

МЕХАНИКА

УДК 533:534.13
MSC 76D99

Затухающие колебания цилиндра с соосным диском и со стабилизатором

Д. В. Кауфман, А. Н. Рябинин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Кауфман Д. В., Рябинин А. Н.* Затухающие колебания цилиндра с соосным диском и со стабилизатором // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 1. С. 161–170.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.111>

Изучаются затухающие вращательные колебания цилиндра, который в головной части снабжен соосным диском, а в хвостовой части имеет стабилизатор. Удлинение цилиндра (отношение длины к диаметру) равно девяти. Цилиндр крепится в рабочей части аэродинамической трубы малых скоростей на проволочной подвеске, содержащей стальные пружины. В положении равновесия ось цилиндра горизонтальна и параллельна вектору скорости набегающего потока. К одной из пружин подвески присоединен полупроводниковый тензопреобразователь, измеряющий во время колебаний зависимость натяжения пружин от времени. Напряжение на выходе тензопреобразователя поступает на РС-осциллограф. Цифровой сигнал осциллографа передается на компьютер. После калибровки прибора определялась частота и амплитуда затухающих вращательных колебаний вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр цилиндра и перпендикулярной вектору скорости набегающего потока. Под действием воздушного потока увеличивается скорость затухания вращательных колебаний цилиндра. Влияние воздушного потока описывается аналогами вращательных производных, которые в случае плохо обтекаемых тел зависят от амплитуды колебаний угла наклона тела и от амплитуды угловой скорости. Предложена простая модель влияния стабилизатора на вращательные производные.

Ключевые слова: аэродинамическая труба, вращательные колебания, тензометрия, цилиндр.

1. Введение. В работе [1] изучались вращательные затухающие колебания цилиндра, в головной части которого на тонкой ножке находится коаксиально закрепленный диск. При переноске груза под вертолетом установка такого диска обеспечивает значительное снижение лобового сопротивления [2, 3]. Для ориентации груза в направлении, обеспечивающем минимальное лобовое сопротивление, используется стабилизатор, расположенный в хвостовой части груза [3, 4]. В настоящей работе экспериментально исследуется затухание вращательных колебаний цилиндра, имеющего в передней части коаксиальный диск, а в задней — стабилизатор. Отношение длины цилиндра L к его диаметру D равно 9. Стабилизатор состоял из двух прямоугольных трапеций. Высота каждой трапеции равна $D/2$. Площадь стабилизатора в два раза больше площади поперечного сечения цилиндра. Схема расположения стабилизатора приведена на рис. 1, б.

2. Экспериментальный метод. Эксперименты выполнялись на аэродинамической трубе малых скоростей АТ-12 Санкт-Петербургского университета [5]. Труба имеет открытую рабочую часть и сопло круглого сечения, выходной диаметр сопла 1.5 м. Цилиндр подвешивался в рабочей части аэродинамической трубы на проволочной подвеске, содержащей две пружины (рис. 1). В состоянии равновесия цилиндр располагался горизонтально. Его ось была параллельна вектору средней скорости набегающего потока. Подвеска позволяла цилиндру поворачиваться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной вектору скорости набегающего потока. Упругие силы пружин подвески при этом стремились вернуть цилиндр в исходное состояние равновесия.

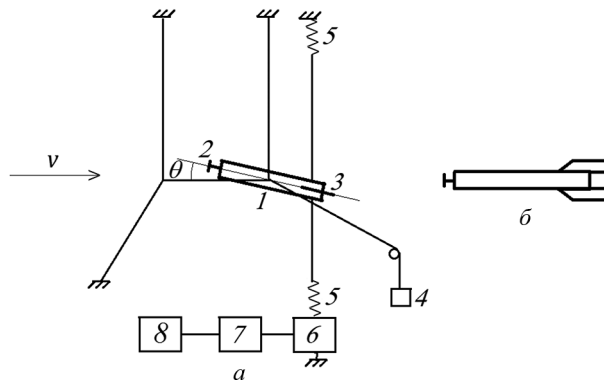


Рис. 1. Схема эксперимента (а) и расположение стабилизатора на цилиндре (б): 1 — цилиндр; 2 — диск; 3 — стабилизатор; 4 — контргруз; 5 — пружины; 6 — полупроводниковый тензопреобразователь; 7 — РС-осциллограф; 8 — компьютер.

