f(z) \qquad \text{для всех } g \in G_0,\ z \in V;$$

$$(ii) \qquad \text{функция } f \text{ лог-вогнута.}$$

Тогда функция $\varphi_A(a)$, определенная в (1), *является убывающей для каждого выпуклого симметричного (относительно начала) множества $A \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Эта теорема позволяет нам получить следующий результат. Возьмем произвольную $m \times n$ матрицу z пространства V со столбцами $z_1'',\ldots,z_n''$. Пусть H — функция от m-мерных векторов такая, что $H(z_1'',\ldots,z_n'') = f(z)$.

Теорема 2. *Предположим, что плотность Z удовлетворяет условиям:*

$$(i) \qquad f(gz) = f(z) \qquad \text{для всех } g \in G_0,\ z \in V;$$

$$(ii) \qquad \text{функция } f \text{ лог-вогнута;}$$

$$(iii) \quad H(\varepsilon_1 z_1'',\ldots,\varepsilon_n z_n'') = H(z_1'',\ldots,z_n'') \ \ \forall \varepsilon_i = \pm 1.$$

Тогда функция $\varphi_A(a)$, определенная в (1), *является убывающей для каждого сжатого конуса $A \equiv \widetilde{\angle}(c_1,\ldots,c_n) \subset \mathbb{R}^n$.*

Замечание 1. Дополнительное условие (iii) требуется исключительно для нижеследующего равенства (2). Оно означает, что распределение случайной матрицы Z инвариантно относительно умножения любого ее столбца на -1.

Доказательство теоремы 2. В основе доказательства лежит подход, примененный в работе [1], посвященной полным конусам $\angle(c_1,\ldots,c_n)$. Прежде всего, обратим внимание на выражение в правой части (1) и введем оператор $\varepsilon =$

$(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i = \pm 1$, действующий на произвольное множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ таким образом, что $\varepsilon A = \{(t_1, \ldots, t_n) : \ (\varepsilon_1 t_1, \ldots, \varepsilon_n t_n) \in A\}$.

Заметим, что

$$W \equiv \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell Z'_\ell =< a, Z >= \Big((a, Z''_1), \ldots, (a, Z''_n)\Big),$$

где $Z''_1, \ldots, Z''_n$ — столбцы матрицы Z; $< \cdot, \cdot >$ обозначает векторно-матричное произведение, а $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение векторов. Отсюда следует

$$P\{W \in A\} = P\Big\{\Big(\varepsilon_1(a, Z''_1), \ldots, \varepsilon_n(a, Z''_n)\Big) \in \varepsilon A\Big\} =$$

$$= P\Big\{\Big((a, \varepsilon_1 Z''_1), \ldots, (a, \varepsilon_n Z''_n)\Big) \in \varepsilon A\Big\} =$$

$$= P\Big\{\Big((a, Z''_1), \ldots, (a, Z''_n)\Big) \in \varepsilon A\Big\} = P\{W \in \varepsilon A\},$$

где предпоследнее равенство справедливо в силу условия (iii) теоремы (см. замечание 1).

Таким образом, если на базе $\widetilde{\angle}(c_1, \ldots, c_n)$ сформировать набор $L_*^{(n)}$ из 2^n сжатых конусов: $\forall \varepsilon_i = \pm 1$

$$\widetilde{\angle}(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n) = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \ (\varepsilon_1 t_1, \ldots, \varepsilon_n t_n) \in \widetilde{\angle}(c_1, \ldots, c_n)\},$$

то из предыдущего легко установить, что

$$P\{< a, Z >\in \widetilde{\angle}(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)\} = P\{< a, Z >\in \widetilde{\angle}(c_1, \ldots, c_n)\}. \qquad (2)$$

Для дальнейшего важно, что пирамиды конусов $\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)$ (точнее, их внутренности) попарно не пересекаются. Это действительно так, поскольку пирамида конуса $\angle(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)$ содержится в n-мерном прямоугольном параллелепипеде с вершинами $(\epsilon_1 \varepsilon_1 c_1, \ldots, \epsilon_n \varepsilon_n c_n) \forall \epsilon_i = 0$ или 1, а эти параллелепипеды попарно не пересекаются.

