УДК 517.1 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1
MSC 47H10, 54H25

Замечания и обобщение теоремы Хегедюша — Силагьи о неподвижной точке

Ю. Туаль[1], *Д. Аль-Мутавакиль*[2]

[1] Университет Сиди Моаме Бен Абдаллах,
Марокко, 30050, Фес
[2] Университет Шуайба Дуккали,
Марокко, Эль-Джадида

Для цитирования: *Туаль Ю., Аль-Мутавакиль Д.* Замечания и обобщение теоремы Хегедюша — Силагьи о неподвижной точке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 152–160.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.110

Получено новое обобщение так называемой теоремы Хегедюша — Силагьи (Hegedüs — Szilágyi) о неподвижной точке путем введения нового сжимающего условия в рамках полных метрических пространств. В качестве приложения доказана новая теорема о неподвижной точке, обобщающая и улучшающая многие известные в литературе результаты.

Ключевые слова: теорема Хегедюша — Силагьи о неподвижной точке, полные метрические пространства, новый вид сжимающих условий, сжатие Меира — Килера, орбита.

1. Введение. Знаменитый принцип сжатия Банаха $\big($ BCP: $d(Tx, Ty) \leqslant kd(x, y)$, $k \in [0, 1)\big)$ является одним из наиболее полезных результатов нелинейного анализа. На протяжении многих лет многие авторы успешно пытались обобщить эту великую теорему. Как обобщение BCP, в 1962 г. Эдельштейн [1] доказал существование фиксированной точки для сжимающих отображений ($d(Tx, Ty) < d(x, y)$, где $x \neq y$) в предположении компактности пространства. В том же направлении и с использованием некоторых вспомогательных функций в 1980 г. Хегедюш и Силагьи [2] доказали следующий результат о неподвижной точке.

Теорема 1. *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, и пусть T — такое отображение на X, что $D_T(x) = \sup\{d(u, v) : u, v \in \{x, Tx, T^2x, \ldots\}\} < \infty$ для всех $x \in X$. Предположим, что существует функция φ из $[0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) $\varphi(t) < t$ выполняется для всех $t \in (0, \infty)$;

(ii) φ полунепрерывна сверху;

(iii) для любых $x, y \in X$

$$d(Tx, Ty) \leqslant \varphi \circ D_T(x, y),$$

где $D_T(x, y) = \sup\{d(u, v) : u, v \in \{x, Tx, T^2x, \ldots, y, Ty, T^2y, \ldots\}\}$.

Тогда T имеет единственную неподвижную точку z. Более того, $\{T^n x\}$ сходится к z для любого $x \in X$.

Из-за важности сжимающих отображений и их приложений во многих работах рассматривались такого рода отображения. В этом направлении авторы в [3] доказали существование некоторой теоремы о неподвижной точке для класса сжимающих отображений без использования компактности метрического пространства. Этот принцип распространен на случай многозначных отображений с помощью хаусдорфова расстояния H, порожденного расстоянием d (см. [4]). Другое обобщение сделано для случая обобщенных ортогональных множеств. Идея здесь заключалась в том, чтобы предположить сжатие только для класса элементов, называемых общими ортогональными элементами (более подробно см. [5–7]). В статье [8] рассматривается обобщение результатов, обсуждаемых в [3], с использованием известной теоремы Райха о неподвижной точке в контексте общих топологических пространств с τ-расстоянием p, упомянутым в [9]. Помимо этих работ, авторы в [10, 11] распространили эту идею на пару отображений и доказали существование общей неподвижной точки. Этот подход использовался для обеспечения существования решения системы дифференциальных уравнений. Можно добавить, что в [12] авторы доказали, что упомянутые результаты можно обобщить на случай нерасширяющих отображений (см. [13, 14]). Отметим, что доказанные теоремы в [12] сделаны без использования компактности пространства и равномерной выпуклости (см. [15]).

Совсем недавно Судзуки [16] обобщил теорему 1 для нового типа сжатия следующим образом.

Теорема 2. *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, и пусть T — такое отображение на X, что $D_T(x) < \infty$ для всех $x \in X$. Предположим, что существует функция φ из $[0, \infty)$ такая, что:*

(i) $\varphi(t) < t$ выполняется для всех $t \in (0, \infty)$;

(ii) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ влечет } \ \varphi(t) \leqslant \varepsilon;$$

(iii) $d(Tx, Ty) \leqslant \varphi \circ D_T(x, y)$ выполняется для всех $x, y \in X$.