Нижняя пружина подвески прикреплена к полупроводниковому тензопреобразователю С-50, измеряющему натяжение пружины. РС-осциллограф Velleman-PCS500A преобразовывал аналоговый сигнал тензопреобразователя в цифровой и передавал его в компьютер. Во время экспериментов цилиндр отклоняли от положения равновесия на некоторый угол, затем отпускали. Начинались затухающие вращательные колебания. Натяжение пружины считывалось в течение 17 с при частоте 100 Гц. В эксперименте менялся диаметр d соосного диска, принимая три значения:

0.625D, 0.75D и 0.875D, расстояние g от диска до переднего торца цилиндра также принимало три значения: 0.5D, 0.65D и 0.8D.

Были проведены калибровочные эксперименты, которые позволили связать амплитуду натяжения пружины с амплитудой вращательных колебаний.

Все эксперименты повторялись не менее 5 раз. Это позволило на основе разброса экспериментальных данных оценить случайную погрешность измеряемых величин. Методика обработки экспериментальных данных, основанная на методе наименьших квадратов, изложена в статье [1].

3. Описание затуханий колебаний цилиндра. Скорость затухания колебаний тел в воздушном потоке принято характеризовать вращательными производными [6]. Для удобообтекаемых тел коэффициент аэродинамического момента можно считать линейной функцией малых углов наклона и их производных:

$$I_z \ddot{\theta} + r \dot{\theta} + k\theta = (m_z^\omega + m_z^\dot{\theta}) \frac{qsL^2}{v} \dot{\theta} + m_z^\theta qsL\theta, \quad (1)$$

где I_z — компонента момента инерции цилиндра, соответствующая оси вращения; θ — угол наклона тела; r — коэффициент трения в подвеске; k — приведенная упругость пружин; $q = \rho v^2/2$ — скоростной напор; ρ — плотность воздуха; $s = \pi D^2/4$ — характерная площадь тела; v — скорость воздуха; m_z^ω , $m_z^\dot{\theta}$, m_z^θ — вращательные производные коэффициента момента; ω — угловая скорость. В правой части уравнения (1) находятся члены, соответствующие аэродинамическому моменту.

С использованием обозначений

$$w^2 = k/I_z, \quad \Omega = m_z^\theta qsL/I_z, \quad \mu = (m_z^\omega + m_z^\dot{\theta}) \frac{qsL^2}{vI_z} - r/I_z$$

уравнение (1) преобразуется к виду

$$\ddot{\theta} + w^2\theta = \mu \dot{\theta} + \Omega\theta. \quad (2)$$

Однако для плохо обтекаемых тел отклонения от линейности могут быть существенными. На рис. 2 представлена зависимость коэффициента момента m_z от угла наклона цилиндра θ , имеющего удлинение $L/D = 9$. Момент измерен аэродинамическими весами с проволоочной подвеской. Цилиндр во время измерения неподвижен.

На графике видно отклонение зависимости от линейности в области малых углов наклона. Можно ожидать, что отклонения от линейности присутствуют и в зависимости коэффициента момента от производной угла наклона по времени.

В общем случае, когда зависимость момента от θ и $\dot{\theta}$ нелинейная, вместо уравнения (1) нужно использовать уравнение движения:

$$I_z \ddot{\theta} + r \dot{\theta} + k\theta = qsL f(\theta, \dot{\theta}). \quad (3)$$

Введя обозначения

$$\eta = qsL/I_z, \quad \eta_1 = r/I_z,$$

получим уравнение движения в виде

$$\ddot{\theta} + w^2\theta = \eta f(\theta, \dot{\theta}) - \eta_1 \dot{\theta}. \quad (4)$$