Покажем также, что $\bigcup_\varepsilon \widetilde{\angle}(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n) = \mathbb{R}^n$. Возьмем произвольную точку $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда, если $t \notin \widetilde{\angle}(\varepsilon_1 |c_1|, \ldots, \varepsilon_n |c_n|)$, где $\varepsilon_i = -\mathrm{sgn}(t_i)$, то t содержится в пирамиде конуса $\angle(\varepsilon_1 |c_1|, \ldots, \varepsilon_n |c_n|)$ и, значит, принадлежит любому другому сжатому конусу.

Для краткости, когда речь идет об определенном случайном векторе W, будем под $P[A]$ понимать $P\{W \in A\}$. Пусть в $\mathbb{R}^n$ имеется набор множеств $A_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, s$. Дальнейшие рассуждения базируются на формуле

$$\sum_{j=1}^{s} P[A_j^{(n)}] = \sum_{k=1}^{s} k P[R_k^{(n)}], \qquad P[\emptyset] = 0, \qquad (3)$$

где $R_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, s$, — множество (возможно, пустое) тех точек $t \in \mathbb{R}^n$, которые принадлежат ровно k из s множеств $A_j^{(n)}$; ясно, что $R_k^{(n)}$ попарно не пересекаются и $\bigcup_{k=1}^{s} R_k^{(n)} = \bigcup_{j=1}^{s} A_j^{(n)}$.

Наша цель, как и в [1], подобрать такой набор из 2^n выпуклых симметричных множеств $D_*^{(n)} = \{D_1^{(n)}, D_2^{(n)}, \ldots, D_{2^n}^{(n)}\}$, $D_1^{(n)} = \mathbb{R}^n$, что $\overline{R}_k^{(n)} = R_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, 2^n$, где $\overline{R}_k^{(n)}$ относятся к набору $D_*^{(n)}$, а $R_k^{(n)}$ — к набору $L_*^{(n)}$. Отсюда согласно (3) последует равенство

$$\sum_{j=1}^{2^n} P[\widetilde{\angle}_j^{(n)}] = \sum_{j=1}^{2^n} P[D_j^{(n)}], \tag{4}$$

и, учитывая (2), можно будет воспользоваться теоремой 1, справедливой для выпуклых симметричных множеств.

Сначала для $n = 2$ укажем требуемый набор $D_*^{(2)}$. На рис. 1 представлен двумерный сжатый конус (точнее, сжатый угол), а на рис. 2 размещен набор всех идентичных сжатых углов, где числами N снабжены множества точек, которые принадлежат ровно N сжатым углам из набора $\widetilde{\angle}_j^{(2)}$, $j = 1, 2, 3, 4$.

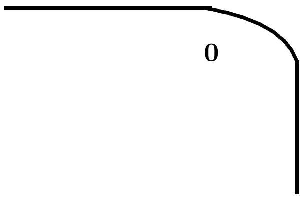

Рис. 1. Сжатый угол.

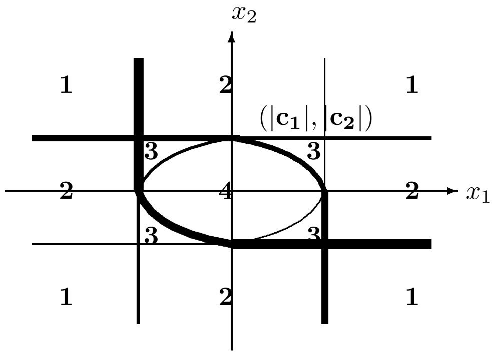

Рис. 2. Число множеств $\widetilde{\angle}_j^{(2)}(D_j^{(2)})$, покрывающих соответствующие области.

Легко проверяется, что точно такое же расположение N мы получим, если вместо этих углов возьмем множества $D_1^{(2)} = \mathbb{R}^2$, $D_2^{(2)}$ — вертикальная полоса, $D_3^{(2)}$ — горизонтальная полоса, $D_4^{(2)} = \bigcap \widetilde{\angle}_j^{(2)}$. Важно, что все фигуры набора $D_*^{(2)} = \{D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_3^{(2)}, D_4^{(2)}\}$ выпуклы и симметричны.