Тогда T имеет единственную неподвижную точку z. Более того, $\{T^n x\}$ сходится к z для любого $x \in X$.

Вышеприведенное сжатие называется сжатием нового типа (НТ). В [16] показано, что сжатия НТ и Меира—Килера (М—К) [17] независимы.

С другой стороны, несмотря на то что $\max\{D_T(x), D_T(y)\} \leqslant D_T(x, y)$ для всех $x, y \in X$, условие $\max\{\varphi(D_T(x)), \varphi(D_T(y))\} \leqslant \varphi(D_T(x, y))$, вообще говоря, не выполняется, так как монотонность функции φ произвольна.

Мотивируясь этим фактом, мы вводим новое следующее сжатие:

$$d(Tx, Ty) \leqslant \max\{\varphi(D_T(x)), \varphi(D_T(x, y)), \varphi(D_T(y))\}, \tag{1}$$

для всех $x, y \in X$. Это сжатие более общее, чем с условиями (iii) теоремы 2. Ниже мы доказываем новую теорему о неподвижной точке.

2. Основные результаты. В этом разделе мы начнем со следующих примеров, подтверждающих мотивацию этой статьи.

Пример. Пусть $X = [0, 2]$ снабжен метрикой, определяемой следующим образом:

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{если} \quad x \neq y, \\ 0, & \text{если} \quad x = y. \end{cases} \tag{2}$$

Определим T как отображение на X с помощью

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & \text{если} \quad x \in [1,2], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть φ — функция из $[0,\infty)$, определяемая равенством

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2t}, & \text{если} \quad t \in [1,2], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что φ удовлетворяет условию (i) теоремы 2. Теперь для выполнения условия (ii) пусть $\varepsilon > 0$, так что имеем два следующих случая.

Случай 1. Если $0 < \varepsilon < 1$, то существует $\delta = \frac{1-\varepsilon}{2}$ такое, что для любого $t \in (0,\infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ влечет } \ \varphi(t) = 0 \leqslant \varepsilon.$$

Случай 2. Если $\varepsilon \geqslant 1$, то существует $\delta = \varepsilon$ такое, что для любого $t \in (0,\infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ влечет } \ \varphi(t) = \frac{1}{2t} < \frac{1}{2\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$

Более того, T удовлетворяет (1). Действительно, пусть $x, y \in X$, тогда мы имеем

$$d(Tx,Ty) \leqslant \max\left\{\frac{1}{2x}, \frac{1}{2y}\right\} = \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x,y), \varphi \circ D_T(y)\}.$$

С другой стороны, заметим, что 0 является единственной неподвижной точкой T на X, но T не удовлетворяет условию (iii) теоремы 2. Действительно, пусть $x, y \in X$, и без ограничения общности считаем, что $x < y$. Если $x, y \in [1,2]$, то получаем

$$d(Tx,Ty) = \frac{1}{2x} > \frac{1}{2y} = \varphi \circ D_T(x,y).$$

Пример. Пусть $X = [0,2]$. Определим расстояние d от $X \times X$ до $[0,\infty)$ с помощью (2). Определим отображение T на X следующим образом:

$$Tx = \begin{cases} e^{-x}, & \text{если} \quad x \in [1,2], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть φ — функция из $[0,\infty)$, определяется равенством

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{если} \quad t \in [1,2], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что φ удовлетворяет условию (i) теоремы 2. Теперь для выполнения условия (ii) пусть $\varepsilon > 0$, так что имеются два следующих случая.

Случай 3. Если $0 < \varepsilon < 1$, то существует $\delta = \frac{1-\varepsilon}{2}$ такое, что для любого $t \in (0,\infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ влечет } \ \varphi(t) = 0 \leqslant \varepsilon.$$

Случай 4. Если $\varepsilon \geqslant 1$, то существует $\delta = \varepsilon$ такое, что для любого $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) = e^{-t} < e^{-\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$

Более того, T удовлетворяет (1). Действительно, пусть $x, y \in X$, тогда мы имеем

$$d(Tx, Ty) \leqslant \max\left\{e^{-x}, e^{-y}\right\} = \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x, y), \varphi \circ D_T(y)\},$$

и 0 — единственная неподвижная точка T на X, но T не удовлетворяет условию (iii) теоремы 2. Действительно, пусть $x, y \in X$. Без ограничения общности считаем, что $x < y$. Если $x, y \in [1, 2]$, то

$$d(Tx, Ty) = e^{-x} > e^{-y} = \varphi \circ D_T(x, y).$$

Замечание 1. Из приведенных выше примеров видно, что T имеет единственную неподвижную точку, но условие (iii) теоремы 2 не выполняется. С другой стороны, мы видим, что T удовлетворяет (1), что обобщает и улучшает теорему 2.

