

Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 2*

А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Тихонов А. А. Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 2 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 259–302. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.203>

Работа является продолжением обзора, посвященного 300-летию Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ) и представляющего собой попытку анализа научных достижений Санкт-Петербургской школы механики в области динамики твердого тела. Вторая часть обзора посвящена 50-летию периоду, завершающемуся в 2023 г. Основное внимание в ней уделяется общетеоретическим исследованиям, выполненным учеными СПбГУ и посвященным как неуправляемому, так и управляемому движениям твердого тела.

Ключевые слова: твердое тело, космический аппарат, искусственный спутник Земли, динамика, вращательное движение, управление, стабилизация, колебания.

1. Введение. В первой части обзора [1] были представлены некоторые результаты научных исследований, выполненных учеными СПбГУ (далее — Университет) в области динамики твердого тела в первые 250 лет истории университета. Рассмотрены не только качественные и количественные результаты анализа движения тел, но и методы исследования, позволившие получить эти результаты.

Данная вторая часть обзора посвящена сравнительно короткому, но чрезвычайно богатому на научные результаты 50-летию периоду истории Университета, завершающемуся в 2023 г. В этот период времени динамика твердого тела в Ленинградском — Санкт-Петербургском университете развивалась как базовый раздел механики, необходимый для моделирования актуальных прикладных задач. Поэтому в первую очередь в данной части обзора рассматриваются общетеоретические исследования, посвященные анализу движения твердого тела. Основное внимание концентрируется на вопросах динамики. При этом рассматриваются как неуправляемое, так и управляемые движения твердого тела. Вместе с тем систематическое изучение вопросов динамики твердого тела не могло идти в полном отрыве от изучения вопросов кинематики твердого тела. Поэтому попутно рассматриваются также и актуальные вопросы кинематики твердого тела.

*Первую часть статьи см.: Тихонов А. А. Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч.1 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10 (68). Вып. 3. С. 457–487. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.303>

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

2. Лагранжев и гамильтонов формализм в динамике твердого тела.

Канонические уравнения Гамильтона обладают определенными преимуществами при использовании методов теории возмущений [2]. Естественно предположить, что эти преимущества могут сыграть роль и в динамике твердого тела. В связи с этим в работе [2] В. С. Новоселов ставит вопрос о приведении дифференциальных уравнений механики к каноническому виду. Известно, что в случае действия потенциальных сил движение механической системы может быть описано каноническими уравнениями. С целью указать другие случаи приведения уравнений движения к каноническим автор предполагает, что имеются уравнения движения, разрешенные относительно обобщенных ускорений:

$$\ddot{q}_i = Q_i(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (i, j = 1, 2, \dots, s). \quad (1)$$

Поскольку с математической точки зрения представление уравнений в гамильтоновом виде равносильно записи этих уравнений в форме уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (2)$$

то для существования решения поставленной задачи необходимо и достаточно выполнения равенств

$$Q_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (3)$$

на траекториях системы (1). Функция Лагранжа будет равна $L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \dot{q}_i^2 + U$. Для тождественного выполнения равенств (3) во всем фазовом пространстве имеются необходимые и достаточные условия Гельмгольца:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (i, j = 1, 2, \dots, s). \quad (4)$$

Функция U , удовлетворяющая равенствам (4), может быть найдена с помощью известной процедуры, изложенной в [3], и в усовершенствованном виде — в [4]. Если же потребовать выполнения равенств (3) не во всем фазовом пространстве, а лишь на траекториях системы (1), то допустимо преобразование правых частей уравнений (1) в виде

$$\hat{Q}_i = Q_i + \sum_{\mu=1}^s P_{i\mu} (\ddot{q}_\mu - Q_\mu), \quad (5)$$

где $P_{i\mu}$ — подлежащие определению функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей. Далее автор выписывает необходимые и достаточные условия Гельмгольца для представления функции \hat{Q}_i в виде (3) во всем фазовом пространстве:

$$\frac{\partial \hat{Q}_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \hat{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad \frac{\partial \hat{Q}_i}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial \hat{Q}_j}{\partial q_i} = 2 \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{Q}_i}{\partial \dot{q}_j}, \quad \frac{\partial \hat{Q}_i}{\partial q_j} - \frac{\partial \hat{Q}_j}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{Q}_i}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \hat{Q}_j}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (6)$$

и находит следующие условия, которым должны удовлетворять неопределенные множители $P_{i\mu}$ для приведения уравнений движения к гамильтонову виду:

$$P_{ij} = P_{ji}, \quad (7)$$

$$\frac{dP_{ij}}{dt} + \sum_{\mu=1}^s P_{i\mu} \frac{\partial Q_{\mu}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} = - \left(\frac{dP_{ji}}{dt} + \sum_{\mu=1}^s P_{j\mu} \frac{\partial Q_{\mu}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_i} \right), \quad (8)$$

$$R_{ij} - \sum_{\mu=1}^s P_{i\mu} R_{\mu j} = R_{ji} - \sum_{\mu=1}^s P_{j\mu} R_{\mu i}, \quad R_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} + \frac{1}{4} \sum_{\mu=1}^s \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_{\mu}} \frac{\partial Q_{\mu}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (9)$$

Несложно проверить, что если выполнены условия (4), то уравнения (7)–(9) допускают нулевое решение для множителей P_{ij} . Далее рассмотрены следующие частные случаи приведения уравнений к каноническому виду: $Q_i = Q_i(t)$, $Q_i = Q_i(q_j)$, $Q_i = Q_i(\dot{q}_j)$. Для каждого из них приведены примеры, включая такие, в которых условия (4) не выполняются.

В работе [5] В. С. Новоселов рассматривает метод минимизации функционала действия для нахождения характеристик нелинейных колебаний. Ранее такой подход предлагался в [6] и применялся в [7] для решения уравнения Дуффинга:

$$\ddot{x} + x + \mu x^3 = 0 \quad (10)$$

с малым параметром μ . Для дифференциального уравнения более общего вида

$$\ddot{x} + \beta(t)\dot{x} + \alpha(x, t) = 0 \quad (11)$$

в [6] предложено заменить его решение исследованием минимума функционала:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x, \dot{x}) dt, \quad f(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \exp \left(\int_0^t \beta(\tau) d\tau \right) \dot{x}^2 + Q(t, x)\dot{x} + R(t, x), \quad (12)$$

$$x(t_1) = x_1, \quad x(t_2) = x_2, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial R}{\partial t} = \alpha(x, t) \exp \left(\int_0^t \beta(\tau) d\tau \right),$$

для которого (11) является уравнением Эйлера — Лагранжа. В. С. Новоселов в работе [5] устраняет ошибку, а также дает уточнение и развитие результатов работы [7]. Идея работы [7] заключается в использовании интеграла механической энергии на траекториях уравнения (10) и в обращении в ноль множителя Ω при t в вековом члене выражения I на аппроксимирующем колебании $x = x_1 \cos \omega t$. Однако в действительности минимизация функции действия требует не выполнения равенства $\Omega = 0$, а минимизации Ω по ω . Поэтому искомые значения ω получаются иными. Показано, что если удерживать члены порядка μ в выражении для частоты ω , то и в аппроксимирующем выражении для x также следует удерживать члены порядка μ . Сделан вывод о том, что метод минимизации функционала действия может практически применяться для определения характеристик нелинейных колебаний. Но нужно учитывать дополнительные трудности, которые возникают вследствие того, что членам порядка μ в фазовых координатах могут отвечать члены порядка μ^2 в минимизируемом функционале.

Таким образом, проблема сведения задачи исследования решения дифференциального уравнения (11) к изучению функционала (12) равносильна замене уравнения (11) каким-либо эквивалентным уравнением в форме Лагранжа или к представлению уравнения (11) в каноническом виде. Отмечается, что приведение уравнения

(11) к каноническому виду может быть выполнено непосредственно и рассматривается пример. Далее в [5] обсуждается задача приведения к каноническому виду для диссипативной или возбуждаемой механической системы с n степенями свободы. Если с помощью неособенного преобразования привести уравнения колебательного движения такой системы к виду

$$\ddot{x}_i + 2b_i \dot{x}_i + \frac{\partial U(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

то, вводя канонические переменные по формулам $q_i = x_i e^{b_i t}$, $p_i = \dot{x}_i e^{b_i t}$, можно представить эту систему в виде

$$\dot{p}_i = -b_i p_i - \frac{\partial U}{\partial q_i} e^{2b_i t}, \quad \dot{q}_i = p_i + b_i q_i.$$

Далее несложно проверить, что $H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} p_i^2 + b_i q_i p_i + e^{2b_i t} \int_{q_i^0}^{q_i} \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i \right)$ представляет собой функцию Гамильтона.

Одним из важных и фундаментальных вопросов кинематики твердого тела, а вслед за ней и динамики твердого тела, является вопрос о нахождении наилучшего описания ориентации твердого тела. Удачный выбор координат для задания ориентации твердого тела позволяет существенно упростить математическую модель и избежать таких неприятностей, как сингулярности и сложные нелинейности кинематических дифференциальных уравнений. И наоборот, плохой выбор координат может искусственным образом ограничить возможности системы управления движением твердого тела путем требования функционирования в области, не содержащей сингулярностей. Поэтому неудивительно, что вопрос о выборе наилучших переменных (иногда называемых параметрами ориентации) для описания ориентации и углового движения твердого тела изучался такими известными учеными, как Эйлер, Якоби, Гамильтон, Кэйли, Клейн, Родриг, Гиббс, Хопф и привел к появлению многих выдающихся результатов. Тем не менее вопрос о возможности выбора таких обобщенных координат, которые были бы минимальны по числу (соответствовали бы трем степеням свободы твердого тела) и не имели бы точек вырождения, оставался открытым на протяжении 200 лет после появления первых работ Эйлера по кинематике твердого тела. Лишь в 1964 г. был дан отрицательный ответ на поставленный вопрос: невозможно «улучшить» известные методы параметризации вращений твердого тела без введения избыточных переменных [8].

Отчасти подытоживая 200-летние изыскания предыдущих поколений ученых, отчасти приближая изложение методов теоретической механики к изложению математических дисциплин в Университете, С. Н. Кирпичников и В. С. Новоселов опубликовали книгу [9], которая оказалась весьма своевременной из-за отсутствия в литературе достаточно полной математической формализации методов кинематики твердого тела, а также в связи с тем, что математическое описание кинематических методов стало явно уступать изложению методов динамики. В этой книге теорию перемещений твердого тела, теорию его движения и кинематику сложного движения предлагается изучать с помощью единообразных групповых, операторно-матричных и топологических методов. Большое внимание уделяется определению и изучению структуры пространств конфигураций твердого тела, а также вопросам задания ориентации тела, как локальной, так и глобальной. Дано достаточно полное математически формализованное изложение кинематики твердого тела

и кинематики сложного движения, в котором естественным образом большое внимание уделено вопросам топологии. Примененная в [9] операторная запись формул позволила эффективно использовать качественные методы исследования (в отличие от координатной записи, которая часто ввиду своей громоздкости маскирует математическую сущность записываемых соотношений). При этом последовательное применение операторных и топологических методов в кинематике твердого тела оказалось весьма плодотворным и позволило помимо единообразия изложения, математической ясности и большей строгости доказательств получить и некоторые новые результаты. Например, в [9] впервые показано, что введение угловой скорости твердого тела соответствует установлению структуры тривиального расслоения в фазовом пространстве твердого тела.

В работах Н. Н. Поляхова, С. А. Зегжды, М. П. Юшкова (см., например, [10]) показано, что математический аппарат теоретической механики, разработанный применительно к системе материальных точек, может быть применен и к механическим системам, состоящим из твердых тел. Это означает, что при исследовании динамики системы твердых тел могут быть использованы уравнения Лагранжа как I, так и II рода. При этом задача отыскания простейших по форме уравнений Лагранжа I рода для системы твердых тел сводится к отысканию новой формы записи уравнений движения одного твердого тела. Одна из таких форм уравнений динамики твердого тела предложена в [11]. Положение тела с массой m в пространстве можно задать с помощью избыточных координат, в качестве которых выбираются радиус-вектор $\vec{\rho}$ центра масс тела и тройка ортов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, направленных по главным центральным осям инерции тела $Cxyz$. В силу абсолютной твердости тела выполняются условия ортонормированности $f^1 = \vec{i}^2 - 1 = 0$, $f^2 = \vec{j}^2 - 1 = 0$, $f^3 = \vec{k}^2 - 1 = 0$, $f^4 = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $f^5 = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$, $f^6 = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$, рассматриваемые как уравнения голономных связей¹. С введением обозначений $I_x = \int_{(m)} x^2 dm$, $I_y = \int_{(m)} y^2 dm$, $I_z = \int_{(m)} z^2 dm$ удвоенная кинетическая энергия тела примет вид

$$2T = m\dot{\rho}^2 + I_x\dot{i}^2 + I_y\dot{j}^2 + I_z\dot{k}^2. \quad (13)$$

Пусть к телу в точках $N_\nu(x_\nu, y_\nu, z_\nu)$ приложены силы \vec{F}_ν . Виртуальная работа этих сил записывается в виде

$$\delta A = \sum_\nu \vec{F}_\nu \cdot (\delta\vec{\rho} + x_\nu\delta\vec{i} + y_\nu\delta\vec{j} + z_\nu\delta\vec{k}) = \vec{Q}_{\vec{\rho}} \cdot \delta\vec{\rho} + \vec{Q}_{\vec{i}} \cdot \delta\vec{i} + \vec{Q}_{\vec{j}} \cdot \delta\vec{j} + \vec{Q}_{\vec{k}} \cdot \delta\vec{k},$$

$$\text{где } \vec{Q}_{\vec{\rho}} = \sum_\nu \vec{F}_\nu, \quad \vec{Q}_{\vec{i}} = \sum_\nu x_\nu \vec{F}_\nu, \quad \vec{Q}_{\vec{j}} = \sum_\nu y_\nu \vec{F}_\nu, \quad \vec{Q}_{\vec{k}} = \sum_\nu z_\nu \vec{F}_\nu. \quad (14)$$

Тогда движение тела можно описать четырьмя векторными уравнениями Лагранжа I рода с неопределенными множителями Лагранжа Λ_i , $i = \overline{1, 6}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}} - \frac{\partial T}{\partial \rho} = \vec{Q}_{\vec{\rho}}, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{i}} - \frac{\partial T}{\partial i} = \vec{Q}_{\vec{i}} + \sum_{\kappa=1}^6 \Lambda_\kappa \frac{\partial f^\kappa}{\partial i} = \vec{Q}_{\vec{i}} + 2\Lambda_1 \vec{i} + \Lambda_4 \vec{j} + \Lambda_6 \vec{k}, \quad (16)$$

¹ Скалярное произведение векторов здесь обозначается знаком \cdot . В дальнейшем этот знак опускается. Векторное произведение векторов обозначается \times .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{j}}} - \frac{\partial T}{\partial \vec{j}} = \vec{Q}_{\vec{j}} + \sum_{\kappa=1}^6 \Lambda_{\kappa} \frac{\partial f^{\kappa}}{\partial \vec{j}} = \vec{Q}_{\vec{j}} + 2\Lambda_2 \vec{j} + \Lambda_5 \vec{k} + \Lambda_4 \vec{i}, \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{k}}} - \frac{\partial T}{\partial \vec{k}} = \vec{Q}_{\vec{k}} + \sum_{\kappa=1}^6 \Lambda_{\kappa} \frac{\partial f^{\kappa}}{\partial \vec{k}} = \vec{Q}_{\vec{k}} + 2\Lambda_3 \vec{k} + \Lambda_6 \vec{i} + \Lambda_5 \vec{j}, \quad (18)$$

где приняты обозначения

$$\frac{\partial}{\partial \vec{A}} = \frac{\partial}{\partial A_x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial A_y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial A_z} \vec{k}, \quad \vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}.$$

С учетом этих обозначений и равенств (14) уравнения (15)–(18) запишутся в виде

$$m \ddot{\vec{\rho}} = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu}, \quad (19)$$

$$I_y \ddot{\vec{i}} = \sum_{\nu} x_{\nu} \vec{F}_{\nu} + 2\Lambda_1 \vec{i} + \Lambda_4 \vec{j} + \Lambda_6 \vec{k}, \quad (20)$$

$$I_y \ddot{\vec{j}} = \sum_{\nu} y_{\nu} \vec{F}_{\nu} + 2\Lambda_2 \vec{j} + \Lambda_5 \vec{k} + \Lambda_4 \vec{i}, \quad (21)$$

$$I_y \ddot{\vec{k}} = \sum_{\nu} z_{\nu} \vec{F}_{\nu} + 2\Lambda_3 \vec{k} + \Lambda_6 \vec{i} + \Lambda_5 \vec{j}. \quad (22)$$

Двукратное дифференцирование по времени уравнений связей и исключение множителей Лагранжа из уравнений (20)–(22) дает:

$$\ddot{\vec{i}} = - \left(\dot{\vec{i}} \right)^2 \vec{i} - \frac{2I_y (\dot{\vec{i}} \cdot \dot{\vec{j}})}{I_x + I_y} \vec{j} - \frac{2I_z (\dot{\vec{k}} \cdot \dot{\vec{i}})}{I_z + I_x} \vec{k} + \frac{L_z}{I_x + I_y} \vec{j} - \frac{L_y}{I_z + I_x} \vec{k} \quad (23)$$

$$\ddot{\vec{j}} = - \left(\dot{\vec{j}} \right)^2 \vec{j} - \frac{2I_z (\dot{\vec{j}} \cdot \dot{\vec{k}})}{I_y + I_z} \vec{k} - \frac{2I_x (\dot{\vec{i}} \cdot \dot{\vec{j}})}{I_x + I_y} \vec{i} + \frac{L_x}{I_y + I_z} \vec{k} - \frac{L_z}{I_x + I_x y} \vec{i} \quad (24)$$

$$\ddot{\vec{k}} = - \left(\dot{\vec{k}} \right)^2 \vec{k} - \frac{2I_x (\dot{\vec{k}} \cdot \dot{\vec{i}})}{I_z + I_x} \vec{i} - \frac{2I_y (\dot{\vec{j}} \cdot \dot{\vec{k}})}{I_y + I_z} \vec{j} + \frac{L_y}{I_z + I_x} \vec{i} - \frac{L_x}{I_y + I_z} \vec{j}. \quad (25)$$

Здесь L_x, L_y, L_z — проекции главного момента $\vec{L} = \sum_{\nu} (x_{\nu} \vec{i} + y_{\nu} \vec{j} + z_{\nu} \vec{k}) \times \vec{F}_{\nu}$ внешних сил относительно центра масс. В системе уравнений (19), (23)–(25) уравнение (19) соответствует движению центра масс, а уравнения (23)–(25) — вращению тела относительно центра масс.