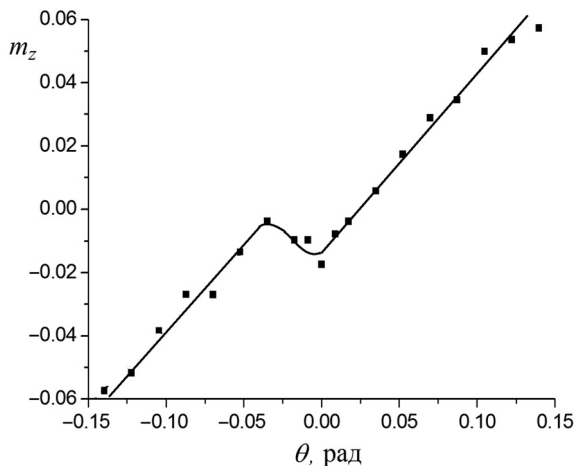


Рис. 2. Зависимость коэффициента момента от угла наклона неподвижного цилиндра.

Считая малыми параметры η и η_1 , уравнение (4) можно решать приближенным методом Крылова — Боголюбова [7]. Введем новые переменные: амплитуду A и ψ фазу колебаний,

$$\theta = A \cos \psi, \quad \psi = wt + \varphi.$$

Амплитуда A и сдвиг фазы φ являются медленно меняющимися переменными. В методе Крылова — Боголюбова в первом приближении для производных A и ψ по времени используются выражения

$$\dot{A} = -\frac{\eta}{2\pi w} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -wA \sin \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\eta_1 A}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi,$$

$$\dot{\psi} = w - \frac{\eta}{2A\pi w} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -wA \sin \psi) \cos \psi d\psi - \frac{\eta_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi.$$

Взяв интегралы во вторых слагаемых, получим

$$\dot{A} = -\frac{\eta}{2\pi w} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -wA \sin \psi) \sin \psi d\psi - \frac{\eta_1 A}{2}, \quad (5)$$

$$\dot{\psi} = w - \frac{\eta}{2A\pi w} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -wA \sin \psi) \cos \psi d\psi. \quad (6)$$

Применим процедуру Крылова — Боголюбова к уравнению (2), считая μ и Ω малыми параметрами:

$$\dot{A} = A \frac{\mu}{2}, \quad \dot{\psi} = w - \frac{\Omega}{2w}. \quad (7)$$

Приравняв правые части уравнения (5) и первого уравнения (7), правые части уравнения (6) и второго уравнения (7), получим

$$m_z^\omega + m_z^\theta = -\frac{v}{Aw\pi L} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -wA \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$m_z^\theta = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cos \psi, -wA \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

Отклонения от линейности могут приводить к зависимостям параметров m_z^ω + $m_z^{\dot{\theta}}$ и m_z^θ от амплитуд колебаний угла наклона A и производной угла наклона Aw . Однако эксперименты показали, что в некоторых диапазонах амплитуд колебаний зависимость логарифма амплитуды колебаний угла наклона от времени близка к линейной, и зависимость квадрата частоты колебаний линейно зависит от скоростного напора. Поэтому затухание можно описывать аналогами вращательных производных, которые, в точном смысле термина, вращательными производными не являются. При этом нужно указывать, в каком диапазоне амплитуд колебаний углов наклона и угловых скоростей осуществляется затухание колебаний.

В соответствии с алгоритмом определения вращательных производных, изложенном в статье [1], по линейной зависимости коэффициента затухания колебаний от скорости воздушного потока $n = a + bv$ сумма вращательных производных $m_z^\omega + m_z^{\dot{\theta}}$ выражается через коэффициент b , который находится по экспериментальным данным методом наименьших квадратов:

$$m_z^\omega + m_z^{\dot{\theta}} = \frac{4bI_z}{\rho s L^2} = \frac{4bk}{\rho s w^2 L^2},$$