Теперь сформулируем наш основной результат.

Теорема 3. *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и пусть T — такое отображение на X, что $D_T(x) < \infty$ для всех $x \in X$. Предположим, что существует функция φ из $[0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) $\varphi(t) < t$ выполняется для всех $t \in (0, \infty)$;

(ii) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) \leqslant \varepsilon;$$

(iii) $d(Tx, Ty) \leqslant \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x, y), \varphi \circ D_T(y)\}$ выполняется для всех $x, y \in X$.

Тогда T имеет единственную неподвижную точку z. Более того, $\{T^n x\}$ сходится к z для любого $x \in X$.

Доказательство. Доказательство разделено на три основных этапа.

Шаг 1. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n x) = 0$ для всех $x \in X$. Пусть $x \in X$, так как $\{T^n x, T^{n+1}x, \ldots\} \supset \{T^{n+1}x, T^{n+2}x, \ldots\}$, для всех $n \in \mathbb{N}$, тогда $\{D_T(T^n x)\}$ убывает. Следовательно, $\{D_T(T^n x)\}$ сходится к некоторому $\varepsilon \geqslant 0$. Предположим, что $\varepsilon > 0$. Имеются следующие два случая:

- $\varepsilon < D_T(T^n x)$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
- $\varepsilon = D_T(T^n x)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

В первом случае мы выбираем $\delta \in (0, \infty)$ так, чтобы

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \text{ влечет } \varphi(t) \leqslant \varepsilon.$$

Мы выбираем $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$D_T(T^{n_0} x) < \varepsilon + \delta.$$

Пусть $m \geqslant n_0$ и $n \geqslant n_0$, поэтому

$$\varepsilon < D_T(T^{\max\{m,n\}}x) \leqslant D_T(T^m x, T^n x) \leqslant D_T(T^{\min\{m,n\}}x) \leqslant D_T(T^{n_0}x) < \varepsilon + \delta$$

и

$$d(T^{m+1}x, T^{n+1}x) \leqslant \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n x), \varphi \circ D_T(T^n x)\} \leqslant \varepsilon,$$

откуда следует $\varepsilon < D_T(T^{n_0+1}x) \leqslant \varepsilon$, что приводит к противоречию.

Во втором случае мы выбираем $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\varepsilon = D_T(T^{n_0}x).$$

Пусть $m \geqslant n_0$ и $n \geqslant n_0$, поэтому

$$\varepsilon \leqslant D_T(T^{\max\{m,n\}}x) \leqslant D_T(T^m x, T^n x) \leqslant D_T(T^{\min\{m,n\}}x) \leqslant D_T(T^{n_0}x) = \varepsilon$$

и

$$d(T^{m+1}x, T^{n+1}x) \leqslant \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n x), \varphi \circ D_T(T^n x)\} \leqslant \varphi(\varepsilon) < \varepsilon,$$

откуда следует $\varepsilon \leqslant D_T(T^{n_0+1}x) < \varepsilon$, что является противоречием. Следовательно, справедливо $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n x) = 0$.

Шаг 2. Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n x, T^n y) = 0$ для всех $x, y \in X$.

Пусть $x, y \in X$, так как

$$\{T^n x, T^{n+1}x, \ldots, T^n y, T^{n+1}y, \ldots\} \supset \{T^{n+1}, T^{n+2}x, \ldots, T^{n+1}y, T^{n+2}y, \ldots\}$$

для $n \in \mathbb{N}$, то $\{D_T(T^n x)\}$ убывает. Следовательно, $\{D_T(T^n x)\}$ сходится к некоторому $\varepsilon \geqslant 0$. Предположим, что $\varepsilon > 0$. У нас есть следующие два случаи:

- $\varepsilon < D_T(T^n x, T^n y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$;
- $\varepsilon = D_T(T^n x, T^n y)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

В первом случае мы выбираем $\delta \in (0, \infty)$ так, чтобы

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ влечет } \ \varphi(t) \leqslant \varepsilon.$$