Во многих задачах небесной механики и космодинамики большой интерес представляет анализ углового движения твердого тела (естественного или искусственного происхождения) в окрестности устойчивого положения равновесия, обусловленного влиянием гравитационного момента. Пусть центр масс тела движется по круговой кеплеровой орбите в центральном гравитационном поле, тензор инерции тела $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ в главных центральных осях инерции $Cxyz$ с ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ удовлетворяет неравенствам $B > A > C$. Тогда устойчивым будет такое положение тела, в котором орты $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ совпадают соответственно с ортами $\vec{\xi}_0, \vec{\eta}_0, \vec{\zeta}_0$ орбитальной системы координат, вращающейся с угловой скоростью ω_0 в инерциальном пространстве, причем ось ξ направлена по касательной к орбите в сторону движения, ось η —

по нормали к плоскости орбиты, а ось ζ — вдоль радиус-вектора центра масс тела относительно притягивающего центра [12]. Если задать ориентацию тела в орбитальной системе координат с помощью «самолетных» углов ψ, φ, θ , то указанному устойчивому положению будут соответствовать значения $\psi = \varphi = \theta = 0$. Такое положение тела часто называют положением гравитационной ориентации, а тело, совершающее либрационное движение в окрестности этого положения, — гравитационно-ориентированным телом. Либрационное движение тела происходит, вообще говоря, не только под действием гравитационного момента [12] $\vec{M}_G = 3\omega_0^2 \vec{\zeta}_0 \times (\mathbf{J}\vec{\zeta}_0)$, но и под действием других моментов различной природы (обозначим их главный момент \vec{M}_B), вызывающих возмущения в колебаниях гравитационно-ориентированного тела. Исследование возмущенных колебаний является нелинейной задачей, описываемой динамическими уравнениями Эйлера

$$\frac{d}{dt}(J\vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (J\vec{\omega}) = \vec{M}_G + \vec{M}_B, \quad (26)$$

и для приближенного аналитического решения этой задачи, с учетом условия $|\vec{M}_B| \ll |\vec{M}_G|$, естественно использовать методы возмущений. Однако методы возмущений обычно связаны с переходом к новым переменным, и часто бывает непросто построить преобразованную систему дифференциальных уравнений движения. В некоторых случаях эти трудности можно в значительной степени преодолеть, используя метод вариации канонических произвольных постоянных. Этот метод удобен для построения дифференциальных уравнений возмущенного движения механических систем, состояние которых можно описать каноническими уравнениями. Например, в работах [12, 13] метод вариации канонических произвольных постоянных в сочетании с методом усреднения успешно применялся при $\vec{M}_B = \vec{0}$ для исследования нелинейных колебаний гравитационно-ориентированного спутника под действием гравитационного момента, взятого в квадратичном приближении.

В Университете метод канонической вариации произвольных постоянных получил развитие и был обобщен на механические системы с неканоническими возмущениями. В работе [14] автором построены дифференциальные уравнения возмущенного либрационного движения гравитационно-ориентированного тела, обобщающие известные уравнения, использованные в [12] и [13], на случай, когда наряду с потенциальными возмущающими моментами действуют непотенциальные возмущающие моменты, взятые в квадратичном приближении.

Для получения этих уравнений вводятся в рассмотрение канонические переменные $\psi, \varphi, \theta, p_1, p_2, p_3$, где $p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}}$, $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$, $p_3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - B\omega_0$, $L = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) - \frac{3}{2}\omega_0^2[(A-C)\gamma_1^2 + (B-C)\gamma_2^2] -$ функция Лагранжа, в которой $\omega_x, \omega_y, \omega_z, \gamma_1, \gamma_2$ выражены через $\psi, \varphi, \theta, \dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}$ на основании кинематических формул $\omega_x = \dot{\varphi} - \dot{\psi} \sin \theta + \omega_0 \sin \psi \cos \theta$, $\omega_y = \dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta + \omega_0 (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta)$, $\omega_z = \dot{\psi} \cos \varphi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \varphi + \omega_0 (\cos \varphi \sin \psi \sin \theta - \sin \varphi \cos \psi)$, $\gamma_1 = -\sin \theta$, $\gamma_2 = \sin \varphi \cos \theta$. После введения в рассмотрение функции Гамильтона $H = p_1 \dot{\psi} + p_2 \dot{\varphi} + p_3 \dot{\theta} - L$ дифференциальные уравнения (26) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial \psi} + M_{By} \sin \varphi \cos \theta + M_{Bz} \cos \varphi \cos \theta - M_{Bx} \sin \theta, \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + M_{Bx}, \quad \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial \theta} + M_{By} \cos \varphi - M_{Bz} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\dot{\psi} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_3}.$$

Далее вводится новая безразмерная независимая переменная $u = \omega_0 t$ и новые безразмерные обобщенные импульсы:

$$P_1 = (A\omega_0)^{-1}p_2 - \psi, \quad P_2 = (B\omega_0)^{-1}p_3, \quad P_3 = (C\omega_0)^{-1}p_1 + (1 - BC^{-1})\varphi. \quad (28)$$

Идея такой замены заключается в том, что формулы (28) совпадают с линеаризованными и деленными на ω_0 выражениями для проекций относительной угловой скорости тела и могут рассматриваться как формулы перехода от обобщенных импульсов p_1, p_2, p_3 к новым обобщенным импульсам P_1, P_2, P_3 того же порядка малости. В новых переменных функция Гамильтона принимает вид $H(\psi, \varphi, \theta, P_1, P_2, P_3) = H_0 + H_1 + H_2$, где H_0 содержит члены 2-го порядка малости, а H_1 — члены 3-го порядка малости:

$$H_0 = \frac{1}{2}(AP_1^2 + BP_2^2 + CP_3^2) + 2(B - C)\varphi^2 + \frac{1}{2}(B - A)\psi^2 + \frac{3}{2}(A - C)\theta^2,$$

$$H_1 = (B - C)\varphi\psi\theta + (B - C)P_2\varphi^2 + (A - C)P_3\theta\psi + \frac{B}{2}P_2\psi^2 + (C - B)P_2P_3\varphi + AP_1P_3\theta.$$

В системе (27), записанной для $H = H_0 + H_1$, осуществляется переход к новым импульсам по формулам (28). Путем разрешения системы (27) относительно производных $P'_1, P'_2, P'_3, \psi', \varphi', \theta'$, взятых по безразмерной переменной u , образуется система

$$\begin{aligned} P'_1 &= F_1(P_1, P_2, P_3, \psi, \theta, \varphi), & \varphi' &= G_1(P_1, P_2, P_3, \psi, \theta, \varphi), \\ P'_2 &= F_2(P_1, P_2, P_3, \psi, \theta, \varphi), & \theta' &= G_2(P_1, P_2, P_3, \psi, \theta, \varphi), \\ P'_3 &= F_3(P_1, P_2, P_3, \psi, \theta, \varphi), & \psi' &= G_3(P_1, P_2, P_3, \psi, \theta, \varphi), \end{aligned} \quad (29)$$

учитывающая члены 2-го порядка малости включительно. Дальнейшее ее преобразование опирается на переход к новым переменным, связанным с рассмотрением уравнений (29) в линейном приближении, соответствующем гамильтониану H_0 . При отсутствии возмущающего момента \bar{M}_B общее решение уравнений линейного приближения имеет вид [12]

$$P_1 = -\sum_{i=1}^2 k_i \sigma_{2i} \sqrt{x_i} \sin \tau_i, \quad P_2 = \sqrt{2x_3 B^{-1}} \cos \tau_3, \quad P_3 = \sum_{i=1}^2 k_i \sigma_{1i} \sqrt{x_i} \cos \tau_i, \quad (30)$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^2 \sigma_{2i} \sqrt{x_i} \cos \tau_i, \quad \theta = \frac{1}{k_3} \sqrt{2x_3 B^{-1}} \sin \tau_3, \quad \psi = \sum_{i=1}^2 \sigma_{1i} \sqrt{x_i} \sin \tau_i. \quad (31)$$

Здесь $\tau_i = k_i(u + v_i)$ ($i = 1, 2, 3$); x_i, v_i — канонические произвольные постоянные; k_i — невозмущенные собственные частоты колебаний гравитационно ориентированного тела:

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \sqrt{a/2 \mp \sqrt{a^2/4 - b}}, \quad k_3 = \sqrt{3(1 - \varepsilon)/\delta}, \quad \sigma_{1i} = \frac{\mu_i}{k_i} \sqrt{\frac{2}{A_i}}, \quad \sigma_{2i} = -\frac{1}{k_i} \sqrt{\frac{2}{A_i}}, \\ \varepsilon &= C/A, \quad \delta = B/A, \quad a = 1 + 3(\delta - \varepsilon) + b/4, \quad b = 4(\delta - 1)(\delta - \varepsilon)/\varepsilon, \\ A_i &= \frac{(-1)^i B \varepsilon (k_1^2 - k_2^2)}{\delta(\delta - 1 - \varepsilon k_i^2)}, \quad \mu_i = \frac{k_i(1 - \delta + \varepsilon)}{\delta - 1 - \varepsilon k_i^2}, \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

С учетом членов 2-го порядка малости решение системы (29) отыскивается в виде (31), где $x_i(u)$, $v_i(u)$ — некоторые неизвестные функции u , подлежащие определению. Формулы (30) и (31) рассматриваются как формулы перехода к новым переменным $x_i(u)$, $v_i(u)$. После подстановки этих формул, а также результата их дифференцирования по u , в систему (29) и разрешения этой системы относительно производных x_i' и v_i' ($i = 1, 2, 3$), получена система дифференциальных уравнений вида

$$x_i' = x_i'(x_i, v_i), \quad v_i' = v_i'(x_i, v_i), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (32)$$

построенных с учетом членов 2-го порядка малости. Аналогичным образом преобразуются слагаемые в функции H . В частности, для H_1 получено выражение

$$\begin{aligned} H_1 = & x_1\sqrt{x_3}(h_1^{(1)} \cos \tau_3 + h_2^{(1)} \cos(2\tau_1 - \tau_3) + h_3^{(1)} \cos(2\tau_1 + \tau_3)) + \\ & + x_2\sqrt{x_3}(h_4^{(1)} \cos \tau_3 + h_5^{(1)} \cos(2\tau_2 - \tau_3) + h_6^{(1)} \cos(2\tau_2 + \tau_3)) + \\ & + \sqrt{x_1x_2x_3}(h_7^{(1)} \cos(\tau_1 - \tau_2 - \tau_3) + \\ & + h_8^{(1)} \cos(\tau_1 - \tau_2 + \tau_3) + h_9^{(1)} \cos(\tau_1 + \tau_2 - \tau_3) + h_{10}^{(1)} \cos(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)), \end{aligned}$$

коэффициенты которого, зависящие только от инерционных параметров тела, приведены в [14]. В результате система (32) имеет вид

$$\begin{aligned} x_i' = & -\frac{\partial H_1}{\partial v_i} + 2(-1)^i \sqrt{x_i} \left(\frac{\sigma_{1,3-i}}{\sigma_1} \widetilde{M}_{Bx}^{(3)} \sin \tau_i - \frac{\sigma_{2,3-i}}{\sigma_2} \widetilde{M}_{Bz}^{(3)} \cos \tau_i \right), \\ v_i' = & \frac{\partial H_1}{\partial x_i} + \frac{(-1)^i}{k_i \sqrt{x_i}} \left(\frac{\sigma_{1,3-i}}{\sigma_1} \widetilde{M}_{Bx}^{(3)} \cos \tau_i + \frac{\sigma_{2,3-i}}{\sigma_2} \widetilde{M}_{Bz}^{(3)} \sin \tau_i \right), \\ x_3' = & -\frac{\partial H_1}{\partial v_3} + \sqrt{2Bx_3} \widetilde{M}_{By}^{(3)} \cos \tau_3, \quad v_3' = \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\sqrt{B}}{k_3 \sqrt{2x_3}} \widetilde{M}_{By}^{(3)} \sin \tau_3, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\widetilde{M}_{Bx} = M_{Bx}(A\omega_0^2)^{-1}$; $\widetilde{M}_{By} = M_{By}(B\omega_0^2)^{-1}$; $\widetilde{M}_{Bz} = M_{Bz}(C\omega_0^2)^{-1}$.

При отсутствии возмущающего момента \vec{M}_B дифференциальные уравнения (33) являются каноническими и совпадают с известными уравнениями в канонических вариациях [12]. Уравнения (33) имеют вид, позволяющий непосредственно, без громоздких выкладок, применять для их исследования асимптотические методы нелинейной механики. Поэтому они оказались удобными для исследования и позволили получить новые результаты. Далее этим результатам будет посвящен специальный раздел обзора. Здесь лишь упомянем первые по времени появления две статьи [15] и [16], в которых на базе уравнений (33) исследованы нелинейные колебания гравитационно-ориентированного заряженного спутника в суперпозиции гравитационного и магнитного (в дипольном приближении) полей Земли. В области гравитационной ориентации были обнаружены и исследованы 22 параметрических и четыре внутренних нелинейных резонанса, обусловленных квадратичными нелинейными членами.

В дальнейшем на основе уравнений (33), полученных в [14], был развит общий метод исследования либрационного движения твердого тела под действием возмущающего момента общего вида в классе нелинейных квадратичных функций относительно малых углов ориентации тела и их производных по времени. В [17] была выяснена спектральная структура этого возмущающего момента, что позволило обнаружить возможные параметрические и внутренние резонансы. В [18] найдены 63 резонансные комбинации невозмущенных собственных частот тела, реализу-

емых в области гравитационной ориентации, и построены соответствующие резонансные кривые в плоскости инерционных параметров тела. Также было выявлено 520 кратных резонансов в области гравитационной ориентации тела и найдены соответствующие значения инерционных параметров. В работах [19] и [20] система дифференциальных уравнений возмущенного движения тела усреднялась по явно входящему безразмерному времени в нерезонансном случае и в условиях выявленных резонансов. Выяснена структура полученных усредненных дифференциальных систем, получены коэффициенты усредненных уравнений в зависимости от параметров задачи и выведена унифицированная форма записи усредненных дифференциальных уравнений возмущенного движения тела для всех резонансных случаев. Исследованы колебания тела в нерезонансном случае и в условиях всех возможных резонансов. В рамках принятой квадратичной аппроксимации получены условия затухающих, ограниченных или нарастающих колебаний тела. Эти результаты позволяют исследователям конкретных прикладных задач динамики гравитационно-ориентированных спутников выяснить, какие резонансы могут возникать при различных возмущениях в классе квадратичных функций и какие динамические эффекты могут вызвать эти резонансы.

В то же время многие примеры известных задач нелинейной механики демонстрируют важность учета нелинейных членов 3-го порядка малости. В полной мере это справедливо применительно к задачам нелинейных колебаний в условиях внутренних резонансов. В работе [21] выведены такие дифференциальные уравнения возмущенного либрационного движения гравитационно-ориентированного тела, которые позволяют учесть влияние не только квадратичных, но и кубических нелинейных членов:

$$\begin{aligned}
x_i' &= -\frac{\partial(H_1 + H_2)}{\partial v_i} + 2(-1)^i \sqrt{x_i} \left(\frac{\sigma_{1,3-i}}{\sigma_1} \widetilde{M}_{Bx}^{(3)} \sin \tau_i - \frac{\sigma_{2,3-i}}{\sigma_2} \widetilde{M}_{Bz}^{(3)} \cos \tau_i \right) + \\
&+ 2\sqrt{2}(-1)^i \frac{A\sigma_{2,3-i}}{C\sqrt{B}\sigma_2 k_3} \sqrt{x_i x_3} \widetilde{M}_{Bx}^{(2)} \cos \tau_i \sin \tau_3 - \\
&- 2(-1)^i \frac{B\sigma_{2,3-i}}{C\sigma_2} \sqrt{x_i} (\sigma_{21} \sqrt{x_1} \cos \tau_1 + \sigma_{22} \sqrt{x_2} \cos \tau_2) \widetilde{M}_{By}^{(2)} \cos \tau_i, \\
v_i' &= \frac{\partial(H_1 + H_2)}{\partial x_i} + \frac{(-1)^i}{k_i \sqrt{x_i}} \left(\frac{\sigma_{1,3-i}}{\sigma_1} \widetilde{M}_{Bx}^{(3)} \cos \tau_i + \frac{\sigma_{2,3-i}}{\sigma_2} \widetilde{M}_{Bz}^{(3)} \sin \tau_i \right) + \\
&+ \sqrt{2}(-1)^i \frac{A\sigma_{2,3-i} \sqrt{x_3}}{C\sqrt{B}\sigma_2 k_i k_3 \sqrt{x_i}} \widetilde{M}_{Bx}^{(2)} \sin \tau_i \sin \tau_3 + \\
&+ (-1)^i \frac{B\sigma_{2,3-i}}{C\sigma_2 k_i \sqrt{x_i}} (\sigma_{21} \sqrt{x_1} \cos \tau_1 + \sigma_{22} \sqrt{x_2} \cos \tau_2) \widetilde{M}_{By}^{(2)} \sin \tau_i, \\
x_3' &= -\frac{\partial(H_1 + H_2)}{\partial v_3} + \sqrt{2Bx_3} \widetilde{M}_{By}^{(3)} \cos \tau_3 - \\
&- \frac{C\sqrt{2x_3}}{\sqrt{B}} (\sigma_{21} \sqrt{x_1} \cos \tau_1 + \sigma_{22} \sqrt{x_2} \cos \tau_2) \widetilde{M}_{Bz}^{(2)} \cos \tau_3, \\
v_3' &= \frac{\partial(H_1 + H_2)}{\partial x_3} - \frac{\sqrt{B}}{k_3 \sqrt{2x_3}} \widetilde{M}_{By}^{(3)} \sin \tau_3 + \\
&+ \frac{C}{k_3 \sqrt{2Bx_3}} (\sigma_{21} \sqrt{x_1} \cos \tau_1 + \sigma_{22} \sqrt{x_2} \cos \tau_2) \widetilde{M}_{Bz}^{(2)} \sin \tau_3.
\end{aligned} \tag{34}$$

Здесь $i = 1, 2$; A, B, C — главные центральные моменты инерции тела; гамильтониан H_1 содержит члены 3-го порядка малости, H_2 содержит члены 4-го порядка малости; $\widetilde{M}_{Bx}^{(2)}, \widetilde{M}_{By}^{(2)}, \widetilde{M}_{Bz}^{(2)}$ — выражения для безразмерных проекций возмущающего момента $\widetilde{M}_{Bx}, \widetilde{M}_{By}, \widetilde{M}_{Bz}$ соответственно, содержащие члены до второго порядка малости по $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \sqrt{x_3}$, а $\widetilde{M}_{Bx}^{(3)}, \widetilde{M}_{By}^{(3)}, \widetilde{M}_{Bz}^{(3)}$ — аналогичные выражения, содержащие члены до 3-го порядка малости включительно. Легко видеть, что дифференциальные уравнения (33) вытекают из уравнений (34), если в последних нелинейные члены взять в квадратичной аппроксимации.

Уравнения (34) удобны как для выявления резонансных комбинаций 2, 3 и 4-го порядков (именно эти три набора являются наиболее важными в подавляющем большинстве случаев [22]), так и для дальнейшего аналитического исследования резонансных колебаний тела с помощью асимптотических методов. Так, для случая, когда возмущающий момент \vec{M}_B отсутствует, получены следующие резонансные комбинации 4-го порядка для собственных частот гравитационно-ориентированного тела:

$$2k_1 - 2k_3 = 0, 3k_1 - k_2 = 0, 2k_2 - 2k_3 = 0, k_1 + k_2 - 2k_3 = 0, k_1 - k_2 + 2k_3 = 0. \quad (35)$$

Все они могут реализоваться в области, где выполняются достаточные условия устойчивости $B > A > C$ [12] гравитационной ориентации тела. В то же время выполнение достаточных условий устойчивости не гарантирует пребывания амплитуд колебаний тела (в частности, ИСЗ) в допустимом с практической точки зрения диапазоне. Поэтому особенно актуальным в задачах такого рода является анализ резонансных эффектов и вопрос об амплитудах колебаний тел в условиях возможных резонансов.