Перейдем теперь к $n \geqslant 3$. Попутно рис. 3 иллюстрирует случай $n = 3$, где для упрощения его восприятия представлен крайний вариант сжатого конуса — усеченные конусы, что не влияет на характер рисунка.

Здесь пунктирными линиями обозначены перпендикуляры, опущенные из точки **0** на ребра конусов. Следует отметить, что пирамиды при вершинах параллелепипеда идентичны.

Поскольку выводы в [1] основывались на соображениях конструктивного характера, то для случая полных конусов $\angle_j^{(n)}$ легко обнаружить, что

$$\overline{R}_{2^n}^{(n)} = D_{2^n}^{(n)} = \bigcap \angle_j^{(n)}.$$

Действительно, при $n = 2$ все три множества — это прямоугольник на рис. 2. Далее, обозначая $C = \{x^{(n+1)} \in \mathbb{R}^{n+1} : -|c_{n+1}| \leqslant x_{n+1} \leqslant |c_{n+1}|\}$, имеем

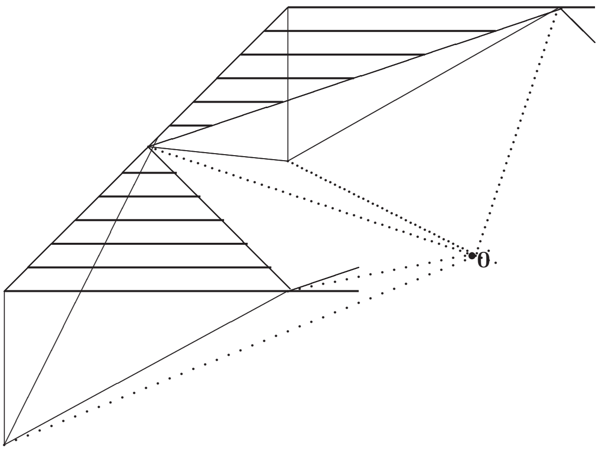

Рис. 3. Один их четырех идентичных фрагментов параллелепипеда $\bigcap \angle_j^{(3)}$.

$$\overline{R}_{2^{n+1}}^{(n+1)} = D_{2^{n+1}}^{(n+1)} = \left(D_{2^n}^{(n)} \times \mathbb{R}\right) \bigcap C = \left(\bigcap \angle_j^{(n)} \times \mathbb{R}\right) \bigcap C = \bigcap \angle_j^{(n+1)}.$$

Кроме того, в [1] установлено, что $\overline{R}_{2^n-1}^{(n)} = R_{2^n-1}^{(n)} = \emptyset$.

Покажем, что если заменить $D_{2^n}^{(n)} = \bigcap \angle_j^{(n)}$ на $D_{2^n}^{(n)} = \bigcap \widetilde{\angle}_j^{(n)}$, оставляя прежними $D_j^{(n)}$, $j = 1, \ldots, 2^n - 1$, то образуется надлежащий набор $D_*^{(n)}$ для ситуации со *сжатыми* конусами. Во-первых, $\overline{R}_{2^n-1}^{(n)} = \bigcap \angle_j^{(n)} \setminus \bigcap \widetilde{\angle}_j^{(n)}$, поскольку множество $\bigcap \angle_j^{(n)} \setminus \bigcap \widetilde{\angle}_j^{(n)}$, ранее принадлежавшее всем $D_j^{(n)}$, теперь с $D_{2^n}^{(n)}$ не пересекается. С другой стороны, $\bigcap \angle_j^{(n)} \setminus \bigcap \widetilde{\angle}_j^{(n)} = R_{2^n-1}^{(n)}$. Действительно, возьмем произвольную точку $t \in \bigcap \angle_j^{(n)} \setminus \bigcap \widetilde{\angle}_j^{(n)}$. Она принадлежит $\angle_j^{(n)} \setminus \widetilde{\angle}_j^{(n)}$ при некотором (единственном) $j = j_0$. Тогда несложно увидеть, что она содержится во всех сжатых конусах $\widetilde{\angle}_j^{(n)}$, где $j \neq j_0$. Понятно также, что $\overline{R}_k^{(n)} = R_k^{(n)}$ для $k = 1, \ldots, 2^n - 2$. Остается показать, что множество $D_{2^n}^{(n)} = \bigcap \widetilde{\angle}_j^{(n)}$ выпукло и симметрично.