где частота колебаний w определяется в экспериментах с затухающими колебаниями с выключенным вентилятором аэродинамической трубы. Частота колебаний $\dot{\psi}$ линейно зависит от скоростного напора q :

$$\dot{\psi} = w - m_z^\theta q s L / (2wI_z) = w - m_z^\theta q s L w / (2k).$$

Определив наклон b_1 экспериментальной зависимости $\dot{\psi} = a_1 - b_1 q$, можно вычислить вращательную производную m_z^θ . В экспериментах коэффициент a_1 лишь приближенно совпадал с частотой колебаний, измеренной при затухающих колебаниях с выключенным вентилятором аэродинамической трубы. По-видимому, сказывалось торможение колебаний, вызванное аэродинамическим сопротивлением движущегося в спокойном воздухе стабилизатора.

4. Результаты экспериментальных измерений. В наших экспериментах амплитуда затухающих колебаний A уменьшалась с 0.1 до 0.03 рад, а амплитуда угловой скорости Aw уменьшалась с 16 до 5 c^{-1} . Безразмерная амплитуда угловой скорости $AwL/(2v)$ менялась в пределах от 0.9 до 0.1.

Числа подобия в явлении колебания тел в потоке можно получить обезразмериванием уравнений движения (1) или (3). В дополнение к числам подобия Рейнольдса и Струхала числами подобия являются логарифмический декремент колебаний δ и $\rho s L^3 / I_z$. К. Скрутон в своей работе [8] впервые предложил в качестве критерия подобия для вращательных колебаний моста комбинацию из чисел подобия $\delta I_1 / (\rho b^4)$, где I_1 — момент инерции единицы длины моста; b — характерный поперечный размер моста (ширина). Позднее в работе [9] было предложено использовать аналогичное число подобия для поступательных колебаний моста. Число подобия для поступательных колебаний впоследствии получило название числа Скрутона. Как для вращательных, так и поступательных колебаний число Скрутона определяет критическую скорость воздушного потока, при превышении которой под действием потока возникают колебания моста.

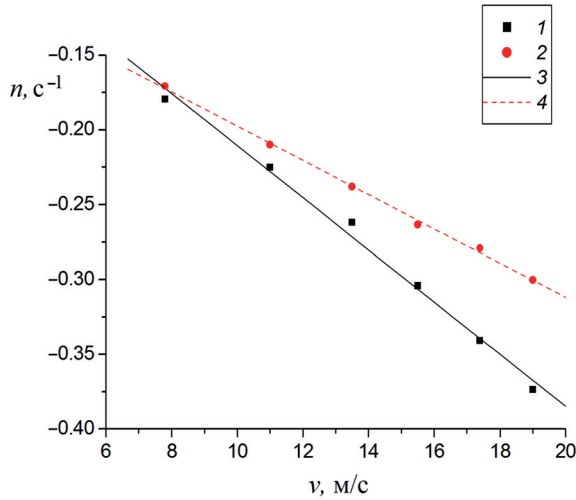


Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания n от скорости набегающего потока v : 1, 3 — $d = 0.625D$, $g = 0.65D$; 2, 4 — $d = 0.875D$, $g = 0.65D$; 1, 2 — эксперимент; 3, 4 — линейная аппроксимация.

В нашей работе изучались тела, для которых по образцу числа Скрутона можно сформулировать и применять критерий подобия при моделировании вращательных колебаний [10]:

$$Sc_{\theta} = \frac{I_z \delta}{\rho s L^3}. \quad (8)$$

Число Рейнольдса, определенное по диаметру цилиндра, находилось в диапазоне от $0.52 \cdot 10^5$ до $1.3 \cdot 10^5$. Число Струхала Sh при изменении скорости потока принимало значения от 0.007 до 0.015. Логарифмический декремент колебаний упругой подвески с подвешенным цилиндром при нулевой скорости набегающего потока $\delta = 0.066$. Число Скрутона, вычисленное по формуле (8), в наших экспериментах равно 2.7.

На рис. 3 и 4 представлены зависимость коэффициента затухания n от скорости набегающего потока v и зависимость частоты колебаний ψ от скоростного напора q .

Эти графики демонстрируют близость экспериментальных зависимостей к линейным функциям.