В работе [23] с использованием метода усреднения проанализированы дифференциальные уравнения возмущенных колебаний тела в нерезонансном случае и для всех резонансов гравитационного происхождения, включая резонансы (35). Построены полные наборы первых интегралов для усредненных дифференциальных уравнений в каждом из резонансных случаев. С помощью этих интегралов дана интерпретация решений соответствующих дифференциальных систем в амплитудно-фазовых плоскостях. Выявлено, что амплитуды резонансных колебаний ограничены. Этот вывод проверен численно путем компьютерных экспериментов, в которых на основе исходной нелинейной дифференциальной системы найдены верхние границы амплитуд колебаний тела для всех резонансных случаев.

3. От параметризации вращательного движения твердого тела к новым динамическим уравнениям. Уравнения динамики твердого тела являются математической базой для решения большого разнообразия прикладных задач из разных областей науки и техники. В зависимости от специфики этих задач, порой ярко проявляющейся в характере движения тел и целях выполняемых исследований, вначале применяются те или иные приближенные методы аналитических исследований, а затем, как правило, — методы компьютерного моделирования. При этом успех предпринимаемых аналитических исследований во многом зависит от того, насколько удачно выбраны переменные, используемые при построении математической модели задачи.

Методы компьютерного моделирования также чувствительны к выбору переменных, используемых при построении математической модели задачи. Например,

известны трудности использования традиционных углов Эйлера или различных вариантов «самолетных» углов для компьютерного моделирования вследствие того, что правые части дифференциальных систем в нормальной форме оказываются сложными трансцендентными функциями углов и сингулярными в области определения переменных, задающих ориентацию тела. Схема Эйлера — Пуассона не связана с сингулярностями в кинематических уравнениях, однако также является неудобной для компьютерного моделирования вследствие слишком высокого порядка соответствующих дифференциальных систем.

Одним из широко распространенных вариантов преодоления указанных трудностей является использование четырех параметров Родрига — Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, представляющих собой компоненты кватерниона и подчиненных одному условию нормировки $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$. Эти параметры не имеют точек вырождения и характеризуют наиболее естественный способ задания положения твердого тела с помощью плоского поворота. В силу своей наглядности и удобства использования как в аналитических исследованиях, так и в численных, параметры Родрига — Гамильтона широко применяются в прикладной теории гироскопов [24], в динамике искусственного спутника Земли (ИСЗ) [25] и в других областях механики [26].

При этом использование параметров Родрига — Гамильтона в динамике ИСЗ может стать еще более эффективным, если, учитывая специфику вращательного движения ИСЗ, опираться не на обычные уравнения Эйлера, замыкаемые кинематическими уравнениями в параметрах Родрига — Гамильтона, а на специально выведенные дифференциальные уравнения, учитывающие ротационный характер движения ИСЗ, т. е. наличие сравнительно большой угловой скорости ИСЗ, при которой кинетическая энергия вращательного движения ИСЗ намного больше работы главного момента \vec{M} внешних возмущающих сил, действующих на ИСЗ. Такие дифференциальные уравнения получены в работе [27]. При выводе этих уравнений используются две системы координат с началом в центре масс тела: кенигова система координат $CXYZ$ и система координат $CL_1L_2L_3$, ось L_3 которой направлена вдоль кинетического момента \vec{L} тела. Ориентация тела или, что то же, системы его главных центральных осей инерции $Cxyz$, относительно системы координат $CL_1L_2L_3$ задается с помощью параметров Родрига — Гамильтона $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Тогда матрица $\mathbf{A} = (A_{ij})$ ($i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}$) направляющих косинусов углов между этими осями имеет вид [26]

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2 - \lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_2^2 - \lambda_1^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_0\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) & \lambda_0^2 + \lambda_3^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 \end{pmatrix}.$$

Вводится абсолютная угловая скорость тела $\vec{\omega} = \vec{\omega}_e + \vec{\omega}_r$, где $\vec{\omega}_e$ — угловая скорость системы координат $CL_1L_2L_3$ относительно кениговой системы $CXYZ$, а $\vec{\omega}_r$ — угловая скорость тела относительно системы координат $CL_1L_2L_3$. Тогда теорема об изменении кинетического момента приводит к дифференциальным уравнениям:

$$\dot{L} = M_3, \quad \omega_{e2} = M_1/L, \quad \omega_{e1} = -M_2/L, \quad (36)$$

где $\omega_{e1}, \omega_{e2}, \omega_{e3}$ — проекции угловой скорости $\vec{\omega}_e$ системы координат $CL_1L_2L_3$ относительно кениговой системы координат $CXYZ$ на оси L_1, L_2, L_3 соответственно, а M_1, M_2, M_3 — проекции момента \vec{M} на оси L_1, L_2, L_3 соответственно.

Кинематические уравнения в параметрах Родрига — Гамильтона

$$\begin{aligned}
 2\dot{\lambda}_0 &= -L \left(\frac{A_{31}\lambda_1}{A} + \frac{A_{32}\lambda_2}{B} + \frac{A_{33}\lambda_3}{C} \right) + (\omega_{ex}\lambda_1 + \omega_{ey}\lambda_2 + \omega_{ez}\lambda_3), \\
 2\dot{\lambda}_1 &= L \left(\frac{A_{31}\lambda_0}{A} - \frac{A_{32}\lambda_3}{B} + \frac{A_{33}\lambda_2}{C} \right) - (\omega_{ex}\lambda_0 - \omega_{ey}\lambda_3 + \omega_{ez}\lambda_2), \\
 2\dot{\lambda}_2 &= L \left(\frac{A_{31}\lambda_3}{A} + \frac{A_{32}\lambda_0}{B} - \frac{A_{33}\lambda_1}{C} \right) - (\omega_{ex}\lambda_3 + \omega_{ey}\lambda_0 - \omega_{ez}\lambda_1), \\
 2\dot{\lambda}_3 &= L \left(-\frac{A_{31}\lambda_2}{A} + \frac{A_{32}\lambda_1}{B} + \frac{A_{33}\lambda_0}{C} \right) - (\omega_{ez}\lambda_0 + \omega_{ey}\lambda_1 - \omega_{ex}\lambda_2)
 \end{aligned} \tag{37}$$

совместно с динамическими уравнениями (36) образуют замкнутую дифференциальную систему. Эта система может принимать тот или иной конкретный вид в зависимости от того, какие переменные использовать для задания ориентации системы координат $CL_1L_2L_3$ относительно кинематической системы координат $CXYZ$. Если, следуя В. В. Белецкому [12], использовать для этой цели угловые переменные ρ и σ , то из (36) получаются известные динамические уравнения:

$$\dot{L} = M_3, \quad \dot{\rho} = M_1/L, \quad \dot{\sigma} = M_2/(L \sin \rho), \tag{38}$$

относительно «медленных» переменных L, ρ, σ , зависящие, однако, в общем случае, также и от «быстрых» переменных, определяющих тем или иным образом ориентацию главных центральных осей инерции тела $Cxyz$ относительно системы координат $CL_1L_2L_3$. Если в качестве «быстрых» переменных использовать углы Эйлера, то из (37) получаются уравнения

$$\begin{cases}
 \dot{\varphi} = L \cos \vartheta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{L \sin \vartheta}, \\
 \dot{\psi} = L \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{L} \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{M_2}{L} \operatorname{ctg} \rho, \\
 \dot{\vartheta} = L \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{M_2 \cos \psi - M_1 \sin \psi}{L},
 \end{cases} \tag{39}$$

образующие вместе с (38) известные уравнения Белецкого — Черноушко [28], удобные тем, что в условиях ротационного движения, т. е. при выполнении неравенства $|\vec{L}|/A_0 \gg |\vec{M}|/|\vec{L}|$, где A_0 — характерный момент инерции тела, в дифференциальной системе (38), (39) переменные L, ρ, σ изменяются медленно, а φ, ψ, ϑ — быстро, что позволяет применять к этой системе приближенные асимптотические методы исследования движения.

Очевидные недостатки уравнений (39), заключающиеся в наличии трансцендентных функций угловых переменных φ, ψ, ϑ и сингулярности при $\vartheta = 0$, не возникают, если пользоваться уравнениями (37) непосредственно в переменных Родри-

га — Гамильтона:

$$\begin{aligned}
 2\dot{\lambda}_0 &= -L \left(\frac{A_{31}\lambda_1}{A} + \frac{A_{32}\lambda_2}{B} + \frac{A_{33}\lambda_3}{C} \right) + \frac{M_1}{L}\lambda_2 - \frac{M_2}{L}(\lambda_1 - \lambda_3 \operatorname{ctg} \rho), \\
 2\dot{\lambda}_1 &= L \left(\frac{A_{31}\lambda_0}{A} - \frac{A_{32}\lambda_3}{B} + \frac{A_{33}\lambda_2}{C} \right) - \frac{M_1}{L}\lambda_3 + \frac{M_2}{L}(\lambda_0 + \lambda_2 \operatorname{ctg} \rho), \\
 2\dot{\lambda}_2 &= L \left(\frac{A_{31}\lambda_3}{A} + \frac{A_{32}\lambda_0}{B} - \frac{A_{33}\lambda_1}{C} \right) - \frac{M_1}{L}\lambda_0 - \frac{M_2}{L}(\lambda_3 + \lambda_1 \operatorname{ctg} \rho), \\
 2\dot{\lambda}_3 &= L \left(-\frac{A_{31}\lambda_2}{A} + \frac{A_{32}\lambda_1}{B} + \frac{A_{33}\lambda_0}{C} \right) + \frac{M_1}{L}\lambda_1 - \frac{M_2}{L}(\lambda_2 - \lambda_0 \operatorname{ctg} \rho).
 \end{aligned} \tag{40}$$

В уравнениях (40) остается еще сингулярность при $\rho = 0$, но и эта неприятность может быть преодолена. Для этого достаточно вместо модуля кинетического момента и двух углов, определяющих направление вектора \vec{L} , ввести другие три медленно изменяющиеся переменные — проекции L_X, L_Y, L_Z вектора \vec{L} на оси кениговой системы координат.

Действительно, если определить ориентацию тела, т.е. системы координат $Cxyz$, относительно системы координат $CXYZ$ с помощью матрицы $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\underline{\lambda}_0, \underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2, \underline{\lambda}_3)$ направляющих косинусов, выразив их, в свою очередь, через параметры Родрига — Гамильтона $\underline{\lambda}_i$ ($i = \overline{0, 3}$), то кинематические уравнения в параметрах $\underline{\lambda}_i$

$$\begin{aligned}
 2\dot{\underline{\lambda}}_0 &= -\underline{\lambda}_1 (A_{11}L_X + A_{21}L_Y + A_{31}L_Z) / A - \underline{\lambda}_2 (A_{12}L_X + A_{22}L_Y + A_{32}L_Z) / B - \\
 &\quad - \underline{\lambda}_3 (A_{13}L_X + A_{23}L_Y + A_{33}L_Z) / C, \\
 2\dot{\underline{\lambda}}_1 &= \underline{\lambda}_0 (A_{11}L_X + A_{21}L_Y + A_{31}L_Z) / A - \underline{\lambda}_3 (A_{12}L_X + A_{22}L_Y + A_{32}L_Z) / B + \\
 &\quad + \underline{\lambda}_2 (A_{13}L_X + A_{23}L_Y + A_{33}L_Z) / C, \\
 2\dot{\underline{\lambda}}_2 &= \underline{\lambda}_3 (A_{11}L_X + A_{21}L_Y + A_{31}L_Z) / A + \underline{\lambda}_0 (A_{12}L_X + A_{22}L_Y + A_{32}L_Z) / B - \\
 &\quad - \underline{\lambda}_1 (A_{13}L_X + A_{23}L_Y + A_{33}L_Z) / C, \\
 2\dot{\underline{\lambda}}_3 &= -\underline{\lambda}_2 (A_{11}L_X + A_{21}L_Y + A_{31}L_Z) / A + \underline{\lambda}_1 (A_{12}L_X + A_{22}L_Y + A_{32}L_Z) / B + \\
 &\quad + \underline{\lambda}_0 (A_{13}L_X + A_{23}L_Y + A_{33}L_Z) / C
 \end{aligned} \tag{41}$$

оказываются свободными от каких-либо сингулярностей или вырождений. Остается записать динамические уравнения в виде

$$(\dot{L}_X \ \dot{L}_Y \ \dot{L}_Z)^\top = \underline{\mathbf{A}} (M_x \ M_y \ M_z)^\top, \tag{42}$$

чтобы получить замкнутую дифференциальную систему, удобную для описания ротационного движения тела, не имеющую особенностей и не содержащую тригонометрических функций [27]. Система (41), (42) удобна и для численного моделирования на ЭВМ. Недостаток, связанный с избыточностью переменных для описания ротационного движения тела, легко преодолевается путем введения в систему дифференциальных уравнений дополнительных слагаемых, обеспечивающих асимптотическую устойчивость решения и автоматическую коррекцию нормы кватерниона [26].

Тем не менее избыточность переменных Родрига — Гамильтона естественным образом мотивирует к использованию тех или иных вариантов модифицированных переменных Родрига — Гамильтона, число которых минимально и совпадает с числом степеней свободы тела, находящегося в сферическом движении.

Первая широко известная публикация на эту тему [30] предлагает следующий вариант введения модифицированных переменных Родрига — Гамильтона s_1, s_2, s_3 , называемых далее для краткости s -параметрами:

$$s_i = \lambda_i / (1 - \lambda_0) \quad (i = 1, 2, 3). \quad (43)$$

Формулы (43) позволяют рассматривать s -параметры как результат стереографического проектирования четырехмерной сферы, представляющей множество кватернионов $\Lambda = \lambda_0 \vec{i}_0 + \lambda_1 \vec{i}_1 + \lambda_2 \vec{i}_2 + \lambda_3 \vec{i}_3$, подчиненных условию нормировки $\|\Lambda\| = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, на трехмерную гиперплоскость s_1, s_2, s_3 , ортогональную оси $O\lambda_0$. В течение последующего десятилетия s -параметры оставались еще малоизвестными, а область их использования ограничивалась преимущественно демонстрационными примерами описания либрационного движения твердого тела [31, 32]. В работе [31] s -параметры упоминаются как компоненты модифицированного вектора Родрига.

Отчасти отсутствие интереса к практическому использованию s -параметров могло быть спровоцировано содержащимся в обширном обзоре [31] утверждением о том, что, если угол поворота тела не ограничен, например, как в случае вращающегося космического аппарата или очень маневренного самолета, сингулярность или разрыв непрерывности модифицированного вектора Родрига является неизбежным («... in the case of a spinning spacecraft or a very agile aircraft, the singularity or the discontinuity of the modified Rodrigues vector is unavoidable»).

В действительности s -параметры имеют лишь одну (!) точку вырождения и в этом плане они не только не хуже, а намного лучше, чем любые широко используемые углы конечных поворотов, имеющие плоскости вырождения. Как известно, наличие хотя бы одной точки вырождения при использовании любых трех переменных для задания ориентации твердого тела гарантируется общей теоремой, доказанной в [8]. Однако из наличия такой точки вырождения еще не следует неизбежность попадания точки четырехмерной единичной сферы, изображающей ориентацию твердого тела, в полюс отображения, находящийся в точке пересечения гиперсферы $\|\Lambda\| = 1$ с осью $O\lambda_0$. Наоборот, попадание изображающей точки в полюс отображения является исключительной ситуацией, реализуемой лишь при специальном подборе параметров тела и начальных условий его движения.

Если же все-таки в процессе вычислений будет наблюдаться критический рост модуля $|\vec{s}|$ вектора s -параметров, то всегда можно будет переключиться с вектора \vec{s} на вектор $\vec{s}^* = -\vec{s}/(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)$, описывающий, как показано в [30], ту же самую ориентацию твердого тела.

С учетом вышеизложенных соображений в СПбГУ был выполнен анализ эффективности использования s -параметров для описания динамики ротационного движения твердого тела. Практическая важность этих исследований для космодинамики обусловлена тем, что во многих прикладных задачах приходится иметь дело с космическими аппаратами (КА), получившими значительную угловую скорость, например с целью создания искусственной силы тяжести на борту, или для стабилизации КА вращением, или в результате толчка, имевшего место вследствие срабатывания механизма отделения КА от последней ступени ракеты-носителя.

По аналогии с системой уравнений (36), (37) в работе [27] получены дифференциальные уравнения в s -параметрах. При этом динамические уравнения (36)

замыкаются кинематическими уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{pmatrix} = L\mathbf{B} \begin{pmatrix} A_{31}/A \\ A_{32}/B \\ A_{33}/C \end{pmatrix} - \mathbf{B}^\top \begin{pmatrix} \omega_{e1} \\ \omega_{e2} \\ \omega_{e3} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

в которых элементы матрицы \mathbf{A} теперь выражены через s -параметры:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{u} \begin{pmatrix} u - 8(s_2^2 + s_3^2) & 4(2s_1s_2 - s_3u_1) & 4(2s_1s_3 + s_2u_1) \\ 4(2s_1s_2 + s_3u_1) & u - 8(s_1^2 + s_3^2) & 4(2s_2s_3 - s_1u_1) \\ 4(2s_1s_3 - s_2u_1) & 4(2s_2s_3 + s_1u_1) & u - 8(s_1^2 + s_2^2) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

где $u = (|\vec{s}|^2 + 1)^2$, $|\vec{s}|^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$, $u_1 = |\vec{s}|^2 - 1$, а матрица \mathbf{B} такова:

$$\mathbf{B} = (B_{ij}) = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} s_1^2 - s_2^2 - s_3^2 + 1 & 2(s_1s_2 + s_3) & 2(s_1s_3 - s_2) \\ 2(s_1s_2 - s_3) & -s_1^2 + s_2^2 - s_3^2 + 1 & 2(s_2s_3 + s_1) \\ 2(s_1s_3 + s_2) & 2(s_2s_3 - s_1) & -s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 + 1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Далее, если, следуя [12], использовать «медленные» переменные L , ρ и σ для изучения эволюции ротационного движения тела, то из (36), как и ранее, получаем динамические уравнения (38), а из (44) — кинематические дифференциальные уравнения:

$$\begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{pmatrix} = L\mathbf{B} \begin{pmatrix} A_{31}/A \\ A_{32}/B \\ A_{33}/C \end{pmatrix} - \mathbf{B}^\top \begin{pmatrix} -M_2 \\ M_1 \\ M_2 \operatorname{ctg} \rho \end{pmatrix} L^{-1}. \quad (47)$$

Дифференциальная система (38), (47), в отличие от системы (38), (40), обладает минимальной размерностью. Содержащаяся в ней сингулярность при $\rho = 0$ может быть преодолена, как показано в [27], путем введения других «медленных» переменных, а именно проекций L_X, L_Y, L_Z вектора \vec{L} на оси кениговой системы координат вместо модуля L кинетического момента и двух углов ρ и σ , определяющих направление вектора \vec{L} . В качестве «быстрых» переменных при этом выступают s -параметры, определяющие ориентацию тела относительно системы координат $CXYZ$ с помощью матрицы $\underline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3)$. В результате выведены следующие кинематические уравнения в s -параметрах:

$$\begin{pmatrix} \dot{\underline{s}}_1 \\ \dot{\underline{s}}_2 \\ \dot{\underline{s}}_3 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} 1/A & 0 & 0 \\ 0 & 1/B & 0 \\ 0 & 0 & 1/C \end{pmatrix} \underline{\mathbf{A}}^\top \begin{pmatrix} L_X \\ L_Y \\ L_Z \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Система (42), (48) представляет собой замкнутую дифференциальную систему, удобную для описания ротационного движения тела. Эта система не имеет особенностей и не содержит тригонометрических функций и поэтому более предпочтительна, чем система (38), (47), для численного моделирования на ЭВМ.