Оно выпукло, будучи пересечением выпуклых множеств, каковыми являются сжатые конусы. Далее учтем, что каждая пара сжатых конусов $\widetilde{\angle}(\varepsilon_1 c_1, \ldots, \varepsilon_n c_n)$ и $\widetilde{\angle}(-\varepsilon_1 c_1, \ldots, -\varepsilon_n c_n)$ взаимно симметрична; значит, симметрично пересечение этой пары. Наконец, воспользуемся тем, что пересечение симметричных множеств симметрично.

Итак, поскольку $\overline{R}_k^{(n)} = R_k^{(n)}$, $k = 1, \ldots, 2^n$, то выполняется равенство (4), которое с учетом (1) и (2) приобретает следующий вид:

$$2^n \varphi_{\widetilde{\angle}(c_1, \ldots, c_n)}(a) = 1 + \sum_{j=2}^{2^n} \varphi_{D_j^{(n)}}(a).$$

Ввиду того, что $D_j^{(n)}$ — симметричные выпуклые множества, согласно теореме, все слагаемые в правой части являются убывающими функциями от a. Следовательно, левая часть тоже обладает этим свойством, что означает справедливость теоремы 2. □

Прежде чем сформулировать следствие теоремы 2, напомним определения *Schur*-выпуклой и *Schur*-вогнутой функций [2].

Полагают, что вектор $a = (a_1, \dots, a_m)$ *мажорируется* вектором $b = (b_1, \dots, b_m)$, и записывают $a \prec b$, если

$$\sum_{i=1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{k} b_{[i]} \geqslant \sum_{i=1}^{k} a_{[i]} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

где $b_{[1]} \geqslant \dots \geqslant b_{[m]}$, $a_{[1]} \geqslant \dots \geqslant a_{[m]}$ — упорядоченные по убыванию (невозрастанию) компоненты векторов b и a. Функция ψ называется *Schur*-выпуклой, соответственно, *Schur*-вогнутой, если из $a \prec b$ следует $\psi(a) \leqslant \psi(b)$, соответственно, $\psi(a) \geqslant \psi(b)$.

Следствие. *Пусть* $h(x_1, \dots, x_n) = h(|x_1|, \dots, |x_n|)$ *— лог-вогнутая плотность в* $\mathbb{R}^n$. *Тогда* $\forall\ c_i,\ i = 1, \dots, n,\ c_i \neq 0,$ *и* $a \prec b,\ a, b \in \mathbb{R}^m$

$$P\left\{\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell X_\ell \in \widetilde{\angle}(c_1, \dots, c_n)\right\} \geqslant P\left\{\sum_{\ell=1}^{m} b_\ell X_\ell \in \widetilde{\angle}(c_1, \dots, c_n)\right\},$$

где $X_\ell,\ \ell = 1, \dots, m,$ *— независимые одинаково распределенные* n*-мерные случайные векторы с общей плотностью* h.

Доказательство. Рассуждая, как в замечании 4.1 работы [4], можно заключить, что условия (i) и (ii) теоремы 2 выполняются. Остается учесть, что условие (iii) выполняется в силу знакоинвариантности плотности h. □

Замечание 2. Следствие можно интерпретировать таким образом, что вероятность попадания линейной комбинации случайных векторов в сжатый конус является *Schur*-вогнутой функцией от вектора, отвечающего этой линейной комбинации.

3. Предпорядок внутри мажоризационного предпорядка. В [1, § 3] было уделено внимание предпорядку $\preceq^1$ в $\mathbb{R}^n$ такому, что $(x \preceq^1 y) \Rightarrow (x \prec y)$. Именно: $x \preceq^1 y$, если разность $y_{[i]} - x_{[i]}$ не возрастает по $i = 1, \dots, n$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$. Такой предпорядок введен в [2, § 5. B, B.1], где установлена вышеуказанная импликация, из которой, в частности, следует, что класс функций, сохраняющих предпорядок $\preceq^1$, шире класса *Schur*-выпуклых функций.