Результаты определения вращательных производных $m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\theta}}$ представлены в табл. 1. Приведены также 95 %-ные доверительные интервалы.

Таблица 1. Вращательные производные $m_z^{\omega} + m_z^{\dot{\theta}}$ цилиндра с диском и со стабилизатором

d/D	g/D		
	0.50	0.65	0.80
0.625	-2.50 ± 0.06	-2.36 ± 0.06	-2.30 ± 0.06
0.75	-2.27 ± 0.06	-2.43 ± 0.06	-2.38 ± 0.06
0.875	-1.93 ± 0.06	-2.06 ± 0.06	-2.27 ± 0.06

Вращательная производная цилиндра со стабилизатором, но без соосного диска, равна -2.10 ± 0.06 . Соосный диск, диаметр которого меньше диаметра цилиндра,

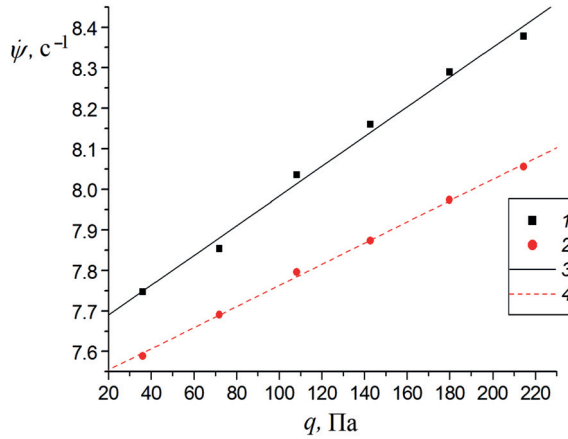


Рис. 4. Зависимость частоты колебаний $\dot{\psi}$ от скоростного напора q : 1, 3 — цилиндр без соосного диска; 2, 4 — $d = 0.875D$, $g = 0.65D$; 1, 2 — эксперимент; 3, 4 — линейная аппроксимация.

ускоряет затухание вращательных колебаний [1], но стабилизатор ускоряет затухание колебаний гораздо успешнее.

Простая математическая модель позволяет объяснить влияние стабилизатора на затухание колебаний. Модель предполагает, что аэродинамический момент цилиндра со стабилизатором складывается из момента, действующего на цилиндр без стабилизатора, и момента, создаваемого нормальной силой, действующей на стабилизатор. Принимается, что центр давления стабилизатора находится на расстоянии L_1 от центра масс цилиндра. Вращательное движение цилиндра с угловой скоростью $\dot{\theta}$ приводит к изменению угла атаки стабилизатора на малую величину $\Delta\alpha = \dot{\theta}L_1/v$. Изменению угла атаки соответствует изменение коэффициента нормальной силы стабилизатора c_y , который для стабилизатора, являющегося плоской пластиной, пропорционален изменению угла атаки $c_y = \varkappa\Delta\alpha$. Необходимо учесть, что стабилизатор экранируется цилиндром с размещенным в носовой части соосным диском. Допустим, что экранирование можно учесть введением коэффициента $\eta < 1$ в выражение для момента. Коэффициент η принимает разные значения для цилиндра без диска и для дисков с различным диаметром. Дополнительный момент M_{zs} , связанный с вращательным движением стабилизатора, выражается формулой

$$M_{zs} = \eta q s_1 c_y L_1, \quad c_y = \varkappa \dot{\theta} L_1 / v.$$

Влияние стабилизатора можно учесть, прибавив в правую часть уравнения движения (1) выражение для момента M_{zs} .

Колебания аэродинамического момента, пропорционального производной $\dot{\theta}$ угла наклона по времени, по фазе сдвинуты на $\pi/2$ от колебаний угла наклона цилиндра θ . Работа, совершаемая дополнительным аэродинамическим моментом за время одного периода колебаний, тратится на уменьшение энергии колебательного движения, т. е. на затухание колебаний. Таким образом, влияние стабилизатора сводится к добавлению постоянной величины к вращательной производной $m_z^\omega + m_z^{\dot{\theta}}$.