Мы выбираем $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y) < \varepsilon + \delta.$$

Без ограничения общности, согласно шагу 1, можно считать

$$D_T(T^{n_0}x) \leqslant \varepsilon \text{ и } D_T(T^{n_0}y) \leqslant \varepsilon.$$

Пусть $m \geqslant n_0$ и $n \geqslant n_0$, поэтому

$$\begin{aligned}\varepsilon < D_T(T^{\max\{m,n\}}x, T^{\max\{m,n\}}y) \leqslant D_T(T^m x, T^n y) \leqslant \\ \leqslant D_T(T^{\min\{m,n\}}x, T^{\min\{m,n\}}y) \leqslant D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y) < \varepsilon + \delta\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}d(T^{m+1}x, T^{n+1}y) \leqslant \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n x), \varphi \circ D_T(T^n y)\} \leqslant \\ \leqslant \max\{D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n y), D_T(T^n y)\} \leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

откуда следует, что $\varepsilon < D_T(T^{n_0+1}x, T^{n_0+1}y) \leqslant \varepsilon$, это приводит к противоречию.

Во втором случае мы выбираем $n_0 \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\varepsilon = D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y).$$

Пусть $m \geqslant n_0$ и $n \geqslant n_0$, поэтому

$$\varepsilon \leqslant D_T(T^{\max\{m,n\}}x, T^{\max\{m,n\}}y) \leqslant D_T(T^m x, T^n y) \leqslant$$
$$\leqslant D_T(T^{\min\{m,n\}}x, T^{\min\{m,n\}}y) \leqslant D_T(T^{n_0}x, T^{n_0}y) = \varepsilon.$$

Без ограничения общности, согласно шагу 1, можно считать

$$D_T(T^{n_0}x) \leqslant \varphi(\varepsilon) \text{ и } D_T(T^{n_0}y) \leqslant \varphi(\varepsilon).$$

Далее,

$$d(T^{m+1}x, T^{n+1}y) \leqslant \max\{\varphi \circ D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n x), \varphi \circ D_T(T^n y)\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{D_T(T^m x), \varphi \circ D_T(T^m x, T^n y), D_T(T^n y)\} \leqslant \varphi(\varepsilon) < \varepsilon,$$

откуда следует, что $\varepsilon \leqslant D_T(T^{n_0+1}x, T^{n_0+1}y) < \varepsilon$, это приводит к противоречию. Следовательно, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n x, T^n y) = 0$.

Шаг 3. На этом шаге мы доказываем существование и единственность неподвижной точки.

Пусть $x \in X$. Из шага 1 получаем, что $\{D_T(T^n x)\}$ сходится к 0. Значит, $\{T^n x\}$ — последовательность Коши в X. Поскольку X полно, существует $z \in X$ такое, что $\{T^n x\}$ сходится к z. Опять из шага 2 имеем $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n x, T^n z) = 0$. Тогда $\{T^n z\}$ сходится к z.

Теперь мы хотим показать, что $D_T(z) = 0$. Рассуждая от противного, считаем $\varepsilon := D_T(z) > 0$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n x) = 0$, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\varepsilon = D_T(z) = \cdots D_T(T^{n_0-1}z) = D_T(T^{n_0}z) > D_T(T^{n_0+1}z),$$

следовательно,

$$\varepsilon = D_T(T^{n_0}z) = \sup\{d(T^{n_0}z, T^n z) : n > n_0\}.$$

При $n > n_0$ получаем

$$d(T^{n_0}z, T^n z) \leqslant \max\{\varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z), \varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z, T^{n-1}z), \varphi \circ D_T(T^{n-1}z)\}.$$

Мы рассматриваем следующие два случая:

- если $n - 1 = n_0$, то имеем

$$\varphi \circ D_T(T^{n-1}z) = \varphi \circ D_T(T^{n_0}z) = \varphi(\varepsilon);$$

- если $n - 1 > n_0$, то имеем

$$\varphi \circ D_T(T^{n-1}z) \leqslant D_T(T^{n-1}z) \leqslant D_T(T^{n_0+1}z) < \varepsilon.$$

Далее,

$$d(T^{n_0}z, T^n z) \leqslant \max\left\{\varphi \circ D_T(T^{n_0-1}z), \varphi \circ D_T(T^{n_0-1)}z), \max\{\varphi(\varepsilon), D_T(T^{n_0+1}z)\}\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \max\{\varphi(\varepsilon), D_T(T^{n_0+1}z)\}.$$