Нам понадобится концепция конического упорядочения на множестве $C \subset \mathbb{R}^n$, индуцированного выпуклым конусом E. Им, согласно [2, § 14. D.1], является отношение $\leq$ на C, определенное условием

$$x \leqslant y \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad y - x \in E.$$

Выделим ситуацию, когда выпуклый конус E задается одновременным выполнением m линейных неравенств, т. е. $E = \{x : xA \geqslant 0\}$, где A — матрица $n \times m$. Предполагается, что среди столбцов матрицы A есть такой, который состоит из одних единиц, что соответствует неравенству $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant 0$. Допустим, что какой-либо предпорядок $\preceq$, не совпадающий с предпорядком, индуцированным конусом E, отличается от него только тем, что для соответствующего конуса E' это неравенство заменяется равенством $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$.

В таком случае будем считать предпорядок, индуцированный конусом E, слабой формой предпорядка $\preceq$ и обозначать как $\preceq_w$ (наподобие мажоризации $x \prec y$ и слабой мажоризации $x \prec_w y$). В силу очевидной импликации $(x \preceq y) \Rightarrow (x \preceq_w y)$ класс функций, сохраняющих предпорядок $\preceq$, шире класса функций, сохраняющих $\preceq_w$.

Вернувшись к предпорядку $\preceq^1$, получим таким образом предпорядок $\preceq^1_w$, если осуществим обратную замену — равенства на неравенство. Стоит отметить, что в [2, § 5. B.1.a] установлена и такая импликация: $(x \preceq^1_w y) \Rightarrow (x \prec_w y)$.

Полагают, что конус E положительно натянут на множество $F \subset E \subset \mathbb{R}^n$, если каждую точку E можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации конечного числа точек, принадлежащих F. В [6] (см. [2, § 14. D]) доказано следующее.

Предложение 1 [6]. *Если конус E задается в виде множества $\{x : xA \geqslant 0\}$, где $A : n \times n$ — невырожденная матрица, то E положительно натянут на множество векторов, образованное строками матрицы A^{-1}.*

Это следует из того, что

$$E = \{x : xA \geqslant 0\} = \{x : xA = y,\ y \geqslant 0\} =$$
$$= \{x : x = yA^{-1} \text{ для некоторого вектора } y \geqslant 0\}.$$

Замечание 3. Здесь важно, что никакое собственное подмножество этих строк не обладает данным свойством, и, значит, пользуясь терминологией [6], строки матрицы A^{-1} формируют *каркас* конуса E.

Кроме данного предложения, понадобится следующее его видоизменение.

Предложение 2. *Предположим, что $A : n \times n$ — невырожденная матрица, и пусть $Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \ y_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n-1,\ y_n = 0\}$. Рассмотрим конус $E = \{x : xA = y,\ y \in Y\}$. Тогда множество векторов, образованное первыми $n-1$ строками матрицы A^{-1}, представляет собой каркас конуса E.*

Действительно, можно записать

$$E = \{x : xA = y,\ y \in Y\} = \{x : x = yA^{-1} \text{ для некоторого вектора } y \in Y\}$$

и учесть, что $y_n = 0$. Остается заметить, что конус E не может быть положительно натянут ни на какое собственное подмножество первых $n-1$ строк матрицы A^{-1}.

Таким образом, получаем, что если какому-либо слабому предпорядку $\preceq_w$ отвечает матрица A с указанными выше свойствами, то в отношении $\preceq$ можно воспользоваться предложением 2. Например, для мажоризации на $D = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n\}$ таким образом может быть получен представленный в [2, § 14. D] набор векторов, на который положительно натянут соответствующий конус E.

Возвращаясь к предпорядку $\preceq^1$, воспользуемся некоторыми результатами работы [7] с учетом того, что, как сообщил нам в частном порядке ее автор, § 3 там следует отнести к слабому предпорядку $\preceq^1_w$, а не к предпорядку $\preceq^1$. В [7] в отношении слабого предпорядка показано, что он является коническим на D, а конус, который его индуцирует, может быть представлен следующим образом: $E = \{x : 0 \preceq^1_w x\} = \{x : xM \geqslant 0\}$, где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вслед за этим там вычислена обратная матрица

$$M^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ n-2 & n-2 & -2 & \dots & -2 & -2 \\ n-3 & n-3 & n-3 & \dots & -3 & -3 \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -(n-1) \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь нам понадобится еще один результат работы [6].