В продолжение анализа эффективности использования s -параметров для описания динамики ротационного движения твердого тела в работе [27] проведен анализ структуры конфигурационного s -пространства уравновешенного твердого тела ($\vec{M} = \vec{0}$). Для этого построен первый интеграл

$$\begin{aligned} \frac{2T}{L^2} = \frac{1}{C} + \frac{64}{u^2} \left[\frac{(s_1^2 + s_2^2)^2}{C} + s_3^2 \left(\frac{s_1^2}{A} + \frac{s_2^2}{B} \right) + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (|\vec{s}|^2 - 1) s_1 s_2 s_3 \right] + \\ + \frac{16}{u^2} (|\vec{s}|^2 - 1)^2 \left(\frac{s_1^2}{B} + \frac{s_2^2}{A} \right) - \frac{16}{u} \frac{s_1^2 + s_2^2}{C}, \quad (49) \end{aligned}$$

имеющий место в условиях постоянства кинетической энергии T и вектора кинетического момента \vec{L} и задающий неявным образом поверхность в пространстве s -параметров. Анализ поверхности (49), представляющей собой конфигурационное s -пространство уравновешенного твердого тела, позволил установить, что при произвольном фиксированном значении параметра $2T/L^2$ эта поверхность представляет собой пару замкнутых ограниченных поверхностей (соответствующих двум эквивалентным наборам s -параметров: \vec{s} и \vec{s}^*), топологически эквивалентных тору. Следовательно, при вращении уравновешенного твердого тела абсолютные величины s -параметров ограничены. Неограниченный рост абсолютных величин s -параметров возможен только в случае, когда $2T/L^2 = 1/C$ и начальные значения s -параметров лежат на оси Cs_3 . Это неудобство, однако, легко преодолимо: достаточно сменить направления главных центральных осей инерции x и z или y и z на противоположные. При этом кинетическая энергия тела сохранит свое значение, а изображающая точка будет двигаться по окружности единичного радиуса с центром в точке C , лежащей в плоскости Cs_1s_2 . Такова практическая рекомендация, позволяющая избежать возможности неограниченного нарастания модуля s -вектора.

Для случая динамически симметричного твердого тела ($A = B \neq C$) в работе [27] произведено полное аналитическое исследование конфигурационного пространства. Установлено, что это пространство, определяемое соотношением

$$\frac{2T}{L^2} = \frac{1}{C} + \frac{16}{u^2}(s_1^2 + s_2^2) \left[\frac{(|s|^2 - 1)^2 + 4s_3^2}{A} + \frac{4(s_1^2 + s_2^2) - u}{C} \right],$$

представляет собой два правильных тора, вложенных один в другой. Каждый из торов можно запараметризовать углами α и β в виде

$$s_1 = \frac{\cos \beta}{\sin \theta_0}(1 + \cos \theta_0 \cos \alpha), \quad s_2 = \frac{\sin \beta}{\sin \theta_0}(1 + \cos \theta_0 \cos \alpha), \quad s_3 = \operatorname{ctg} \theta_0 \sin \alpha, \quad (50)$$

где $\alpha \in [-\pi; \pi]$, $\beta \in [0; 2\pi]$. Параметр $\theta_0 \in (0; \pi/2)$, определяемый соотношением

$$\sin^2 2\theta_0 = \frac{2T/L^2 - 1/C}{1/A - 1/C},$$

принимает два различных значения, лежащих в пределах от 0 до $\pi/2$ и определяющих форму торов (50). Найдены зависимости углов α и β от времени:

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \sqrt{\frac{1 + \cos \theta_0}{1 - \cos \theta_0}} \operatorname{tg} \left[\frac{L\kappa_1}{4}(t + t_0) \right] \right\}, \quad \beta = \beta_0 + \frac{L\kappa_2}{2}t. \quad (51)$$

Здесь

$$\kappa_1 = 2 \sin^2 \theta_0 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C} \right) + \frac{1}{C}, \quad \kappa_2 = 2 \left(\frac{\cos^2 \theta_0}{A} + \frac{\sin^2 \theta_0}{C} \right) - \frac{1}{C}.$$

Тем самым для динамически симметричного твердого тела выполнено аналитическое интегрирование уравнений ротационного движения тела в s -параметрах. Из формул (51) следует, что угол α изменяется во времени периодически с периодом $T_\alpha = 4\pi/(L\kappa_1)$. Угол β тоже изменяется периодически с периодом $T_\beta = 4\pi/(L\kappa_2)$, поскольку $\beta \in [0; 2\pi]$ и при достижении значения 2π угол β скачком переходит к значению 0.

В работе [29] доказано, что поскольку периоды T_α и T_β , вообще говоря, несоизмеримы, то траектория изображающей точки вращающегося твердого тела покрывает конфигурационное пространство всюду плотно. Дальнейшие исследования показали, что это свойство является важным в динамике ротационного движения тела. Оно позволяет упростить процедуру усреднения непрерывных на конфигурационном s -пространстве функций s -параметров, зависящих от ориентации тела (например, возмущающего момента \vec{M}), по невозмущенному движению Эйлера — Пуансо путем замены усреднения по времени на усреднение (с некоторым весом) по конфигурационному s -пространству. В качестве весовой функции усреднения выбирается относительное время пребывания изображающей точки в пределах элемента dS конфигурационного пространства, равное пределу $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{dT}{T}$, где T — время движения, а dT — суммарное время пребывания изображающей точки в пределах элемента dS за время T . В результате среднее значение некоторой функции $f(s_1, s_2, s_3)$ по невозмущенному движению Эйлера — Пуансо определяется выражением

$$\langle f \rangle_s = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{2\pi} f(s_1(\alpha, \beta), s_2(\alpha, \beta), s_3(\alpha, \beta)) \frac{\sin \theta_0 d\alpha d\beta}{4\pi^2(1 + \cos \theta_0 \cos \alpha)},$$

где s_1, s_2, s_3 — известные на основании (50) функции углов α и β . Таким образом, на базе установленных эргодических свойств конфигурационного s -пространства обосновано представление об s -параметрах как идеальных «быстрых» переменных и предложен практически удобный вариант модификации метода усреднения, предполагающий переход от усреднения по невозмущенному движению к усреднению по конфигурационному пространству. В [29] данный подход применен в задаче об эволюции ротационного движения заряженного твердого тела в геомагнитном поле при движении по околоземной орбите, регрессирующей вследствие полярного сжатия Земли.

Завершая рассмотрение вопроса об эффективности использования s -параметров для описания динамики ротационного движения твердого тела, отметим, что в [27] проведен анализ особенности s -параметризации. Как отмечалось выше, эта особенность представляет собой единственную точку. Однако попадание изображающей точки в полюс отображения в процессе движения является исключительной ситуацией, требующей особых начальных условий, причем множество этих начальных условий в пространстве s -параметров имеет нулевую меру. Действительно, существенные неприятности, связанные с большими значениями модуля s -вектора при данном выборе систем координат возможны лишь в том случае, когда кинетическая энергия близка к максимальному значению (в невозмущенном движении это соответствует $2T/L^2 = 1/C$), а начальные значения s -параметров близки к точкам, лежащим на оси Cs_3 . Однако указанное обстоятельство легко преодолимо. Достаточно систему s -параметров ввести так, чтобы ориентация, соответствующая полюсу отображения s -параметров, находилась по возможности дальше от начальной ориентации твердого тела. На практике это означает, что достаточно поменять обозначения главных центральных осей инерции тела. Следовательно, ротационное движение твердого тела, как близкое к невозмущенному, можно также описывать при помощи s -параметров, не опасаясь при этом, что изображающая точка может попасть в полюс.

Другим важным следствием установленной в [27] ограниченности конфигурационного пространства вращающегося твердого тела является снятие необходимости

использования предлагаемого в [30] переключения с одного набора s -параметров на другой, соответствующий той же самой ориентации тела, но лежащий внутри единичной сферы в пространстве s -параметров (соответственно \vec{s} и \vec{s}^*). Предложенное в [30] переключение было введено с целью предотвратить возможный неограниченный рост модуля s -вектора. Вместе с тем такое переключение может оказаться полезным, поскольку избавляет от необходимости заботиться о выборе полюса s -параметров.

В целом после публикации [27] были введены в широкий практический обиход предложенные в ней новые варианты математических моделей динамики твердого тела, построенные на базе трехмерных модифицированных параметров Родрига — Гамильтона (s -параметров).

Продолжение общетеоретических исследований, начатых в [27], содержится в работах [33] и [34]. В первой из них установлена возможность использования s -параметров как обобщенных переменных для построения лагранжева формализма в динамике твердого тела. Соответствующие дифференциальные уравнения движения построены в форме канонических уравнений Гамильтона. Для этого вначале получено следующее выражение кинетической энергии тела с тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$:

$$T = \frac{128}{u^2} (\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3) \mathbf{J} \mathbf{J} \mathbf{B}^\top (\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3)^\top. \quad (52)$$

Здесь матрица \mathbf{B} , как ранее, определяется формулой (46). Затем введены канонические переменные s_1, s_2, s_3 и соответствующие им обобщенные импульсы p_1, p_2, p_3 . В предположении, что тело находится под воздействием только потенциальных сил и моментов и потенциальная энергия Π не зависит от обобщенных скоростей $\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3$, найдены обобщенные импульсы $p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}_i}$, ($i = 1, 2, 3$) в виде

$$(p_1, p_2, p_3)^\top = \frac{256}{u^2} \mathbf{B} \mathbf{J} \mathbf{B}^\top (\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3)^\top.$$

Последнее равенство может быть разрешено относительно обобщенных скоростей

$$(\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3)^\top = \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^\top (p_1, p_2, p_3)^\top \quad (53)$$

и подставлено в (52). Тогда функция Гамильтона примет вид

$$H = (p_1, p_2, p_3) (\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3)^\top - T + \Pi = \frac{1}{2} (p_1, p_2, p_3) \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^\top (p_1, p_2, p_3)^\top + \Pi,$$

а уравнения (53) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}^\top \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \frac{\partial H}{\partial p_3} \right)^\top. \quad (54)$$

Совместно со второй группой канонических дифференциальных уравнений

$$(\dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3)^\top = - \left(\frac{\partial H}{\partial s_1}, \frac{\partial H}{\partial s_2}, \frac{\partial H}{\partial s_3} \right)^\top \quad (55)$$

они образуют замкнутую систему канонических дифференциальных уравнений, описывающих динамику вращательного движения твердого тела в s -параметрах.

В статье [34] выведена новая форма дифференциальных уравнений для описания ротационного движения твердого тела. В качестве вспомогательной системы координат вместо вышеупомянутой L_1, L_2, L_3 используется похожая по сути, но более наглядная система координат $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, ось ω_3 которой направлена вдоль угловой скорости тела. Модуль угловой скорости ω и два угла α, β , задающие направление вектора угловой скорости в инерциальной системе координат, образуют множество «медленных» переменных, определяющих угловую ориентацию вспомогательной системы координат относительно инерциальной. В качестве «быстрых» переменных используются три s -параметра, определяющих угловую ориентацию тела (или, что то же, системы главных центральных осей инерции $Cxyz$) относительно вспомогательной системы координат $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Соответствующая матрица направляющих косинусов $\mathbf{A} = (A_{ij})$ формально определяется тем же равенством (45), но смысл s -параметров в ней, естественно, другой. Выведенные в [34] динамические уравнения определяются равенствами

$$\begin{pmatrix} \omega \dot{\beta} \\ \omega \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} M_x/A \\ M_y/B \\ M_z/C \end{pmatrix} + \frac{\omega^2}{ABC} \begin{bmatrix} (A-B)(B-C)(A-C)A_{31}A_{32} \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} AC(A-C)A_{21}A_{31} + BC(B-C)A_{22}A_{32} \\ -AC(A-C)A_{11}A_{31} - BC(B-C)A_{12}A_{32} \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Совместно с кинематическими уравнениями

$$\begin{pmatrix} \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \\ \dot{s}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}^\top \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \sin \beta \\ -\dot{\beta} \\ \omega - \dot{\alpha} \cos \beta \end{pmatrix} \quad (57)$$

они образуют замкнутую дифференциальную систему (56), (57).

Проанализировано конфигурационное пространство твердого тела, находящегося под уравновешенным внешним воздействием ($\vec{M} = \vec{0}$). Для этого построен первый интеграл

$$\frac{16}{u^2}(2s_1s_3 - s_2u_1)^2(A^2 - AD) + \frac{16}{u^2}(2s_2s_3 + s_1u_1)^2(B^2 - BD) + \left(1 - \frac{8}{u}(s_1^2 + s_2^2)\right)^2(C^2 - CD) = 0, \quad (58)$$

где $D = L^2/(2T) = \text{const}$, имеющий место в условиях постоянства кинетической энергии T и вектора кинетического момента \vec{L} и задающий неявным образом поверхность в пространстве s -параметров. Эта поверхность представляет собой конфигурационное s -пространство уравновешенного твердого тела. Поскольку качественная зависимость интеграла (58) от переменных s_1, s_2, s_3 совпадает с аналогичной зависимостью в интеграле (49), то результаты анализа конфигурационного s -пространства уравновешенного твердого тела совпадают с изложенными выше. В случае динамически симметричного твердого тела ($A = B \neq C$) третье из уравнений (56) ожидается дает результат $\omega = \text{const}$, а первые два уравнения системы (56) принимают вид

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{pmatrix} = \frac{\omega(A-C)}{A} \begin{pmatrix} A_{21}A_{31} + A_{22}A_{32} \\ -A_{11}A_{31} - A_{12}A_{32} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Показано, что в этом случае конфигурационное пространство представляет собой правильный тор, а его параметризация дана в явном виде в [34].

Далее, на базе дифференциальных уравнений (56), (57) исследована эволюция ротационного движения твердого тела в среде с сопротивлением, создающим момент $\vec{M} = -h\vec{\omega}$, где $h > 0$. Построены траектории конца вектора $\vec{\omega}$ и траектории конца вектора \vec{s} , наглядно подтверждающие удобство использования переменных ω , α , β , s_1 , s_2 , s_3 для качественного и количественного анализа ротационного движения твердого тела.

4. Стационарные движения двух гравитирующих тел. В работах С. Н. Кирпичникова [35–37] рассмотрены общие вопросы устойчивости стационарных движений двух гравитирующих тел с различными инерционными характеристиками. Найдены множества всех стационарных относительных движений и исследована их орбитальная устойчивость в общем случае движения двух гравитирующих тел: осесимметричного и сферически симметричного. Задача изучается в общем виде: используется точное выражение для потенциала гравитационного взаимодействия и никаких предположений, кроме предположения о его осесимметричности, не делается. Существенную упрощающую роль при исследовании сыграл специальный выбор лагранжевых позиционных координат, отвечающих некоторой «полуподвижной» декартовой системе координат.

Относительное движение рассматриваемых тел, при котором центр сферически симметричного тела во все время движения неподвижен в каком-либо пространстве, жестко скрепленном с осью симметрии осесимметричного тела, названо стационарным. Доказана теорема о двух типах стационарных движений, которая позволила впервые описать множества всех возможных стационарных движений и дать классификацию этих движений, связанную с их характерными свойствами. При стационарных движениях осесимметричное тело совершает регулярную прецессию, а его центр масс описывает круговую орбиту, причем центр сферически симметричного тела у стационарных движений I типа, вообще говоря, не лежит в плоскости этой орбиты, а у стационарных движений II типа всегда является ее центром.

Найденные стационарные движения двух типов охватывают в качестве частных случаев все известные движения («спица», «стрела», «квазистрела», «поплавок» и др.), определенные ранее [12] при тех или иных предположениях для некоторых конкретных тел, как правило, простого вида. Отказ от общепринятых весьма частных моделей гравитационного поля осесимметричного тела привел к качественно новым выводам. Например, в отличие от известных результатов доказано, что движения «стрела» возможны и у несимметричных, а «квазистрела» — у симметричных относительно плоскости экватора осесимметричных тел.

Разработан новый метод исследования орбитальной устойчивости компланарных (ось симметрии осесимметричного тела и центр сферически симметричного движутся в одной неподвижной плоскости) стационарных движений, заключающийся в установлении связи между их устойчивостью в рамках компланарной и некомпланарной постановок задач. Определено, когда метод позволяет свести исследование устойчивости к анализу существенно более простых условий устойчивости компланарной задачи.

При исследовании орбитальной устойчивости стационарных движений большое внимание уделено качественным аспектам: определению числа и типов соответствующих точек либрации, их возможным бифуркациям, нахождению параметров, от-

вечающих переходам от устойчивости к неустойчивости, и т. д. Доказан ряд теорем об орбитальной устойчивости и неустойчивости стационарных движений в некомпланарной задаче. В качестве примера приведем лишь один результат: если масса сферически симметричного тела меньше определенного критического значения, то невозможна орбитальная устойчивость стационарных движений с минимумом эффективной потенциальной энергии. Изучена устойчивость стационарных движений, близких к «поплавку», как для симметричных относительно экваториальной плоскости осесимметричных тел, так и для несимметричных.

Исследованы компланарные стационарные движения. Доказаны теоремы, устанавливающие связь орбитальной устойчивости в рамках компланарной и некомпланарной постановок задач. Так, области орбитальной устойчивости и устойчивости в линейном приближении для неколлинеарных (центр сферически симметричного тела не лежит на оси симметрии осесимметричного) стационарных движений всегда сохраняются, а для коллинеарных — могут уменьшиться при переходе к некомпланарной постановке задачи.

Движение простых модельных тел определяется более простыми соотношениями, допускающими более глубокий анализ. Поэтому полученные результаты были проанализированы в случае аппроксимации поля тяготения осесимметричного тела полем тяготения нескольких материальных точек, среди которых могут быть точки с положительными и отрицательными массами, а также пары точек с комплексно сопряженными массами. Для случая аппроксимирующей гантели в рамках компланарной задачи изучены множества стационарных движений, их орбитальная устойчивость, влияние на нее сжатия и асимметрии гантели, возможные бифуркации, определены критические расстояния между телами, которым отвечает переход от устойчивости к неустойчивости и наоборот.

Опишем лишь один из результатов С. Н. Кирпичникова. Широко известна и используется на практике система пассивной гравитационной стабилизации вращательного движения круговых спутников планет в рамках обычной спутниковой модели. Учет конечности массы спутника в рамках поступательно-вращательного его движения приводит к качественно новому явлению: соответствующие стационарные движения становятся орбитально неустойчивыми, если расстояние между телами меньше определенного критического значения. При отношении массы осесимметричного тела к массе сферически симметричного тела порядка единицы это значение имеет порядок характерного размера осесимметричного тела. С ростом указанного отношения масс соответствующее критическое расстояние неограниченно увеличивается.

Поэтому выводы о возможных стационарных относительных движениях взаимно гравитирующих тел и их устойчивости имеют важные конкретные приложения в астрономии и космодинамике. Так, они обосновывают возможность длительного существования разного рода двойных космических объектов, например двойных астероидов, комет, звездных систем, систем «спутник-планета», и определяют устойчивые относительные конфигурации при стационарных движениях образующих их тел. Другая область практических приложений относится к космодинамике. При достаточно общих предположениях дан ответ на важный уже в практике современных космических исследований вопрос: на каких относительных орбитах космический аппарат (КА) может образовывать устойчивую двойную систему с астероидом или спутником планеты, в частности в каких точках КА может в течение длительного времени пассивно «зависать» над поверхностью астероида или спутника? Важно,

что расстояние между телами такого двойного объекта может иметь порядок линейных размеров самих тел, а их массы могут быть сравнимы, и хорошо развитые теории для классических спутниковых моделей здесь не применимы.