Поскольку n произвольно, получаем

$$\varepsilon = \sup\{d(T^{n_0}z, T^n z) : n > n_0\} \leqslant \max\{\varphi(\varepsilon), D_T(T^{n_0+1}z)\} < \varepsilon.$$

Это приводит к противоречию. Следовательно, $D_T(z) = 0$, тогда z — неподвижная точка T в X. Единственность неподвижной точки сразу следует из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} D_T(T^n x, T^n z) = 0$. □

Следствие 1 *(теорема 1.2 в [18]). Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, а T — отображение на X. Предположим, что существует функция φ из $[0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) φ не убывает;

(ii) $\lim_n \varphi^n(t) = 0$ выполняется для всех $t \in (0, \infty)$ таких, что $\varphi^n = \varphi \circ \varphi \ldots \circ \varphi$ n раз;

(iii) $d(Tx, Ty) \leqslant \varphi \circ d(x, y)$ выполняется для всех $x, y \in X$.

Тогда T имеет единственную неподвижную точку z. Более того, $\{T^n x\}$ сходится к z для любого $x \in X$.

Следствие 2 *(теорема 5 в [16]). Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и пусть T — отображение в себя на X такое, что $D_T(x) < \infty$ для всех $x \in X$. Предположим, что существует функция φ из $[0, \infty)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) $\varphi(t) < t$ выполняется для всех $t \in (0, \infty)$;

(ii) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ влечет } \ \varphi(t) \leqslant \varepsilon;$$

(iii) $d(Tx, Ty) \leqslant \varphi \circ D_T(x, y)$ выполняется для всех $x, y \in X$.

Тогда T имеет единственную неподвижную точку z. Более того, $\{T^n x\}$ сходится к z для любого $x \in X$.

Следующий пример показывает, что теорема 3 улучшает теорему 2.

Пример. Пусть $X = [0, \pi]$ имеет метрику, определенную следующим образом:

$$d(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{если} \quad x \neq y, \\ 0, & \text{если} \quad x = y. \end{cases} \tag{3}$$

Определим отображение T на X с помощью

$$Tx = \begin{cases} \sin x, & \text{если} \quad x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть φ — функция из $[0, \infty)$, определяемая равенством

$$\varphi(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{если} \quad t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right], \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Легко видеть, что φ удовлетворяет условию (i) теоремы 3. Теперь для выполнения условия (ii) пусть $\varepsilon > 0$ и существуют два случая.

Случай 5. Если $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$, то существует $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varepsilon}{2}$ такое, что для любого $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ влечет } \ \varphi(t) = 0 \leqslant \varepsilon.$$

Случай 6. Если $\varepsilon \geqslant \frac{\pi}{2}$, то существует $\delta = \varepsilon$ такое, что для любого $t \in (0, \infty)$
• если $t \notin [\frac{\pi}{2}, \pi]$, то $\varphi(t) = 0 \leqslant \varepsilon$;
• если $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, то

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \text{ влечет } \ \varphi(t) = \sin(t) < \sin(\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Кроме того, T удовлетворяет условиям (iii) теоремы 3 и следствию 3. Действительно, пусть $x, y \in X$, тогда мы имеем

$$d(Tx, Ty) \leqslant \max\left\{\sin x, \sin y\right\} = \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(y)\} =$$
$$= \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(x, y), \varphi \circ D_T(y)\},$$

0 — единственная неподвижная точка T на X, но T не удовлетворяет условию (iii) теоремы 2. Действительно, пусть $x, y \in X$. Без ограничения общности считаем, что $x < y$. Если $x, y \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, то получаем

$$d(Tx, Ty) = \sin x > \sin y = \varphi \circ D_T(x, y).$$

Как следствие нашего основного результата, имеем следующий новый результат с новым сжатием.

Следствие 3. *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство и пусть T — отображение на X такое, что $D_T(x) < \infty$ для всех $x \in X$. Предположим, что существует функция φ из $[0, \infty)$ такая, что:*
(i) $\varphi(t) < t$ выполняется для всех $t \in (0, \infty)$;
(ii) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in (0, \infty)$

$$\varepsilon < t < \varepsilon + \delta \ \textit{ влечет } \ \varphi(t) \leqslant \varepsilon;$$

(iii) для любых $x, y \in X$ справедливо

$$d(Tx, Ty) \leqslant \max\{\varphi \circ D_T(x), \varphi \circ D_T(y)\}.$$

Тогда T имеет единственную неподвижную точку z. Более того, $\{T^n x\}$ сходится к z для любого $x \in X$.