Лемма [6]. *Пусть непрерывная функция f, определенная на выпуклом множестве C, имеет градиент*

$$\nabla f(x) = (\partial f(x)/\partial x_1, \dots, \partial f(x)/\partial x_n)$$

внутри C. Тогда f сохраняет предпорядок $\leqslant$ на C, если и только если $\nabla f(x) \cdot t \geqslant 0$ для всех x внутри C и для всех t, принадлежащих каркасу конуса E, которым индуцирован предпорядок $\leqslant$.

Из леммы, учитывая предложение 2 и вид матрицы M^{-1}, легко следует теорема.

Теорема 3. *Пусть функция f является непрерывной на D и непрерывно дифференцируемой внутри D. Далее, пусть $f_{(i)}(x) = \partial f(x)/\partial x_i$. Тогда функция f сохраняет предпорядок $\preceq^1$ на D, если и только если*

$$(n-k)\sum_{i=1}^{k} f_{(i)}(x) \geqslant k \sum_{i=k+1}^{n} f_{(i)}(x), \qquad k = 1, \dots, n-1, \tag{5}$$

для всех $x \in D$.

Замечание 4. В [7, § 3] для предпорядка $\preceq^1_w$ включено дополнительное условие $\sum_{i=1}^{n} f_{(i)}(x) \geqslant 0$, соответствующее последней строке матрицы M^{-1}. Его добавление к (5) отражает тот факт, что $(x \preceq^1 y) \Rightarrow (x \preceq^1_w y)$. Аналогично, ввиду импликации $(x \preceq^1 y) \Rightarrow (x \prec y)$ из дифференциальной характеризации $Schur$-выпуклых функций на D

$$f_{(1)}(x) \geqslant f_{(2)}(x) \ldots \geqslant f_{(n)}(x)$$

должно следовать (5). Легко видеть, что данное обстоятельство действительно имеет место.

В заключение наметим весьма простой путь получения аналога следствия в конце раздела 2 для некоторых асимметричных множеств, притом что условие знакоинвариантности плотности ослабляется до ее симметричности. Этот геометрический подход, конечно, менее содержательный, чем примененный в § 2.

Продемонстрируем его на примере правильных n-угольников на плоскости. Для n четных мы попадаем в симметричную ситуацию относительно точки 0, помещенной в центр фигуры, когда может быть использована работа [8]. При нечетных n поступаем следующим образом: возьмем любую вершину n-угольника и опустим из нее перпендикуляр на противоположную сторону (см. рис. 4, на котором представлен случай $n = 5$).

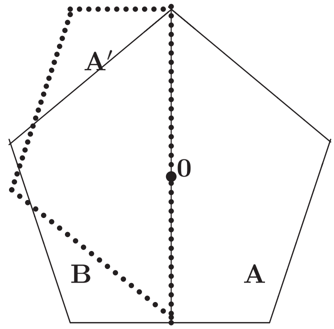

Рис. 4. Правильный пятиугольник.

Он делит фигуру на две части: A и B. Поместим точку 0 в середину этого отрезка и отразим A относительно нуля. Получим фигуру A', ограниченную пунктирной линией. Нетрудно видеть, что $A \cup A'$ — выпуклое множество (это ключевой момент, поскольку симметричность $A \cup A'$ следует из построения).

Согласно [8] функция $P\left\{\sum_{\ell=1}^{m} a_\ell X_\ell \in A \cup A'\right\}$, где X_ℓ — независимые одинаково распределенные векторы с общей симметричной (относительно начала) лог-вогнутой плотностью, — является $Schur$-вогнутой от a. В силу симметричности плотности $P[A] = P[A']$, и значит $P[A] = P[A \cup A']/2$ также $Schur$-вогнутая функция.

Аналогично поступаем с левой частью многоугольника B, и в результате получаем, что $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$ является $Schur$-вогнутой функцией. Ясно, что при n нечетном найдутся n точек, помещение в которые точки 0 приводит к тому же эффекту.