5. Управление ориентацией твердого тела. В конце рассмотренного в первой части обзора 250-летнего периода развития научных исследований в СПбГУ [1] в динамике твердого тела наметилась явная тенденция к переходу от изучения классических задач к изучению задач динамики управляемого движения твердого тела, а проблема управления ориентацией твердого тела стала одной из важнейших. Вызванное запросами практики и, в частности, необходимостью активного управления угловым движением летательных и космических аппаратов, это новое направление в динамике твердого тела потребовало для своего развития привлечения последних достижений из теории управления, теории устойчивости движения, теории нелинейных колебаний и других областей фундаментальной и прикладной математики. В то же время передовые достижения математики нашли широчайшее поле для своего применения в динамике управляемого движения твердого тела, что отражается в огромном количестве публикаций, число которых продолжает расти. Некоторые результаты этих двух взаимообогащающих тенденций рассматриваются в данном разделе.

В. И. Зубов рассмотрел задачу активного управления ориентацией твердого тела в общей нелинейной постановке [38–47]. Он предложил новые подходы к синтезу управляющих моментов, обеспечивающих стабилизацию заданных ориентаций тела. Кроме того, им проведено полное исследование качественного поведения решений соответствующих замкнутых систем управления.

Рассмотрим подход В. И. Зубова к задаче об одноосной стабилизации тела [46]. Пусть твердое тело вращается вокруг своего центра масс O с заданной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Обозначим через \mathbf{J} тензор инерции тела в главных центральных осях инерции тела $Oxyz$. Вращательное движение тела под действием управляющего момента \vec{M} описывается уравнениями Эйлера:

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = \vec{M}. \quad (60)$$

Пусть заданы единичные векторы \vec{s} и \vec{r} , причем вектор \vec{s} неподвижен в инерциальном пространстве, а вектор \vec{r} неподвижен в системе координат, жестко связанной с телом. Тогда вектор \vec{s} поворачивается относительно системы координат $Oxyz$ с угловой скоростью $-\vec{\omega}$. Следовательно,

$$\dot{\vec{s}} = -\vec{\omega} \times \vec{s}. \quad (61)$$

Для дифференциальной системы, состоящей из динамических уравнений Эйлера (60) и кинематических уравнений Пуассона (61), требуется построить управляющий момент \vec{M} , обеспечивающий одноосную стабилизацию тела: система (60), (61) должна допускать асимптотически устойчивое положение равновесия

$$\vec{\omega} = 0, \quad \vec{s} = \vec{r}. \quad (62)$$

В. И. Зубов предложил выбирать управляющий момент в виде

$$\vec{M} = -\vec{\omega} + k\vec{r} \times \vec{s}, \quad (63)$$

где $k = \text{const} > 0$. Следует отметить, что при таком управлении система (60), (61) наряду с (62) имеет также положение равновесия

$$\vec{\omega} = 0, \quad \vec{s} = -\vec{r}. \quad (64)$$

С помощью функции Ляпунова

$$V = \frac{1}{2}(\vec{\omega}^\top \mathbf{J} \vec{\omega} + k \|\vec{s} - \vec{r}\|^2) \quad (65)$$

доказана следующая теорема [46].

Теорема 1. Пусть управляющий момент определяется формулой (63). Тогда положение равновесия (62) асимптотически устойчиво, а положение равновесия (64) неустойчиво. Кроме того, любое движение замкнутой системы, отличное от положения равновесия (64), при соответствующем выборе коэффициента k обладает свойством $\vec{\omega} \rightarrow \vec{0}$, $\vec{r} \rightarrow \vec{s}$ при $t \rightarrow \infty$.

В. И. Зубов рассматривал также задачу сканирования оси тела по заданной программе [44, 46]. Предполагалось, что единичный вектор $\vec{s}_0(t)$ вращается в инерциальном пространстве с заданной угловой скоростью $\vec{\omega}_0(t)$. Управляющий момент должен обеспечивать выполнение условий $\vec{\omega}(t) \rightarrow \vec{\omega}_0(t)$, $\vec{r}(t) \rightarrow \vec{s}_0(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Доказано, что искомое управление можно выбрать в виде [44, 46]

$$\vec{M} = \vec{\omega}_0(t) - \vec{\omega} + \mathbf{J} \dot{\vec{\omega}}_0(t) + \vec{\omega}_0(t) \times \mathbf{J} \vec{\omega} + k \vec{r} \times \vec{s}_0(t), \quad k = \text{const} > 0.$$

Аналогичные подходы были развиты для задачи трехосной стабилизации твердого тела [40, 43, 44].

5.1. Строгие функции Ляпунова в динамике твердого тела. Результаты В. И. Зубова по управлению ориентацией твердого тела основаны на построении слабых функций Ляпунова. Производные этих функций в силу изучаемых систем только неотрицательны. Известно, что такие функции Ляпунова плохо подходят для анализа робастности, так как их отрицательные полуопределенные производные вдоль траекторий могут становиться положительными при сколь угодно малых возмущениях динамических уравнений. Это обстоятельство мотивировало развитие методов построения строгих функций Ляпунова, т. е. функций с отрицательно определенными производными. Е. Я. Смирнов предложил способ преобразования слабых функций Ляпунова, построенных В. И. Зубовым, в строгие [48].

Например, в задаче об одноосной стабилизации твердого тела он предложил модификацию функции Ляпунова (65)

$$V_1 = \frac{1}{2}(\vec{\omega}^\top \mathbf{J} \vec{\omega} + k \|\vec{s} - \vec{r}\|^2) - \gamma \vec{\omega}^\top \mathbf{J} \mathbf{P}(\vec{r} \times \vec{s}), \quad (66)$$

где γ — положительный параметр; \mathbf{P} — постоянная матрица. Доказано, что если матрица $(\mathbf{P}^\top + \mathbf{P})$ — положительно определенная, то для сравнительно малых значений γ производная функции V_1 в силу системы (60), (61), (63) является отрицательно определенной относительно переменных $\vec{\omega}$ и $\vec{r} - \vec{s}$.

На базе подхода, разработанного Е. Я. Смирновым, в работах его научной группы [48–50] был получен ряд новых результатов. В частности, разработаны методы

робастного управления угловым движением твердого тела для случаев, когда тензор инерции тела и моменты, действующие на тело, заданы с некоторой погрешностью [50].

Строгие функции Ляпунова строились также в работах А. Ю. Александрова и А. А. Тихонова [51–55] для решения задач об одноосной и трехосной стабилизации твердого тела. В работе [51] эти задачи рассмотрены для тела с изменяющимися во времени моментами инерции и найдены достаточные условия асимптотической устойчивости заданных ориентаций. Наряду с применением специальных конструкций строгих функций Ляпунова использовался метод дифференциальных неравенств. В работах [52, 54] с помощью метода сравнения для функций Ляпунова проанализирована стабилизация твердого тела по части переменных. Получены достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости программных движений твердого тела по части переменных. Подход Е. Я. Смирнова к построению строгих функций Ляпунова [48] можно использовать только для случая линейного восстанавливающего момента. Поэтому в работе [55], посвященной использованию линейных и нелинейных управлений в задаче о стабилизации тела в условиях воздействия нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями, предложена другая конструкция строгой функции Ляпунова.

5.2. Эволюционирующее нелинейное управление. В работах [51, 52, 54, 56–58] выполнен ряд исследований, развивающих задачу реактивного управления угловым положением твердого тела в направлении использования восстанавливающего и диссипативного моментов, зависящих явным образом не только от фазовых переменных, но и от времени. Постановка вопроса о возможности реализации таких систем управления, в которых восстанавливающая или диссипативная составляющая управляющего момента стремится к нулю с течением времени, является важной и закономерной в связи с ограниченностью ресурсов реактивных систем управления. С математической точки зрения варианты исчезающего с течением времени управления известны и общепризнаны в мировой науке [59, 60] как наиболее сложные в проблеме анализа устойчивости механических систем с нестационарным параметром. Рассмотрены варианты линейного и существенно нелинейного управления. С помощью прямого метода Ляпунова и метода сравнения получены условия, при которых можно гарантировать устойчивость заданных положений равновесия тела, несмотря на эволюцию управляющих моментов.

В работах [56, 57] рассматривается задача о трехосной стабилизации тела, с которым неизменно связаны орты $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, в базисной системе координат с ортами $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$, принимаемой за инерциальную. Для дифференциальной системы, состоящей из динамических уравнений Эйлера (60) и кинематических уравнений Пуассона

$$\dot{\vec{s}}_i = -\vec{\omega} \times \vec{s}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (67)$$

решается задача обеспечения асимптотической устойчивости положения равновесия

$$\vec{\omega} = \vec{0}, \quad \vec{s}_i = \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (68)$$

с помощью суперпозиции восстанавливающего момента $\vec{M}_r = -a_1 \vec{s}_1 \times \vec{r}_1 - a_2 \vec{s}_2 \times \vec{r}_2$ и эволюционирующего со временем диссипативного момента $\vec{M}_d = -h(t) \text{grad} W(\vec{\omega})$, где $W(\vec{\omega})$ — непрерывно дифференцируемая при $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ положительно определенная однородная порядка $\mu + 1$ функция, $\mu \geq 1$. Таким образом, уравнения (60)

принимают вид

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = -h(t)\text{grad}W(\vec{\omega}) - a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 - a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2,$$

где $h(t)$ — положительная и непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$ функция. В работе [56] предполагается, что $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Доказана лемма об оценке снизу нормы восстанавливающего момента в окрестности стабилизируемого движения твердого тела, а также две теоремы об асимптотической устойчивости стабилизируемого движения тела. Первая из них относится к случаю линейного диссипативного момента. В этом случае функция $W(\vec{\omega})$ представляет собой квадратичную форму $W(\vec{\omega}) = \vec{\omega}^T \mathbf{D}\vec{\omega}$ с постоянной симметричной положительно определенной матрицей \mathbf{D} , а уравнения (60) имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = -2h(t)\mathbf{D}\vec{\omega} - a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 - a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2.$$

Теорема 2. Пусть $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Если существует число $\nu \geq 1$ такое, что $|\dot{h}(t)| \leq Lh^{\frac{3-\nu}{2}}(t)$ при $t \geq 0$, $L = \text{const} > 0$ и $\int_0^t h^\nu(\tau)d\tau \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то положение равновесия (68) системы (60), (67) асимптотически устойчиво.

Следствием из теоремы 2 является асимптотическая устойчивость положения равновесия (68) системы (60), (67), если $h(t) = (t+1)^{-\beta}$ и $\beta \leq 1$. Доказано также, что неравенство $\beta \leq 1$ представляет собой не только достаточное, но и необходимое условие асимптотической устойчивости положения равновесия.

Следующая теорема, доказанная в [56], относится к модели управления с существенно нелинейным диссипативным моментом, в котором $W(\vec{\omega})$ — непрерывно дифференцируемая при $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ положительно определенная однородная порядка $\mu + 1$ функция, причем $\mu > 1$.

Теорема 3. Пусть $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Если существует число $\nu \geq 1$ такое, что $|\dot{h}(t)| \leq Lh^{1+\frac{1-\nu}{\mu+1}}(t)$ при $t \geq 0$, $L = \text{const} > 0$ и $\int_0^t h^\nu(\tau)d\tau \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то положение равновесия (68) системы (60), (67) асимптотически устойчиво.

Сформулированное выше следствие из теоремы 2 остается в силе при управлении с существенно нелинейным диссипативным моментом. Этот факт указывает на то, что найденные в теоремах 2 и 3 достаточные условия асимптотической устойчивости близки к необходимым. Таким образом, получены критерии, позволяющие гарантированно решать задачу угловой стабилизации тела в условиях экономии ресурсов реактивных систем управления.

В работе [57] рассматривается в некотором смысле противоположная по отношению к [56] задача о трехосной стабилизации тела. Предполагается, что $h(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Доказаны две теоремы об асимптотической устойчивости.

В работах [52, 61] решена задача об одноосной стабилизации твердого тела в положении равновесия (62) с помощью суперпозиции эволюционирующего со временем восстанавливающего момента и не зависящего явно от t линейного [61] или нелинейного [52] относительно угловой скорости диссипативного момента. В случае линейного диссипативного момента динамические уравнения (60) управляемого движения тела имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = -\mathbf{D}\vec{\omega} - ah(t)\|\vec{s} - \vec{r}\|^{\mu-1}\vec{s} \times \vec{r}, \quad (69)$$

где \mathbf{D} — постоянная симметричная положительно определенная матрица; $h(t)$ — положительная и непрерывная при $t \geq 0$ функция, $a > 0$, $\mu \geq 1$. С помощью метода декомпозиции доказана теорема.

Теорема 4. Пусть $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Если $\int_0^t h(\tau) d\tau \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то положение равновесия (62) системы (69), (61) асимптотически устойчиво.

Следствием из теоремы 4 является устойчивость положения равновесия (62) системы (69), (61), если $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

В работе [52] та же задача об одноосной стабилизации решена при нелинейном относительно угловой скорости диссипативном моменте в уравнениях движения:

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = -\text{grad}W(\vec{\omega}) - ah(t)\|\vec{s} - \vec{r}\|^{\mu-1}\vec{s} \times \vec{r}.$$

Рассмотрены два подхода к построению функции Ляпунова. На основании первого из них с учетом обозначения $\varphi(t) = \max\{0; \dot{h}(t)/h(t)\}$ сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 5. Если существует постоянная $L > 0$, такая что $\int_0^t \varphi(\tau) d\tau \leq L$ для $t \geq 0$, то положение равновесия (62) системы (69), (61) устойчиво по отношению к $\vec{\omega}$.

Доказана также теорема об асимптотической устойчивости положения равновесия по отношению к $\vec{\omega}$.

Другой подход к построению функции Ляпунова позволил найти достаточные условия асимптотической устойчивости не только по отношению к $\vec{\omega}$, но и по отношению к \vec{s} . С использованием метода дифференциальных неравенств для функций Ляпунова доказана следующая теорема.

Теорема 6. Если $\dot{h}(t) \leq 0$ для $t \geq 0$ и существуют положительные числа θ и L такие, что $|\dot{h}(t)| \leq Lh^{1-\frac{\theta}{\nu+1}}(t)$ для $t \geq 0$, $h^{\frac{\mu\nu-1}{\mu+1}}(t) \int_0^t h^{\theta+\frac{\nu+1}{\mu+1}}(\tau) d\tau \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то положение равновесия (62) системы (69), (61) асимптотически устойчиво.

Проблема трехосной стабилизации углового положения твердого тела с использованием эволюционирующих во времени нелинейных восстанавливающих моментов изучалась в работах [54, 58]. Анализировалась возможность построения системы управления, в которой восстанавливающий момент стремится к нулю с течением времени, и остается единственный управляющий момент — диссипативный (линейный или нелинейный), не зависящий явно от времени. Рассматривались случаи линейного и существенно нелинейного восстанавливающих моментов. С помощью прямого метода Ляпунова и метода сравнения получены условия, при которых можно гарантировать устойчивость или асимптотическую устойчивость равновесного положения тела, несмотря на исчезновение восстанавливающего момента.

В работе [54] применяется метод сравнения и метод декомпозиции в варианте, разработанном в [62, 63]. Сначала рассмотрен вариант линейного восстанавливающего момента. Управляемое движение тела в этом случае описывается уравнениями:

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = \mathbf{D}\vec{\omega} - h(t)(a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 + a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2), \quad (70)$$

где \mathbf{D} — постоянная симметричная отрицательно определенная матрица. Вводится в рассмотрение функция $\psi(t) = \max \left\{ 2\lambda^*, \dot{h}(t)/h(t) \right\}$, где λ^* — наибольшее собственное значение матрицы $\mathbf{J}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{D}\mathbf{J}^{-\frac{1}{2}}$. Доказаны следующие две теоремы.

Теорема 7. Пусть функция $h(t)$ положительна и непрерывна для $t \in [0, +\infty)$ и $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Если существует постоянная $L > 0$ такая, что $\int_0^t \psi(\tau) d\tau \leq L$ при $t \geq 0$, то положение равновесия (68) системы (70), (67) устойчиво по отношению к $\vec{\omega}$.

Теорема 8. Пусть функция $h(t)$ положительна и непрерывна для $t \in [0, +\infty)$ и $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Если $\int_0^t \psi(\tau) d\tau \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, то положение равновесия (68) системы (70), (67) асимптотически устойчиво по всем переменным.

Затем рассмотрено управляемое движение тела с нелинейным восстанавливающим моментом:

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = \mathbf{D}\vec{\omega} - h(t)\eta^\nu(\vec{s}_1, \vec{s}_2)(a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 + a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2), \quad (71)$$

где $\eta(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = (a_1\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + a_2\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2)/2$ и $\nu > 0$. Доказаны две теоремы — одна об устойчивости по отношению к $\vec{\omega}$, а другая — об асимптотической устойчивости по всем переменным.

В работе [58], в отличие от [54], рассмотрено управление с нелинейным демпфированием:

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = -\text{grad}W(\vec{\omega}) - h(t)\eta^\lambda(\vec{s}_1, \vec{s}_2)(a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 + a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2), \quad (72)$$

где функция $h(t)$ положительна и непрерывно дифференцируема для $t \in [0, +\infty)$ и $h(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Применены развитые в [52] подходы к построению функций Ляпунова. Доказано, что если $\mu = 2\lambda + 1$, то при выполнении условий теоремы 6 положение равновесия (62) системы (72), (61) асимптотически устойчиво по всем переменным.

5.3. Развитие приема усреднения для задач динамики твердого тела. При построении математической модели, описывающей динамику твердого тела, мы неизбежно ограничиваемся учетом основных действующих сил и моментов, относя все остальные к категории возмущающих. В ряде случаев структура возмущающих моментов известна и их влияние можно учесть с помощью методов теории возмущений, которые эффективны для широкого круга динамических задач. В частности, они широко и успешно используются в задачах динамики искусственных и естественных небесных тел [21], о чем упоминалось выше в разделе 1. В этом случае наибольшая трудность может возникнуть из-за изменяющихся во времени возмущений. Мощным инструментом анализа устойчивости нестационарных систем является прием усреднения, позволяющий свести исследование устойчивости нестационарных систем к исследованию соответствующих стационарных усредненных систем с вытекающими из этого существенными упрощениями. Однако применение приема усреднения хорошо развито лишь для случая, когда рассматриваемые системы являются быстро изменяющимися во времени. В этом случае техника усреднения широко применяется в различных задачах динамики и управления [21, 29].

В работах [64, 65] предложен оригинальный подход к построению функций Ляпунова и на его основе найдены новые условия устойчивости нелинейных нестационарных систем. По сравнению с известными условиями устойчивости, полученными

с помощью различных методов, использующих усреднение, принципиальная новизна результатов [64, 65] заключается в том, что для обеспечения асимптотической устойчивости рассматриваемых систем на правые части дифференциальных уравнений не накладывается требование быстрого изменения во времени.