Литература/References

1. Edelstein M. On fixed and periodic points under contractive mappings. *J. London Math. Soc.* **37**, 74–79 (1962).

2. Hegedüs M., Szilágyi T., Equivalent conditions and a new fixed point theorem in the theory of contractive type mappings. *Math. Jpn.* **25**, 147–157 (1980).

3. Touail Y., El Moutawakil D. Bennani S. Fixed Point theorems for contractive selfmappings of a bounded metric space. *Journal of Function Spaces* **2019**, Article ID 4175807, 3 (2019).

4. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point results for new type of multivalued mappings in bounded metric spaces with an application. Ricerche mat (2020).

5. Touail Y., El Moutawakil D. Fixed point theorems on orthogonal complete metric spaces with an application. *Int. J. Nonl. Anal. Appl.* 1801–1809 (2021).

6. Touail Y., El Moutawakil D. $\perp_{\psi F}$-contractions and some fixed point results on generalized orthogonal sets. *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser 70* 1459–1472 (2021).

7. Touail Y. On multivalued $\perp_{\psi F}$-contractions on genralized orthogonal sets with an applicatiton in integral inclusions. *Probl. Anal. Issues Anal.* **11**, 29 (3), 109–124 (2022).

8. Touail Y., Moutawakil D. El. Fixed point theorems for new contractions with application in dynamic programming. *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **54**, 206–212 (2021).

9. Aamri M., El Moutawakil D. τ-distance in general topological spaces with application to fixed point theory. *Southwest Journal of Pure and Applied Mathematics* **2**, December, 1–5 (2003).

10. Touail Y., El Moutawakil D. New common fixed point theorems for contractive self mappings and an application to nonlinear differential equations, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl*, 903–911 (2021).

11. Touail Y., El Moutawakil D., Some new common fixed point theorems for contractive selfmappings with applications. *Asian. Eur. J. Math.* **15** (4) 2250080 (2022).

12. Touail Y., Jaid A., El Moutawakil D. *New contribution in fixed point theory via an auxiliary function with an application.* Ricerche mat (2021).

13. Browder F. E. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space. *Proc. Nat. Acad. Sei.* **54** (1965).

14. Göhde D. Zum prinzip der kontraktiven Abbildung. *Math. Nachr* **30**, 251–258 (1965).

15. Clarkson J. A. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **40**, 396–414 (1936).

16. Suzuki T. A generalization of Hegedüs — Szilágyi's fixed point theorem in complete metric spaces. *Fixed Point Theory Appl.* **2018**, 1 (2018).

17. Meir A., Keeler E. A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal. Appl.* **28**, 326–329 (1969).

18. Matkowski J. Integrable Solutions of Functional Equations. *Diss. Math.* **127**. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, Warsaw (1975).

Статья поступила в редакцию 26 января 2023 г.;
доработана 15 августа 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Туаль Юсеф — аспирант; youssef9touail@gmail.com
Аль-Мутавакиль Дрисс — проф.; d.elmoutawakil@gmail.com

Remarks and a generalization of Hedudüs — Szilágyi's fixed point theorem

Y. Touail[1], *D. El Moutawakil*[2]

[1] Department of Mathematics, Faculty of Sciences Dhar El Mahraz, University Sidi Mohamed Ben Abdellah, Fez, 30050, Morocco
[2] Université Chouaib Doukkali, Morocco, El Jadida

For citation: Touail Y., El Moutawakil D. Remarks and a generalization of Hedudüs — Szilágyi's fixed point theorem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 152–160. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.110 (In Russian)

A new generalization of the so-called Hedudüs — Szilágyi's fixed point theorem by introducing a new contractive condition in the framework of complete metric spaces. As application, we get a new fixed point theorem which generalizes and improves many known results in literature.

Keywords: Hedudüs — Szilágyi's fixed point theorem, complete metric spaces, new type contractive condition, Meir — Keeler contraction, orbit.

Received: January 26, 2023
Revised: August 15, 2023
Accepted: August 31, 2023

Authors' information:

Youssef Touail — youssef9touail@gmail.com
Driss El Moutawakil — d.elmoutawakil@gmail.com