Результаты определения вращательных производных m_z^θ представлены в табл. 2. В таблицу включены 95 %-ные доверительные интервалы.

Таблица 2. Вращательные производные m_z^θ цилиндра с диском и со стабилизатором

d/D	g/D		
	0.50	0.65	0.80
0.625	-1.59 ± 0.11	-1.51 ± 0.11	-1.51 ± 0.11
0.75	-1.45 ± 0.11	-1.34 ± 0.11	-1.51 ± 0.11
0.875	-1.72 ± 0.11	-1.50 ± 0.11	-1.50 ± 0.11

Вращательная производная m_z^θ цилиндра со стабилизатором, но без соосного диска, равна -2.67 ± 0.11 . Вращательная производная m_z^θ цилиндра со стабилизатором без соосных дисков по абсолютной величине значительно больше m_z^θ цилиндров с соосными дисками.

Проводя рассуждения, аналогичные изложенным выше для вращательных производных $m_z^\omega + m_z^\theta$, можно получить, что влияние стабилизатора на вращательные производные m_z^θ сводится к добавке некоторой величины к производным цилиндра без стабилизатора. При этом положительные производные становятся отрицательными. Цилиндр со стабилизатором обладает статической устойчивостью.

5. Заключение. Определены характеристики затухающих вращательных колебаний цилиндра с удлинением девять со стабилизатором в кормовой части и соосным диском, установленным в головной части. Если для удобообтекаемых тел для описания влияния потока на затухание вращательных колебаний используются вращательные производные коэффициента момента, то для плохо обтекаемых тел характеризовать влияние потока удобно аналогами вращательных производных, которые в строгом смысле термина вращательными производными не являются. Аналоги вращательных производных для плохо обтекаемых тел зависят от диапазона амплитуды вращательных колебаний и от диапазона амплитуды угловой скорости. Вращательные производные определены для цилиндра с соосными дисками различных диаметров, расположенных на различных расстояниях между диском и передним торцом цилиндра. Предложена простая модель влияния стабилизатора на затухание колебаний.

Литература

1. Рябинин А. Н., Кауфман Д. В. Определение вращательных производных цилиндра с осно установленным диском в воздушном потоке. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **8** (66), вып. 1, 158–166 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.114>
2. Koenig K., Roshko A. An experimental study of geometrical effects on the drag and flow field of two bodies separated by a gap. *J. Fluid Mech.* **156** 167–204 (1985).
3. *Устройство для перевозки крупногабаритных грузов на внешней подвеске вертолета.* Пат. Рос. Федерации 2002676; заяв. 10.12.1990; опубл. 15.11.1993. Бюл. № 41–42.
4. Рябинин А. Н., Тюрин Б. Ф. Поведение груза, подвешенного под вертолетом. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **1**, 87–91 (1993).
5. Ковалев М. А. О расчете и исследовании аэродинамических труб. *Уч. зап. Ленингр. ун-та* **7**, 61–86 (1939).
6. Белоцерковский С. М., Скрипач Б. К., Табачников В. Г. *Крыло в нестационарном потоке газа.* Москва, Наука (1971).
7. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* 4-е изд. Москва, Наука (1974).
8. Scruton C. An experimental investigation of the aerodynamic stability of suspension bridges *IABSE congress report* **3**, 463–473 (1948).

9. Curtis D. J., Hart J. J., Scruton C. An aerodynamic investigation for the suspended structure of the proposed Tsing Ma bridge. *Eng. Struct.* **7**, 23–34 (1985).

10. Рябинин А. Н., Велигжанин А. А. Вращательные и поступательные колебания цилиндры малого удлинения в воздушном потоке. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 4, 729–739 (2022).

Статья поступила в редакцию 5 апреля 2023 г.;
доработана 5 июня 2023 г.;
рекомендована к печати 31 августа 2023 г.