В работе [53] исследуются динамика и управление угловым положением твердого тела, находящегося под воздействием нестационарного возмущающего момента. Никаких ограничений на скорость изменения во времени возмущающего момента не налагается. Исследуется задача одноосной стабилизации твердого тела. Управляющий момент состоит из линейной диссипативной составляющей и нелинейной восстанавливающей составляющей. Возмущающий момент \widetilde{M} представлен в виде линейных комбинаций однородных функций с изменяющимися во времени коэффициентами: $\widetilde{M} = \Phi(t)\widetilde{Q}(\vec{s} - \vec{r})$. Здесь $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{3 \times k}$ — непрерывная и ограниченная для $t \geq 0$ матрица, а компоненты вектора $\widetilde{Q}(\vec{u}) \in \mathbb{R}^k$ — непрерывно дифференцируемые для $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ однородные функции порядка μ . Предполагается также, что

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Phi(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow +\infty \quad (73)$$

равномерно по $t \geq 0$.

Последнее условие выполняется для периодических, квазипериодических и почти периодических функций с нулевыми средними значениями. Важно отметить, что на величины амплитуд этих возмущений никаких ограничений не накладывается. Возмущающие моменты такого типа часто встречаются в математических моделях углового движения ИСЗ, взаимодействующих с геофизическими полями [66].

Тогда дифференциальные уравнения вращательного движения тела имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = h\mathbf{D}\vec{\omega} - a\|\vec{s} - \vec{r}\|^{\mu-1}\vec{s} \times \vec{r} + \Phi(t)\widetilde{Q}(\vec{s} - \vec{r}). \quad (74)$$

Здесь $h > 0$, $\mu \geq 1$, $a > 0$, \mathbf{D} — постоянная симметричная отрицательно определенная матрица. Таким образом, предполагается, что порядки однородности возмущающего и восстанавливающего моментов совпадают, а коэффициенты восстанавливающего момента имеют нулевые средние значения.

В случае $\mu = 1$, соответствующем линейным восстанавливающему и возмущающему моментам, $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ и система (74) упрощается:

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = h\mathbf{D}\vec{\omega} - a\vec{s} \times \vec{r} + \Phi(t)(\vec{s} - \vec{r}). \quad (75)$$

С использованием метода функций Ляпунова на базе подходов, развитых в работах [62, 64, 67], доказана следующая теорема, утверждающая, что дестабилизирующее влияние нестационарного возмущения можно компенсировать выбором достаточно большого множителя при диссипативном моменте.

Теорема 9. *Существует число $h_0 > 0$ такое, что положение равновесия (62) системы (75), (61) асимптотически устойчиво для всех $h \geq h_0$.*

Кроме того, доказано, что при существенно нелинейном восстанавливающем моменте ($\mu > 1$) не нужно подбирать параметр $h > 0$ достаточно большим для стабилизации положения равновесия (62): его асимптотическая устойчивость гарантируется при любом $h > 0$.

В работе [68] рассматривается более широкий по сравнению с [53] класс нестационарных возмущений, для которых неприменимы подходы, использовавшиеся в [53]. При этом получены условия, гарантирующие решение задачи одноосной стабилизации для более широкого класса нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями, т. е.

$$\frac{1}{T} \int_0^T \Phi(\tau) d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad T \rightarrow +\infty. \quad (76)$$

Во-первых, не требуется, чтобы предельное соотношение (73) выполнялось равномерно при $t \geq 0$ и, во-вторых, порядок однородности σ возмущений может не только совпадать с порядком однородности μ восстанавливающего момента, но и быть меньше его. Заметим, что если $\sigma > \mu$, то асимптотическую устойчивость положения равновесия (62) системы (74), (61) гарантируют известные результаты об устойчивости по линейному и нелинейному приближениям [48, 69]. Доказана следующая теорема.

Теорема 10. Пусть $\mu > 1$ и существует число $\beta \in (0, 1]$ такое, что $\frac{1}{T^\beta} \int_0^T \Phi(\tau) d\tau \rightarrow 0$ при $T \rightarrow +\infty$. Тогда, если $2\sigma \geq \mu + 1 + \beta(\mu - 1)$, то положение равновесия (62) системы (74), (61) асимптотически устойчиво.

В качестве следствия из теоремы 10 вытекает, что если $\mu > 1$ и выполнено условие (76), то для асимптотической устойчивости положение равновесия (62) системы (74), (61) достаточно выполнения неравенства $\sigma \geq \mu$. Это следствие обобщает результат работы [53] на более широкий класс нестационарных возмущений. Однако, в отличие от [53], где установлена равномерная асимптотическая устойчивость положения равновесия, теорема 10 не позволяет сделать вывод о том, что асимптотическая устойчивость будет равномерной.

Практическая значимость теорем, доказанных в [53, 68], будет рассмотрена в одной из следующих частей обзора. Здесь же продолжим анализ общетеоретических результатов, являющихся развитием исследований, выполненных в [53, 68], но относящихся к другой задаче — задаче о трехосной стабилизации твердого тела в условиях воздействия нестационарных возмущений, рассмотренной в [55, 70].

В работе [70] динамические уравнения имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = \mathbf{D}\vec{\omega} - c\eta^\nu (\vec{s}_1, \vec{s}_2)(a_1 \vec{s}_1 \times \vec{r}_1 + a_2 \vec{s}_2 \times \vec{r}_2) + \Phi(t)\vec{Q}(\vec{s}_1 - \vec{r}_1, \vec{s}_2 - \vec{r}_2), \quad (77)$$

где сохраняется смысл обозначений, использованных ранее в уравнении (71); c — положительная постоянная; матрица $\Phi(t)$ — непрерывная, ограниченная и удовлетворяет условию (76); компоненты вектора \vec{Q} — непрерывно дифференцируемые однородные функции порядка $2\nu + 1$. Известно, что если восстанавливающий и возмущающий моменты линейны ($\nu = 0$), то возмущения рассматриваемого типа могут разрушить устойчивость положения равновесия. В работе [53] показано, что если порядок неоднородности рассматриваемой системы больше, чем 1, то нестационарные возмущения с нулевыми средними значениями не разрушают асимптотическую устойчивость. Однако в работе [53] при рассмотрении похожей задачи на функцию $\Phi(t)$ накладывалось более жесткое ограничение (73). Поэтому результаты работы [53] в данной задаче неприменимы и используются другие подходы, основанные на методе декомпозиции, принципе сравнения и технике усреднения. Доказана теорема.

Теорема 11. Если $\nu > 0$, то положение равновесия (68) системы (77), (67) асимптотически устойчиво.

В работе [55] рассматривается та же задача, что и в [70], но с другими предположениями относительно возмущающих и управляющих моментов. Вначале рассматривается случай линейного восстанавливающего момента ($\nu = 0$) и линейного возмущающего момента $\vec{M}_p = \Phi_1(t)(\vec{s}_1 - \vec{r}_1) + \Phi_2(t)(\vec{s}_2 - \vec{r}_2)$, где $\Phi_1(t), \Phi_2(t) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — непрерывные и ограниченные при $t \in [0, +\infty)$ матрицы. Динамические уравнения имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = h\mathbf{D}\vec{\omega} - a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 - a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2 + \Phi_1(t)(\vec{s}_1 - \vec{r}_1) + \Phi_2(t)(\vec{s}_2 - \vec{r}_2), \quad (78)$$

где h — положительный параметр. Доказана теорема.

Теорема 12. Пусть матрицы $\int_0^t \Phi_i(\tau) d\tau$ ($i = 1, 2$) ограничены для $t \geq 0$. Тогда существует число h_0 такое, что положение равновесия (68) системы (78), (67) равномерно асимптотически устойчиво при любом $h \geq h_0$.

Следует заметить, что условие ограниченности матриц $\int_0^t \Phi_i(\tau) d\tau$ ($i = 1, 2$) выполняется, например, если элементы этих матриц являются периодическими с нулевыми средними значениями. Для более широкого класса возмущений доказана следующая теорема.

Теорема 13. Пусть матрицы $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ удовлетворяют условиям (73). Тогда существует число h_0 такое, что положение равновесия (68) системы (78), (67) равномерно асимптотически устойчиво при любом $h \geq h_0$.

Заметим, что условия (73) выполняются для матриц $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$, если их элементы являются почти периодическими с нулевыми средними значениями.

Далее рассматриваются уравнения (77) с существенно нелинейным восстанавливающим моментом ($\nu > 0$) и нелинейным возмущающим моментом того же порядка однородности. Установлено, что в этой ситуации асимптотическая устойчивость положения равновесия (68) может быть гарантирована при менее обременительных условиях, чем в рассмотренном выше линейном случае. Доказана теорема.

Теорема 14. Пусть матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет условию (73). Тогда положение равновесия (68) системы (78), (67) равномерно асимптотически устойчиво при любом $h \geq 0$.

5.4. Управление с распределенным запаздыванием. В серии статей А. Ю. Александрова и А. А. Тихонова [71–74] изучаются задачи одноосной и трехосной стабилизации твердого тела при наличии распределенного запаздывания в системе управления.

В [71] рассматривается линейная механическая система с большим параметром при векторе скоростных сил и распределенным запаздыванием в позиционных силах. С помощью метода декомпозиции получены условия, при выполнении которых задача анализа устойчивости исходной системы дифференциальных уравнений второго порядка может быть сведена к исследованию устойчивости двух вспомогательных подсистем первого порядка. При этом одна из вспомогательных подсистем не содержит запаздывания, а для второй подсистемы, содержащей распределенное запаздывание, условия устойчивости формулируются в терминах разрешимости

систем линейных матричных неравенств. Для обоснования указанной декомпозиции используется прямой метод Ляпунова. Предложены специальные конструкции функционалов Ляпунова — Красовского. Разработанный подход применяется в задаче (60), (61) об одноосной стабилизации твердого тела в положении (62). Уравнения Эйлера имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = -h\mathbf{D}\vec{\omega} - a\vec{s}(t) \times \vec{r} + b \int_{t-\tau}^t \vec{s}(\xi) \times \vec{r} d\xi, \quad (79)$$

где \mathbf{D} — постоянная положительно определенная матрица; $h > 0$, $a > 0$, $b = \text{const} \neq 0$; τ — постоянное положительное запаздывание. Доказана теорема.

Теорема 15. *Если выполнено неравенство $a > \tau|b|$, то существует число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \geq h_0$ положение равновесия (62) системы (60), (61) асимптотически устойчиво.*

В работе [72] также решается задача об одноосной стабилизации твердого тела. При этом, в отличие от [71], используется управление по типу ПИД-регулятора, но с существенно нелинейной восстанавливающей компонентой и с распределенным запаздыванием (интегральный член) в отличие от классического ПИД-регулятора. Уравнения (60) управляемого движения тела имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = -\mathbf{D}\vec{\omega} - a\|\vec{s}(t) - \vec{r}\|^{\mu-1}\vec{s}(t) \times \vec{r} + b \int_{t-\tau}^t \|\vec{s}(\xi) - \vec{r}\|^{\mu-1}\vec{s}(\xi) \times \vec{r} d\xi, \quad (80)$$

где $\mu \geq 1$. Будем считать, что начальные функции $\chi(\xi)$ для системы (61), (80) принадлежат пространству $C([- \tau, 0], \mathbb{R}^6)$ непрерывных функций с равномерной нормой $\|\chi\|_\tau = \max_{\xi \in [- \tau, 0]} \|\chi(\xi)\|$. Относительно условий асимптотической устойчивости положения равновесия (62) системы (61), (80) доказана следующая теорема.

Теорема 16. *Пусть $\mu > 0$. Тогда при выполнении неравенства $a > \tau b$ положение равновесия (62) системы (60), (61) асимптотически устойчиво.*

Сравнение теорем 15 и 16 показывает, что при использовании управления по типу ПИД-регулятора, но с существенно нелинейной восстанавливающей компонентой и с распределенным запаздыванием одноосная стабилизация тела может быть обеспечена при менее жестких ограничениях на параметры системы. В частности, ослабление требований к величине диссипативного момента (не требуется наличия большого параметра в качестве множителя при диссипативном моменте) играет важную роль в задачах угловой стабилизации ИСЗ, поскольку создание диссипативных моментов в космических условиях представляет непростую задачу. Кроме того, в отличие от линейного случая [71], из теоремы 16 следует, что при использовании существенно нелинейного управляющего момента одноосную стабилизацию тела можно гарантировать при $a = 0$, $b < 0$, т. е. когда на тело не действует восстанавливающий момент.

В работах [73, 74] решается задача (60), (67) о трехосной стабилизации твердого тела в положении равновесия (68) с использованием управления, построенного по типу ПИД-регулятора, но с распределенным запаздыванием (интегральный член). Уравнения (60) управляемого движения тела имеют вид [73]

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = -h\mathbf{D}\vec{\omega} - a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 - a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2 + b \int_{t-\tau}^t (a_1\vec{s}_1(\xi) \times \vec{r}_1 + a_2\vec{s}_2(\xi) \times \vec{r}_2) d\xi, \quad (81)$$

где $b = \text{const}$. Пусть начальные функции $\chi(\xi)$ для системы (67), (81) принадлежат пространству $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{12})$ непрерывных функций $\chi(\xi) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{12}$ с равномерной нормой $\|\chi\|_\tau = \max_{\xi \in [-\tau, 0]} \|\chi(\xi)\|$. Относительно условий асимптотической устойчивости положения равновесия (68) системы (67), (81) доказана следующая теорема.

Теорема 17. *Пусть выполняется неравенство $|b|\tau < 1$. Тогда существует число $h_0 > 0$ такое, что при всех $h \geq h_0$ положение равновесия (68) системы (67), (81) асимптотически устойчиво.*

В работе [74] тоже решается задача о трехосной стабилизации твердого тела с использованием управления по типу ПИД-регулятора с распределенным запаздыванием. При этом, в отличие от [73], впервые применяется нелинейный однородный восстанавливающий момент с распределенным запаздыванием. Кроме того, в отличие от подходов, применявшихся в [71–73], в работе [74] для получения условий асимптотической устойчивости вместо метода декомпозиции используется специальная конструкция функционала Ляпунова – Красовского. Уравнения (60) управляемого движения тела под действием диссипативного момента $\vec{M}_d = -\mathbf{D}\vec{\omega}$, где \mathbf{D} – постоянная симметричная положительно определенная матрица, и восстанавливающего момента $\vec{M}_r = -\eta^\nu (\vec{s}_1, \vec{s}_2)(a_1\vec{s}_1 \times \vec{r}_1 + a_2\vec{s}_2 \times \vec{r}_2)$, где $\eta(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = (a_1\|\vec{s}_1 - \vec{r}_1\|^2 + a_2\|\vec{s}_2 - \vec{r}_2\|^2)/2$, a_1, a_2 – положительные постоянные, ν – неотрицательный параметр, имеют вид

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = -\mathbf{D}\vec{\omega} + \vec{M}_r(t) + b \int_{t-\tau}^t \vec{M}_r(\xi) d\xi. \quad (82)$$

Здесь b – постоянный коэффициент; τ – постоянное положительное запаздывание.

Будем считать, что начальные функции $\chi(\xi)$ для системы (67), (82) принадлежат пространству $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{12})$ непрерывных функций $\chi(\xi) : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^{12}$ с равномерной нормой $\|\chi\|_\tau = \max_{\xi \in [-\tau, 0]} \|\chi(\xi)\|$.

Задача нахождения условий асимптотической устойчивости положения равновесия (68) системы (67), (82) решена в работе [73] в случае линейного восстанавливающего момента ($\nu = 0$). Согласно теореме 17, стабилизацию положения равновесия можно гарантировать, если выполнено неравенство $|b|\tau < 1$, а перед вектором диссипативного момента имеется достаточно большой положительный множитель.

В работе [74] доказано, что при использовании существенно нелинейного восстанавливающего момента ($\nu > 0$) стабилизация имеет место при значительно менее жестких ограничениях на параметры системы, а именно справедлива теорема.

Теорема 18. *Пусть $\nu > 0$. Если выполнено неравенство $1 + b\tau > 0$, то положение равновесия (68) системы (67), (82) асимптотически устойчиво.*

В целом обращает на себя внимание простота условий асимптотической устойчивости в теоремах 15–18.

Практическая значимость доказанных теорем будет обсуждаться в следующей части обзора, а здесь приведем иллюстративный пример. Пусть твердое тело имеет главные центральные моменты инерции $A = 5$, $B = 6$, $C = 4$ (все численные значения параметров имеют размерности в единицах системы СИ).

Ставится задача стабилизации тела в положении (68), которому соответствуют нулевые значения «самолетных» углов ориентации тела в кениговой системе координат: $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\theta = 0$. Управляющий момент берется в виде правой части

уравнений (82), где $\mathbf{D} = \text{diag}(0.5, 0.5, 0.5)$, $a_1 = a_2 = 2$, $b = 1.3$. Рассматривается процесс стабилизации углового положения тела при разных значениях запаздывания τ и показателя ν степени нелинейности управления для одних и тех же начальных значений углов и угловых скоростей $\varphi(0) = 0.5$, $\psi(0) = -0.2$, $\theta(0) = 0.6$, $\omega_x(0) = -0.055$, $\omega_y(0) = -0.045$, $\omega_z(0) = 0.05$. В случае линейного управления ($\nu = 0$) при отсутствии распределенного запаздывания ($\tau = 0$) процесс стабилизации тела показан на рис. 1

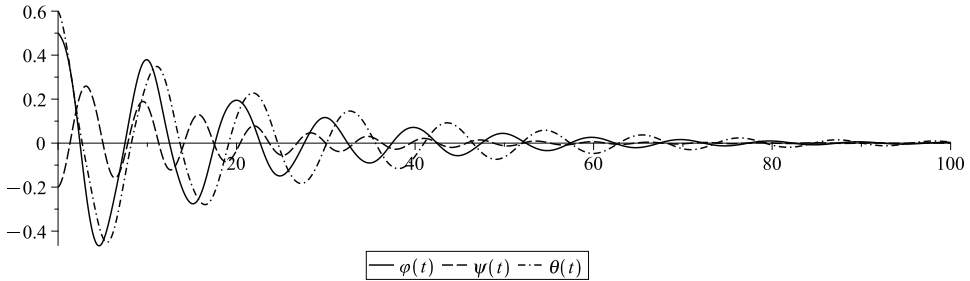


Рис. 1. Процесс стабилизации при $\nu = 0$, $\tau = 0$.

Видно, что процесс стабилизации практически завершается при $t = 100$.

Если ввести в управление интегральную составляющую, выбрав $\tau = 0.8$, и снова рассмотреть поведение тела при тех же начальных условиях, то, как видно из рис. 2, стабилизация тела отсутствует.

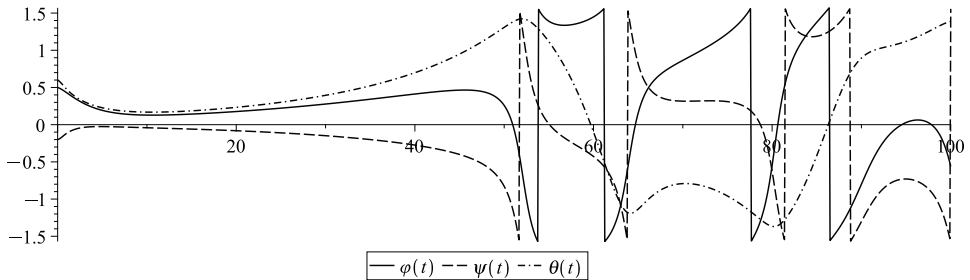


Рис. 2. Отсутствие стабилизации при $\nu = 0$, $\tau = 0.8$ ($|c\tau| > 1$).