Автор благодарен В. Солеву за полезные дискуссии и ценные советы.

Литература

1. Ревяков М. И. Вероятность попадания случайного вектора в многогранный конус: мажоризационный аспект. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 3, 508–517 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.311

2. Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.* 2^{nd} ed. Springer-Verlag, New York (2011).

3. Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р. *Линейная алгебра и многомерная геометрия.* Москва, Наука (1969).

4. Eaton M. L. Concentration inequalities for Gauss-Markov estimators. *J. Multivariate Anal.* **25**, 119–138 (1988).

5. Eaton M. L., Perlman M. D. Reflection groups, generalized Schur functions and the geometry of majorization. *Ann. Probab.* **5**, 829–860 (1977).

6. Marshall A. W., Walkup D. W., Wets R. J.-B. Order-preserving functions: applications to majorization and order statistics. *Pacific Journal of Mathematics* **23**, 569–584 (1967).

7. Ibragimov R. On functions not preserving majorization pre-ordering and their applications. *Uzbek Mathematical Journal* **1**, 64–71 (2010).

8. Olkin I., Tong Y. L. Peakedness in multivariate distributions. In: *Statistical Decision Theory and Related Topics, IV* Vol. 2, 373–383. Gupta S. S., Berger J. O. (eds), New York, Springer-Verlag (1988).

Статья поступила в редакцию 23 ноября 2022 г.;
доработана 27 января 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

К о н т а к т н а я   и н ф о р м а ц и я:

Ревяков Михаил Ильич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; revyakov.m@gmail.com

Probability of random vector hitting in a polyhedral frustum of a cone: Majorization aspect

M. I. Revyakov

St. Peterburg Department of the Steklov Mathematical Institute of
the Russian Academy of Sciences (POMI RAS),
27, nab. r. Fontanki, St. Peterburg, 191023, Russian Federation

For citation: Revyakov M. I. Probability of random vector hitting in a polyhedral frustum of a cone: Majorization aspect. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 131–140. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.108 (In Russian)

The article presents conditions under which the probability of a linear combination of random vectors falling into a polyhedral oblate (from above) cone, in particular, into frustum of a cone is a *Schur*-concave function of the vector corresponding this linear combination. It is required that the oblate cone is convex, it contains the point **0**, its edges are parallel to the coordinate axes, and the distribution density of vectors is a logarithmically concave sign-invariant function. In addition, the characterization was obtained in differential form functions that preserve one known pre-order, which is inside the majorization pre-order.

Keywords: frustum of a cone, G-majorization, sign-invariant density, logarithmic concavity, preorder within majorization.

References

1. Revyakov M. I. Probability of random vector hitting in a polyhedral cone: majorization aspect. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 3, 508–517 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.311 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 3, 321–328 (2022). https://doi.org/10.1134/S106345412203013X].

2. Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications.* 2nd ed. Springer-Verlag, New York (2011).

3. Efimov N. V., Rozendorn E. R. *Linear algebra and multidimensional geometry.* Moscow, Mir Publ. (1975).

4. Eaton M. L. Concentration inequalities for Gauss-Markov estimators. *J. Multivariate Anal.* **25**, 119–138 (1988).

5. Eaton M. L., Perlman M. D. Reflection groups, generalized Schur functions and the geometry of majorization. *Ann. Probab.* **5**, 829–860 (1977).

6. Marshall A. W., Walkup D. W., Wets R. J.-B. Order-preserving functions: applications to majorization and order statistics. *Pacific Journal of Mathematics* **23**, 569–584 (1967).

7. Ibragimov R. On functions not preserving majorization pre-ordering and their applications. *Uzbek Mathematical Journal* **1**, 64–71 (2010).

8. Olkin I., Tong Y. L. Peakedness in multivariate distributions. In: *Statistical Decision Theory and Related Topics, IV.* Vol. 2, 373–383. Gupta S. S., Berger J. O. (eds), New York, Springer-Verlag (1988).

Received: November 23, 2022
Revised: January 27, 2023
Accepted: August 31, 2023

A u t h o r's   i n f o r m a t i o n:

Mikhail I. Revyakov — revyakov.m@gmail.com