Контактная информация:

Кауфман Даниил Витальевич — аспирант: kifsdan@mail.ru

Рябинин Анатолий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., проф.; a.ryabinin@spbu.ru

Damping oscillations of a cylinder with a coaxial disc and a stabilizer

D. V. Kaufman, A. N. Ryabinin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Kaufman D. V., Ryabinin A. N. Damping oscillations of a cylinder with a coaxial disc and a stabilizer. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 1, pp. 161–170. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.111> (In Russian)

The damped rotational oscillations of the cylinder, which is equipped with a coaxial disk in the head part, and has a stabilizer in the tail part, are studied. The elongation of the cylinder (the ratio of length to diameter) is nine. The cylinder is mounted in the test section of the low velocities wind tunnel with a wire suspension containing steel springs. In the equilibrium position, the axis of the cylinder is horizontal and parallel to the velocity vector of the incoming flow. Under the action of the air flow, the attenuation of rotational oscillations of the cylinder changes. A semiconductor strain gauge is attached to one of the suspension springs, which measures the dependence of spring tension on time during oscillations. The voltage at the output of the strain gauge is transmitted to the PC oscilloscope. The digital signal of the oscilloscope is transmitted to the computer. After calibration of the device, the frequency and amplitude of damped rotational oscillations around a horizontal axis passing through the center of the cylinder and perpendicular to the velocity vector of the incoming flow are determined. The effect of the air flow is described by analogues of rotational derivatives, which in the case of bluff bodies depend on the amplitude of the oscillations of the angle of inclination of the body and on the amplitude of the angular velocity. A simple model of the stabilizer's effect on rotational derivatives is proposed.

Keywords: wind tunnel, rotational vibrations, strain gauge, cylinder.

References

1. Ryabinin A. N., Kaufman D. V. Determination of rotational derivatives of a cylinder with a coaxially mounted disk in an air flow. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **8** (66), iss. 1, 158–166 (2021). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2021.114> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55** (4), iss. 1, 497–503 (2022). <https://doi.org/10.1134/S1063454122040197>].

2. Koenig K., Roshko A. An experimental study of geometrical effects on the drag and flow field of two bodies separated by a gap. *J. Fluid Mech.* **156**, 167–204 (1985).

3. *The device for the transport of bulky cargo on external suspension of a helicopter* (Patent of Russian Federation no. 2002676; appl. 10.12.1990; publ. 15.11.1993. Bull. no. 41–42. (In Russian)

4. Ryabinin A. N., Tyurin B. F. The behavior of the load suspended under a helicopter *Vestnik of Saint Petersburg University. Series 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1**, 87–91 (1993). (In Russian)
5. Kovalev M. A. On calculation and investigation of wind tunnels. *Uchenye zapiski Leningradskogo universiteta* **7**, 61–86 (1939). (In Russian)
6. Belotserkovskii S. M., Skripach B. K., Tabachnikov V. G. *A wing in an unsteady gas stream*. Moscow, Nauka Publ. (1971). (In Russian)
7. Bogoliubov N. N., Mitropolski Y. A. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations* New York, Gordon and Breach (1961). [Rus. ed.: Bogoliubov N. N., Mitropolski Y. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineinykh kolebaniy*. 4th. Nauka Publ. (1974). (In Russian)].
8. Scruton C. An experimental investigation of the aerodynamic stability of suspension bridges *IABSE congress report* **3**, 463–473 (1948).
9. Curtis D. J., Hart J. J., Scruton C. An aerodynamic investigation for the suspended structure of the proposed Tsing Ma bridge. *Eng. Struct.* **7**, 23–34 (1985).
10. Ryabinin A. N., Veligzhanin A. A. Rotational and translational oscillations of small-aspect-ratio in the air flow. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 4, 729–739 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.414> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55** (4), iss. 4, 489–496 (2022). <https://doi.org/10.1134/S106345412204015X>].

Received: April 5, 2023

Revised: June 5, 2023

Accepted: August 31, 2023

Authors' information:

Daniil V. Kaufman — kifadan@mail.ru

Anatoly N. Ryabinin — a.ryabinin@spbu.ru