Этот результат полностью соответствует теореме 17, гарантирующей асимптотическую устойчивость нулевого решения лишь при $|b|\tau < 1$. В данном случае $|b|\tau = 1.3 \cdot 0.8 = 1.04 > 1$. Однако теорема 18 позволяет надеяться на то, что при нелинейном восстанавливающем моменте процесс стабилизации может состояться даже при $b = 1.3$ и $\tau = 0.8$, поскольку неравенство $1 + b\tau > 0$ выполняется. Действительно, при $\nu = 4$ тело успешно стабилизируется, как показано на рис. 3.

При этом важно заметить, что, во-первых, тело в процессе стабилизации совершенно не испытывает колебаний, вызванных работой системы управления, и, во-вторых, процесс стабилизации завершается намного быстрее, чем в случае линейного управления без распределенного запаздывания (см. рис. 1). Наглядная демонстрация этих двух важных качеств предложенного нелинейного управления с распределенным запаздыванием свидетельствует о его перспективности для решения многочисленных практически важных задач, требующих не только быстродействия, но и соблюдения условий гладкости переходных режимов.

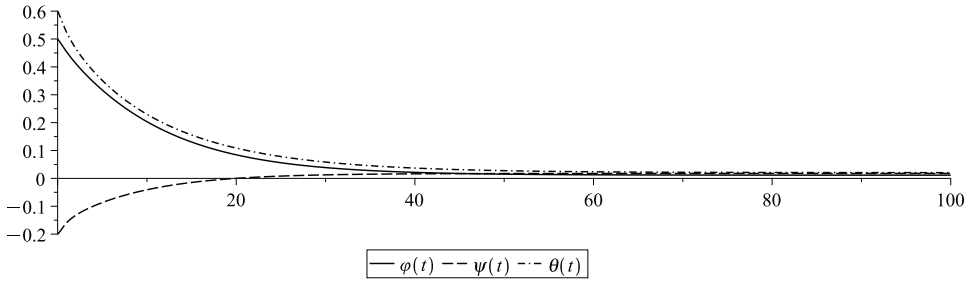


Рис. 3. Процесс стабилизации при $\nu = 4$, $\tau = 0.8$.

Из доказательства теоремы 18 следует также, что если восстанавливающий управляющий момент вовсе отсутствует, то диссипативный момент и интегральный член с запаздыванием позволяют обеспечить асимптотическую устойчивость стабилизируемого режима углового движения тела, причем наличие большого параметра при диссипативном моменте не обязательно. Таким образом, из сравнения процессов стабилизации при линейном и нелинейном восстанавливающих моментах (теоремы 17 и 18) следует, что если в линейном случае стабилизация тела происходит за счет восстанавливающего момента, а интегральная составляющая эффективно сглаживает переходные процессы, выполняя роль своего рода гасителя колебаний, вызванных работой системы управления, то при нелинейном восстанавливающем моменте интегральная составляющая не только стабилизирует тело, но и одновременно гасит его колебания.

5.5. Управление с неполной обратной связью. Пусть твердое тело вращается относительно центра масс C с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Кроме того, пусть в инерциальном пространстве имеется ортонормированный базис $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$, вращающийся относительно инерциального пространства с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$, а в теле имеется ортонормированный базис $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$, вращающийся относительно тела с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, где $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_2$ — непрерывные и ограниченные вектор-функции. Тогда в системе $Sxyz$ главных центральных осей инерции тела движение тела и изменение ортов описывается дифференциальными уравнениями Эйлера — Пуассона:

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = \vec{M} + \vec{M}_p, \quad (83)$$

$$\dot{\vec{s}}_i = (\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}) \times \vec{s}_i, \quad \dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (84)$$

где \vec{M} — управляющий момент; \vec{M}_p — возмущающий момент.

Практический интерес представляют две основные задачи.

Задача 1. Выбрать управляющий момент \vec{M} так, чтобы либо $\vec{s}_i \equiv \vec{r}_i$, либо $\vec{s}_i \rightarrow \vec{r}_i$ при $t \rightarrow \infty$ ($i = 1, 2, 3$).

Задача 2. Выбрать управляющий момент \vec{M} так, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость вращательного движения тела вокруг одной из его главных центральных осей инерции с заданной угловой скоростью $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0$.

При наличии полной обратной связи, когда имеется три датчика угловой скорости, измеряющих ее проекции на выбранные оси, обе эти задачи решены В.И. Зубовым [40]. В то же время А. М. Летов поставил задачу построения такого управления с использованием меньшего числа датчиков [75]. Задача Летова, продолжая

и развивая результаты В. И. Зубова, рассматривалась в ряде работ ученых СПбГУ. Некоторые из них упомянуты ниже.

1. В работе [76] рассматриваются задачи 1, 2 в предположении о том, что измеряются не все фазовые переменные тела, а именно компоненты ортов $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ в системе координат $Cxyz$ и проекции вектора $\vec{\omega}$ на два неколлинеарные направления с ортами \vec{b}_1 и \vec{b}_2 , которые, не ограничивая общности, можно считать ортогональными. С использованием обозначений $\vec{\omega}^* = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$, $\vec{b}_3 = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$, $B_1 = (b_1, b_2, b_3)$, $B_2 = B_1 \text{diag}(1, 1, 0)$, $\vec{w} = B_1^\top \vec{\omega}$, $\vec{w}^* = B_1^\top \vec{\omega}^*$ управляющий момент строится в виде

$$\vec{M} = \mathbf{J}\dot{\vec{\omega}}^* + \vec{\omega}^* \times \mathbf{J}\vec{\omega}^* + \vec{\omega}^* \times \mathbf{J}B_2(\vec{w} - \vec{w}^*) - B_1D_1(\vec{w} - \vec{w}^*) + \sum_{i=1}^3 a_i \vec{r}_i \times \vec{s}_i - \vec{M}_p, \quad (85)$$

где $D = (d_{kl})$, $d_{11} > 0$, $d_{11}d_{22} - (d_{21} + d_{12})^2/4 > 0$, $d_{k3} = 0$, $d_{3m} = \vec{\omega}^* (\vec{b}_m \times \mathbf{J}\vec{b}_3)$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 \geq 0$ ($k, l = 1, 2, 3$; $m = 1, 2$). Тогда справедлива теорема.

Теорема 19. Пусть $\nu > 0$. Если на программном движении задачи 1 выполнено неравенство $\vec{\omega}^* (\mathbf{J}\vec{b}_3 \times \vec{r}_3) > 0$, то это движение при управляющем моменте (85) асимптотически устойчиво по Ляпунову. Если $\vec{\omega}^* \equiv 0$ и соотношения $\vec{b}_3 \times \mathbf{J}\vec{b}_3 = \vec{0}$, $\vec{b}_3 \times \vec{r}_3 = \vec{0}$ одновременно не выполняются, то программное движение задачи 1 при управляющем моменте (85) асимптотически устойчиво по Ляпунову; если же $\vec{\omega}^* = \vec{b}_3 \times \mathbf{J}\vec{b}_3 = \vec{b}_3 \times \vec{r}_3 = \vec{0}$, то это движение лишь устойчиво.

Доказательство теоремы 19 проводится путем исследования поведения функции $V = (\vec{\omega} - \vec{\omega}^*)\mathbf{J}(\vec{\omega} - \vec{\omega}^*) + \sum_{i=1}^3 a_i (\vec{s}_i - \vec{r}_i)(\vec{s}_i - \vec{r}_i)$ на решениях системы (83)–(85).

Аналогичным образом в [76] получены и доказаны достаточные условия, при выполнении которых построенные управляющие моменты осуществляют программную ориентацию тела в задаче 2.

2. При $\vec{\omega}_0 = \vec{0}$ задача 1 решена в [77], а задача 2 — в [78].

3. При $\vec{\omega}_0 \neq \vec{0}$ задача 2 решалась в локальной постановке в работах [79, 80] для случая, когда вектор $\vec{\omega}_0$ направлен вдоль главной оси инерции тела.

4. В случае двух датчиков задача 2 решена в [81] для почти всех тензоров инерции.

5. В случае одного датчика задача 2 решена в [82] в линейном приближении с использованием динамического регулятора.

6. Задача 2 в случае одного датчика нелокально исследовалась в [83] с учетом нелинейных членов. Исследование основано на методе функций Ляпунова.

7. В [84] исследована задача 2. Искомые управления предлагается выбирать как линейные функции относительно отклонений проекций векторов угловых скоростей от заданных значений. Получены условия, при которых такое управление обеспечивает асимптотическую устойчивость вращения вокруг большой, малой или средней оси инерции тела.

6. Заключение. Последние 50 лет истории Университета отличаются от первых 250 лет взрывным ростом количества публикаций по динамике твердого тела. Причина этого явления — быстрое расширение круга актуальных задач, для которых методы динамики твердого тела, разработанные ранее и развитые в рассматриваемый период, являются надежной теоретической базой. Рассмотрение некоторых из этих методов, развитых учеными Университета, дает представление о достигнутых в рассматриваемый период достижениях, относящихся как к неуправляемому,

так и к управляемым движениям твердого тела. О достижениях ученых Университета в области прикладных исследований, опирающихся на динамику твердого тела, в том числе и о достижениях в области динамики космических аппаратов, будет рассказано в последующих частях данной серии статей.

Литература

1. Тихонов А. А. Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч.1. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып.3, 457–486 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.303>
2. Новоселов В. С. Приведение дифференциальных уравнений механики к каноническому виду. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3**, 100–105 (1972).
3. Суслов Г. К. О кинетическом потенциале Гельмгольца. *Математический сб.* **19**, 1–14 (1896).
4. Новоселов В. С. *Аналитическая механика систем с переменными массами*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1969).
5. Новоселов В. С. Об исследовании нелинейных колебаний методами гамильтоновой механики. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 123–125 (1976).
6. Leitmann G. Some remarks on Hamilton's principle. *Trans. ASME E* **85**, 623 (1963).
7. Jones S. A class of minimal variational principles for some nonconservative systems. *Trans. ASME E* **40**, 1144–1146 (1973).
8. Stuelpnagel J. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM Review* **6** (4), 422–430 (1964).
9. Кирпичников С. Н., Новоселов В. С. *Математические аспекты кинематики твердого тела*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1986).
10. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. *Теоретическая механика*. Москва, Юрайт (2015).
11. Поляхов Н. Н., Зегжда С. А., Юшков М. П. Специальная форма уравнений динамики системы твердых тел. *Доклады Академии наук СССР* **309** (4), 805–807 (1989).
12. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Москва, Изд-во Моск. ун-та (1975).
13. Breakwell J. V., Pringle R. Jr. Non-linear resonances affecting gravity-gradient stability. *Astrodynamicity*, 305–325. Paris, Gauthier-Villars (1966).
14. Тихонов А. А. Об одной форме дифференциальных уравнений возмущенного движения гравитационно-ориентированного твердого тела. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1** (1), 71–75 (1990).
15. Тихонов А. А. О нелинейных резонансных колебаниях заряженного твердого тела в условиях нестационарного магнитного поля. Ч. 1. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3** (15), 60–65 (1992).
16. Тихонов А. А. О нелинейных резонансных колебаниях заряженного твердого тела в условиях нестационарного магнитного поля. Ч. 2. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4** (22), 86–91 (1992).
17. Тихонов А. А. Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч. 1. Спектральная структура возмущающего момента. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2** (8), 82–91 (1997).
18. Тихонов А. А. Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч. 2. Реализуемые резонансы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3** (15), 85–94 (1997).
19. Тихонов А. А. Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч. 3. Усредненные уравнения. Одночастотные резонансы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3** (15), 116–126 (1998).
20. Тихонов А. А. Резонансные явления в колебаниях гравитационно-ориентированного твердого тела. Ч. 4. Многочастотные резонансы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1** (1), 131–137 (2000).
21. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **73**, 51–57 (2015).

22. Куницын А. Л. О резонансной стабилизации одного класса неустойчивых систем. *Прикладная математика и механика* **75** (5), 727–730 (2011).
23. Kosjakov E. A., Partalin T. A., Tikhonov A. A. On Nonlinear Resonances in Satellite Oscillations. *Scientific publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A: Appl. math., inform. and mech.* **7** (1), 19–24 (2015).
24. Кошляков В. Н. О применении параметров Родрига—Гамильтона и Кейли—Клейна в прикладной теории гироскопов. *Прикладная математика и механика* **29** (4), 729–733 (1965).
25. Белецкий В. В., Голубков В. В., Лавровский Э. К., Трушин С. И., Хацкевич И. Г. Определение ориентации и вращения искусственных спутников по данным измерений. *Космические исследования* **5** (5), 686–702 (1967).
26. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела*. Москва, Наука (1973).
27. Петров К. Г., Тихонов А. А. Уравнения ротационного движения твердого тела, основанные на использовании кватернионных параметров. *Известия РАН. Механика твердого тела* **3**, 3–16 (2002).
28. Тихонов А. А. О вековой эволюции ротационного движения заряженного ИСЗ на регрессирующей орбите. *Космические исследования* **43** (2), 111–125 (2005).
29. Белецкий В. В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс*. Москва, Наука (1965).
30. Marandi S. R., Modi V. J. A preferred coordinate system and the associated orientation representation in attitude dynamics. *Acta Astronaut.* **15** (11), 833–843 (1987).
31. Shuster M. D. A survey of attitude representations. *Journal of the astronautical sciences* **41** (4), 439–517 (1993).
32. Schaub H., Junkins J. L. Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: a generalization of the Rodrigues parameters. *The Journal of the Astronautical Sciences* **44** (1), 1–19 (1996).
33. Dolicanin C. B., Tikhonov A. A. On dynamical equations in s-parameters for rigid body attitude motion. *International Conference on Mechanics-Seventh Polyakhov's Reading*. February 2–6, 2015, St. Petersburg. <https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106723>
34. Tikhonov A. A., Dolicanin C., Partalin T. A., Arandjelovic I. A new form of equations for rigid body rotational dynamics. *Technical Gazette* **21** (6), 1221–1227 (2014).
35. Кирпичников С. Н. Об устойчивости стационарных движений двух гравитирующих тел: осесимметричного и сферически-симметричного. Некомпланарный случай. *Астрономический журнал* **66** (3), 612–621 (1989).
36. Кирпичников С. Н., Кокорев А. А. О первом типе стационарных движений двух гравитирующих тел: осесимметричного и сферически-симметричного. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2** (8), 115–123 (1991).
37. Кирпичников С. Н. О втором типе стационарных движений двух притягивающихся тел: осесимметричного и сферически-симметричного. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3** (15), 92–97 (1991).
38. Зубов В. И., Ермолин В. С., Сергеев С. Л., Смирнов Е. Я. Управление вращательным движением твердого тела. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1978).
39. Зубов В. И. Консервативные численные методы интегрирования дифференциальных уравнений в нелинейной механике. *Доклады РАН* **354** (4), 446–448 (1997).
40. Зубов В. И. Об активном управлении вращательным движением твердого тела. *Дифференц. уравнения* **6** (11), 2086–2087 (1970).
41. Зубов В. И. Об управлении вращательным движением. *Дифференц. уравнения* **7** (7), 1320–1322 (1971).
42. Зубов В. И. Управляемое вращение и динамика относительного движения. *Доклады Академии наук СССР* **219** (3), 565–566 (1974).
43. Зубов В. И. Аналитическая конструкция закона регулирования, управляющего вращательным движением твердого тела при непрямом регулировании. *Дифференц. уравнения* **10** (10), 1898–1899 (1974).
44. Зубов В. И. *Лекции по теории управления*. Москва, Наука (1975).
45. Зубов В. И. Оптимальное демпфирование вращательного движения. *Прикладная механика* **16** (5), 113–121 (1980).
46. Зубов В. И. *Динамика управляемых систем*. Москва, Высшая школа (1982).
47. Зубов В. И., Ермолин В. С., Иголкин В. Н., Чернецкий В. И. *Динамика свободного твердого тела и определение его ориентации в пространстве*. Чернецкий В. И. (ред.). Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1968).

48. Смирнов Е. Я. *Некоторые задачи математической теории управления*. Ленинград, Лениздат (1981).
49. Смирнов Е. Я. Управление вращательным движением твердого тела в условиях неопределенности. *Дифференциальные уравнения* **11** (5), 928–929 (1975).
50. Смирнов Е. Я., Павликов В. Ю., Щербаков П. П., Юрков А. В. *Управление движением механических систем*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1985).
51. Александров А. Ю. Об устойчивости положений равновесия нелинейных неавтономных механических систем. *Прикладная математика и механика* **71** (3), 361–376 (2007).
52. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Monoaxial attitude stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **18** (1), 12–21 (2018).
53. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Rigid body stabilization under time-varying perturbations with zero mean values. *Cybernetics and Physics* **7** (1), 5–10 (2018).
54. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Attitude stabilization of a rigid body under the action of a vanishing control torque. *Nonlinear Dynamics* **93** (2), 285–293 (2018).
55. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Attitude stabilization of a rigid body under disturbances with zero mean values. *Acta Mechanica* **233**, 1231–1242 (2022).
56. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Стабилизация вращательного движения твердого тела в условиях убывающей диссипации. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4** (62), вып. 3, 631–640 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.411>
57. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. On the Triaxial Stabilization of a Rigid Body under an Evolution of Dissipative Torque. *Proceedings of 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy Conference), STAB 2018* (July, 6), 1–4 (2018).
58. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. Attitude Stabilization of a Rigid Body under Vanishing Restoring Torque. *Advances in Stability and Control Theory for Uncertain Dynamical Systems*. Cruz-Hernandez C., Martynyuk A. A., Mazko A. G. (eds). *Stability, Oscillations and Optimization of Systems* **11**, 213–228 (2021).
59. Rouche N., Habets P., Laloy M. *Stability theory by Liapunov's direct method*. New York, Springer (1977).
60. Хатвани Л. О действии демпфирования на свойства устойчивости равновесий неавтономных систем. *Прикладная математика и механика* **65** (4), 725–732 (2001).
61. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B., Tikhonov A. A. On the Monoaxial Stabilization of a Rigid Body under Vanishing Restoring Torque. *AIP Conference Proceedings* 1959, 080001 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034718>
62. Александров А. Ю., Косов А. А., Чэнь Я. Об устойчивости и стабилизации механических систем с переключениями. *Автоматика и телемеханика* **6**, 5–17 (2011).
63. Aleksandrov A. Yu., Aleksandrova E. B. Asymptotic stability conditions for a class of hybrid mechanical systems with switched nonlinear positional forces. *Nonlinear Dynamics* **83** (4), 2427–2434 (2016).
64. Александров А. Ю. Об устойчивости равновесия нестационарных систем. *Прикладная математика и механика* **60** (2), 205–209 (1996).
65. Александров А. Ю. Об устойчивости сложных систем в критических случаях. *Автоматика и телемеханика* **9**, 3–13 (2001).
66. Антипов К. А., Тихонов А. А. Электродинамическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в геомагнитном поле. *Космические исследования* **52** (6), 512–520 (2014).
67. Kosov A. A. The exponential stability and stabilization of non-autonomous mechanical systems with non-conservative forces. *J. Appl. Math. Mech.* **71** (3), 371–384 (2007).
68. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Одноосная стабилизация вращательного движения твердого тела при наличии возмущений с нулевыми средними значениями. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6** (64), вып. 2, 270–280 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209>
69. Зубов В. И. *Устойчивость движения*. Москва, Высшая школа (1973).
70. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Nonlinear Control for Attitude Stabilization of a Rigid Body Forced by Nonstationary Disturbances with Zero Mean Values. *Journal of Applied and Computational Mechanics* **7** (2), 790–797 (2021).
71. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Анализ устойчивости механических систем с распределенным запаздыванием на основе декомпозиции. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления* **17** (1), 13–26 (2021).

72. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Анализ устойчивости механических систем с существенно нелинейными позиционными силами при наличии распределенного запаздывания. *Автоматика и телемеханика* **1**, 3–22 (2023).

73. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. On the attitude stabilization of a rigid body under control with distributed delay. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* **51** (4), 2241–2250 (2023).

74. Александров А. Ю., Тихонов А. А. Нелинейное управление с распределенным запаздыванием для угловой стабилизации твердого тела. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 4, 653–664 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.408>

75. Летов А. М. *Динамика полета и управление*. Москва, Наука (1969).

76. Смирнов Е. Я. Управление вращательным движением твердого тела. *Дифференц. уравнения* **8** (12), 2264–2266 (1972).

77. Мейлахс А. М., Хитров Г. М. О гашении вращения твердого тела. *Дифференц. уравнения* **12** (8), 1520–1522 (1976).

78. Мейлахс А. М. Об ориентации инертного твердого тела. *Дифференц. уравнения* **12** (11), 2101–2120 (1976).

79. Лебедев Д. В. Об управлении движением твердого тела при неполной информации об угловой скорости. *Автоматика и телемеханика* **12**, 5–11 (1978).

80. Ермолин В. С. Стабилизация вращательного движения динамически симметричного твердого тела. *Управление, надежность и навигация* **3**, 132–137 (1976).

81. Мейлахс А. М. О стабилизации вращательного движения твердого тела. *Дифференц. уравнения* **16** (10), 1888–1890 (1980).

82. Лебедев Д. В. Об управлении вращательным движением твердого тела при неполной информации о векторе угловой скорости. *Прикладная математика и механика* **41** (2), 219–224 (1977).

83. Мейлахс А. М. Об управлении вращательным движением твердого тела. В: *Математические методы исследования управляемых механических систем*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1982).

84. Джумагалиева М. Б. Об асимптотической устойчивости вращательного движения твердого тела в случае Эйлера. В: *Проблемы механики управляемого движения. Нелинейные динамические системы*. Пермь, Пермский университет (1984).

Статья поступила в редакцию 2 октября 2023 г.;
доработана 4 ноября 2023 г.;
рекомендована к печати 9 ноября 2023 г.

Контактная информация:

Тихонов Алексей Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.tikhonov@spbu.ru

Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 2*

A. A. Tikhonov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Tikhonov A. A. Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 2. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 259–302. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.203> (In Russian)

*See first part: Tikhonov A. A. Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 1. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2023, vol. 10 (68), issue 3, pp. 457–487. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.303> (In Russian)

This article represents the second part of a survey dedicated to the 300th anniversary of Saint Petersburg State University (SPbSU). The article is intended on analysis the scientific achievements of the Saint Petersburg School of Mathematics and Mechanics in the field of rigid body dynamics in the last 50 years. The main attention in the article is paid to theoretical research in the field of uncontrolled and controlled motions of a rigid body.

Keywords: rigid body, spacecraft, artificial Earth satellite, dynamics, attitude motion, attitude control, stabilization, oscillations.

References

1. Tikhonov A. A. Rigid-Body Dynamics from the Euler Equations to the Attitude Control of Spacecraft in the Works of Scientists from Saint Petersburg State University. Part 1. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 3, 457–486 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.303> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 3, 322–340 (2023)]. <https://doi.org/10.1134/S1063454123030081>.
2. Novoselov V. S. Reducing differential equations of mechanics to canonical form. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3**, 100–105 (1972). (In Russian)
3. Suslov G. K. O kineticheskom potentsiale Helmholtza [On the Helmholtz kinetic potential]. *Matematicheskii sbornik — Mathematical collection* **19** (1), 197–210 (1896). (In Russian)
4. Novoselov V. S. *Analytical mechanics of systems with variable masses*. Leningrad, Leningrad University Press (1969). (In Russian)
5. Novoselov V. S. On the study of nonlinear oscillations by methods of Hamiltonian mechanics. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 123–125 (1976). (In Russian)
6. Leitmann G. Some remarks on Hamilton's principle. *Trans. ASME* **E 85**, 623 (1963).
7. Jones S. A class of minimal variational principles for some nonconservative systems. *Trans. ASME* **E 40**, 1144–1146 (1973).
8. Stuelpnagel J. On the parametrization of the three-dimensional rotation group. *SIAM Review* **6** (4), 422–430 (1964).
9. Kirpichnikov S. N., Novoselov V. S. *Mathematical aspects of rigid body kinematics*. Leningrad, Leningrad University Press (1986). (In Russian)
10. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P. *Theoretical mechanics*. Moscow, Iurait Publ. (2015). (In Russian)
11. Polyakhov N. N., Zegzhda S. A., Yushkov M. P. A Special Form of Dynamical Equations of a Rigid Bodies System. *Doklady Akademii nauk SSSR* **309** (4), 805–807 (1989).
12. Beletsky V. V. *Motion of a satellite about its center of mass in field of gravity*. Moscow, Moscow University Press (1975). (In Russian)
13. Breakwell J. V., Pringle R. Jr. Non-linear resonances affecting gravity-gradient stability. *Astrodyamics*, 305–325. Paris, Gauthier-Villars (1966).
14. Tikhonov A. A. A form of differential equations for disturbed motion of gravity-oriented rigid body. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (1), 71–75 (1990). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik Leningrad University. Mechanics. Bulletin* **1**, 15–18 (1990)].
15. Tikhonov A. A. Nonlinear Resonance Vibrations of a Charged Rigid Body in a Nonstationary Magnetic Field. Part 1. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (15), 60–65 (1992). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mechanics. Bulletin* **3**, 12–19 (1992)].
16. Tikhonov A. A. Nonlinear Resonance Vibrations of a Charged Rigid Body in a Nonstationary Magnetic Field. Part 2. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (22), 86–91 (1992). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mechanics. Bulletin* **4**, 28–34 (1992)].
17. Tikhonov A. A. Resonance Phenomena in Oscillations of a Gravity-Oriented Rigid Body. Part I. The Spectral Structure of a Perturbation Moment. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (8), 82–91 (1997). (1992). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mechanics. Bulletin* **2**, 15–23 (1997)].
18. Tikhonov A. A. Resonance Phenomena in Oscillations of a Gravity-Oriented Rigid Body. Part II. The Realizable Resonances. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (15), 85–94 (1997). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mechanics. Bulletin* **3**, 14–22 (1997)].

19. Tikhonov A. A. Resonance Phenomena in Oscillations of a Gravity-Oriented Rigid Body. Part III. The Averaged Equations. Single-Frequency Resonances. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (15), 116–126 (1998). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mechanics. Bulletin* **3**, 42–51 (1998)].
20. Tikhonov A. A. Resonance phenomena in oscillations of a gravity-oriented rigid body. Part 4: multifrequency resonances. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (1), 131–137 (2000). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mechanics. Bulletin* **1**, 131–137 (2000)].
21. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **73**, 51–57 (2015).
22. Kunitsyn A. L. The resonance stabilization of a class of unstable systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **75** (5), 508–510 (2011). (In Russian)
23. Kosjakov E. A., Partalin T. A., Tikhonov A. A. On Nonlinear Resonances in Satellite Oscillations. *Scientific publications of the State University of Novi Pazar. Ser. A: Appl. math., inform. and mech.* **7** (1), 19–24 (2015).
24. Koshlyakov V. N. On the application of the Rodriguez—Hamilton and Cayley—Klein parameters in the applied gyroscope theory. *Applied mathematics and mechanics* **29** (4), 729–733 (1965). (In Russian)
25. Beletsky V. V., Golubkov V. V., Lavrovskii E. K., Trushin S. I., Khatskevich I. G. Determination of the orientation and rotation of artificial satellites from measurement data. *Kosmicheskie issledovaniia* **5** (5), 686–702 (1967). (In Russian) [Eng. transl.: *Cosmic Research* **5** (5), 585–598 (1967)].
26. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Application of Quaternions to the Problems of Rigid Body Orientation*. Moscow, Nauka Publ. (1973). (In Russian)
27. Petrov K. G., Tikhonov A. A. Equations of Rotational Motion of a Solid Body Based on the Use of Quaternion Parameters. *Izvestiia RAN. Mekhanika tverdogo tela* **3**, 3–16 (2002). (In Russian)
28. Tikhonov A. A. Secular Evolution of Rotary Motion of a Charged Satellite in a Decaying Orbit. *Kosmicheskie issledovaniia* **43** (2), 111–125 (2005). (In Russian) [Eng. transl.: *Cosmic Research* **43** (2), 107–121 (2005)].
29. Beletskii V. V. *Motion of an Artificial Satellite with Respect to the Center of Mass*. Moscow, Nauka Publ. (1965). (In Russian)
30. Marandi S. R., Modi V. J. A preferred coordinate system and the associated orientation representation in attitude dynamics. *Acta Astronaut* **15** (11), 833–843 (1987).
31. Shuster M. D. A survey of attitude representations. *Journal of the astronautical sciences* **41** (4), 439–517 (1993).
32. Schaub H., Junkins J. L. Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: a generalization of the Rodrigues parameters. *The Journal of the Astronautical Sciences* **44** (1), 1–19 (1996).
33. Dolicanin C. B., Tikhonov A. A. On dynamical equations in s-parameters for rigid body attitude motion. *International Conference on Mechanics-Seventh Polyakhov's Reading*. February 2–6, 2015, St. Petersburg. <https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106723>
34. Tikhonov A. A., Dolicanin C., Partalin T. A., Arandjelovic I. A new form of equations for rigid body rotational dynamics. *Technical Gazette* **21** (6), 1221–1227 (2014).
35. Kirpichnikov S. N. The stability of the steady-state motions of two gravitating bodies: Axisymmetric and spherically symmetric. The noncomplanar case. *Astronomicheskii zhurnal* **66**, 612–621 (1989). (In Russian)
36. Kirpichnikov S. N., Kokorev A. A. The first type of steady motions of two gravitating bodies: Axisymmetric and spherically symmetric. *Vestnik Leningrad University Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (8), 115–123 (1991). (In Russian)
37. Kirpichnikov S. N. The second kind of steady motions of two gravitating bodies — Axisymmetric and spherically symmetric. *Vestnik Leningrad University Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (15), 92–97 (1991). (In Russian)
38. Zubov V. I., Ermolin V. S., Sergeev S. L., Smirnov E. Ya. *Control of rotational motion of a rigid body*. Aleshkov Yu. Z. (ed.). Leningrad University Press (1978). (In Russian)
39. Zubov V. I. Conservative numerical methods for integrating differential equations in nonlinear mechanics. *Doklady RAN* **354** (4), 446–448 (1997). (In Russian)
40. Zubov V. I. On the active control of the rotational motion of a rigid body. *Differential Equations* **6** (11), 2086–2087 (1970). (In Russian)
41. Zubov V. I. About rotary motion control. *Differential Equations* **7** (7), 1320–1322 (1971). (In Russian)

42. Zubov V.I. Controlled rotation and relative motion dynamics. *Doklady AN USSR* **219** (3), 565–566 (1974). (In Russian)
43. Zubov V.I. Analytical design of the control law governing the rotational motion of a rigid body under indirect control. *Differential equations* **10** (10), 1898–1899 (1974). (In Russian)
44. Zubov V.I. *Lectures on control theory*. Moscow, Nauka Publ. (1975). (In Russian)
45. Zubov V.I. Optimal damping of rotational motion. *Applied mechanics* **16** (5), 113–121 (1980). (In Russian)
46. Zubov V.I. *Dynamics of Controlled Systems*. Moscow, Vysshaya shkola Publ. (1982). (In Russian)
47. Zubov V.I., Ermolin V.S., Igolkin V.N. Chernetsky V.I. *Dynamics of a free rigid body and determination of its orientation in space*. Chernetsky V.I. (ed.). Leningrad, Leningrad University Press (1968). (In Russian)
48. Smirnov E.Ya. *Some Problems of Mathematical Control Theory* Leningrad, Lenizdat Publ. (1981). (In Russian)
49. Smirnov E.Ya. Control of rotational motion of a rigid body under conditions of uncertainty. *Differential equations* **11** (5), 928–929 (1975). (In Russian)
50. Smirnov E.Ya., Pavlikov V.Yu., Shcherbakov P.P., Yurkov A.V. *Control of Motion of Mechanical Systems*. Leningrad, Leningrad University Press (1985). (In Russian)
51. Aleksandrov A.Yu. The stability of the equilibrium positions of non-linear non-autonomous mechanical systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **71** (3), 324–338 (2007).
52. Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A. Monoaxial attitude stabilization of a rigid body under vanishing restoring torque. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **18** (1), 12–21 (2018).
53. Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Rigid body stabilization under time-varying perturbations with zero mean values. *Cybernetics and Physics* **7** (1), 5–10 (2018).
54. Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Attitude stabilization of a rigid body under the action of a vanishing control torque. *Nonlinear Dynamics* **93** (2), 285–293 (2018).
55. Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. Attitude stabilization of a rigid body under disturbances with zero mean values. *Acta Mechanica* **233**, 1231–1242 (2022).
56. Aleksandrov A.Y., Tikhonov A.A. Attitude stabilization of a rigid body in conditions of decreasing dissipation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (62), iss.3, 631–640 (2017). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2017.411> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **50**, 384–391, iss.3 (2017). <https://doi.org/10.3103/S1063454117040021>].
57. Aleksandrov A.Yu., Tikhonov A.A. On the Triaxial Stabilization of a Rigid Body under an Evolution of Dissipative Torque. *Proceedings of 2018 14th International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy Conference), STAB 2018* (July, 6), 1–4 (2018).
58. Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A. Attitude Stabilization of a Rigid Body under Vanishing Restoring Torque. *Advances in Stability and Control Theory for Uncertain Dynamical Systems*. Cruz-Hernandez C., Martynyuk A.A., Mazko A.G. (eds). *Stability, Oscillations and Optimization of Systems* **11**, 213–228 (2021).
59. Rouche N., Habets P., Laloy M. *Stability theory by Liapunov's direct method*. New York, Springer (1977).
60. Hatvani L. The effect of damping on the stability properties of equilibria of non-autonomous systems. *J. Appl. Math. Mech.* **65** (4), 707–713 (2001).
61. Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B., Tikhonov A.A. On the Monoaxial Stabilization of a Rigid Body under Vanishing Restoring Torque. *AIP Conference Proceedings* **1959**, 080001 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034718>
62. Aleksandrov A.Yu., Kosov A.A., Chen Y. Stability and stabilization of mechanical systems with switching. *Automation and Remote Control* **72** (6), 1143–1154 (2011).
63. Aleksandrov A.Yu., Aleksandrova E.B. Asymptotic stability conditions for a class of hybrid mechanical systems with switched nonlinear positional forces. *Nonlinear Dynamics* **83** (4), 2427–2434 (2016).
64. Aleksandrov A.Yu. The stability of equilibrium of non-stationary systems. *Prikladnaia matematika i mekhanika* **60** (2), 205–209 (1996). (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **60** (2), 199–203. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(96\)00026-3](https://doi.org/10.1016/0021-8928(96)00026-3)].
65. Aleksandrov A.Y. Stability of Complex Systems in Critical Cases. *Avtomatika i telemekhanika* **9**, 3–13 (2001). (In Russian) [Eng. transl.: *Automation and Remote Control* **62**, 1397–1406 (2001). <https://doi.org/10.1023/A:1011676123661>].

66. Antipov K. A., Tikhonov A. A. Electrodynamical control for spacecraft attitude stability in the geomagnetic field. *Kosmicheskie issledovaniia* **52** (6), 512–520 (2014). (In Russian) [Eng. transl.: *Cosmic Res.* **52** (6), 472–480 (2014)]. <https://doi.org/10.1134/S001095251406001X>.
67. Kosov A. A. The exponential stability and stabilization of non-autonomous mechanical systems with non-conservative forces. *J. Appl. Math. Mech.* **71** (3), 371–384 (2007).
68. Aleksandrov A. Y., Tikhonov A. A. Uniaxial Attitude Stabilization of a Rigid Body under Conditions of Nonstationary Perturbations with Zero Mean Values. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (64), iss. 2, 270–280 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.209> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **52**, iss. 2, 187–193 (2019)]. <https://doi.org/10.1134/S106345411902002X>.
69. Zubov V. I. *Stability of Motion*. Moscow, Vysshiaia shkola Publ. (1973). (In Russian)
70. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Nonlinear Control for Attitude Stabilization of a Rigid Body Forced by Nonstationary Disturbances with Zero Mean Values. *Journal of Applied and Computational Mechanics* **7** (2), 790–797 (2021).
71. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Stability analysis of mechanical systems with distributed delay via decomposition. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes* **17**, iss. 1, 13–26 (2021). (In Russian)
72. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Stability Analysis of Mechanical Systems with Highly Nonlinear Positional Forces under Distributed Delay. *Avtomatika i telemekhanika* **1**, 3–22 (2023). (In Russian) [Eng. transl.: *Automation and Remote Control* **84** (1), 1–15 (2023)].
73. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. On the attitude stabilization of a rigid body under control with distributed delay. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* **51** (4), 2241–2250 (2023).
74. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Nonlinear Control with Distributed Delay for the Angular Stabilization of a Rigid Body. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 4, 653–664 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.408> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 4, 426–433 (2022)]. <https://doi.org/10/1134/S1063454122040021>.
75. Letov A. M. *Flight Dynamics and Control*. Moscow, Nauka Publ. (1969). (In Russian)
76. Smirnov E. Ya. Control of rotational motion of a rigid body. *Differential Equations* **8** (12), 2264–2266 (1972). (In Russian)
77. Meilakhs A. M., Khitrov G. M. On damping the rotation of a solid. *Differential Equations* **12** (8), 1520–1522 (1976). (In Russian)
78. Meilakhs A. M. On the orientation of an inert solid. *Differential Equations* **12** (11), 2101 (1976). (In Russian)
79. Lebedev D. V. On the control of the motion of a rigid body with incomplete information about the angular velocity. *Automation and Remote Control* **12**, 5–11 (1978). (In Russian)
80. Ermolin V. S. Stabilization of the rotational motion of a dynamically symmetric rigid body. *Control, Reliability and Navigation* **3**, 132–137 (1976). (In Russian)
81. Meilakhs A. M. On the stabilization of the rotational motion of a solid. *Differential Equations* **16** (10), 1888–1890 (1980). (In Russian)
82. Lebedev D. V. To control the rotational motion of a solid with incomplete information about the angular velocity vector. *Prikladnaia matematika i mekhanika* **41** (2), 219–224 (1977). (In Russian)
83. Meilakhs A. M. On the control of the rotational motion of a solid. In: *Mathematical Methods for the Study of Controlled Mechanical Systems*, 121–126 (1982). Leningrad, Leningrad University Press (In Russian)
84. Dzhumagalieva M. B. On the asymptotic stability of a rigid body rotation motion in the Euler case. In: *Problems of Mechanics of Controlled Motion. Nonlinear Dynamic Systems*, 66–73 (1984). Perm, Perm State University. (In Russian)

Received: October 2, 2023
 Revised: November 4, 2023
 Accepted: November 9, 2023

Author's information:

Alexey A. Tikhonov — a.tikhonov@spbu.ru