

Определение точек разрыва и величины скачка оригинала по его изображению по Лапласу*

А. В. Лебедева, В. М. Рябов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Лебедева А. В., Рябов В. М.* Определение точек разрыва и величины скачка оригинала по его изображению по Лапласу // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 316–323.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.205>

Применение интегрального преобразования Лапласа для широкого класса задач приводит к более простому уравнению относительно изображения искомого оригинала. На следующем шаге возникает задача обращения, т. е. нахождения оригинала по его изображению. Как правило, осуществить этот шаг аналитически не удастся. Возникает задача использования приближенных методов обращения. При этом приближенное решение представляется в виде линейной комбинации образа и его производных в ряде точек комплексной полуплоскости, в которой изображение регулярно. Однако оригинал, в отличие от изображения, может даже иметь точки разрыва. Несомненный интерес представляет задача разработки методов определения возможных точек разрыва оригинала и величины скачка оригинала в этих точках. В предлагаемых методах используются значения производных образа высокого порядка с целью получения удовлетворительной точности приближенных решений. Указаны приемы ускорения сходимости получаемых приближений. Приведены результаты численных экспериментов, иллюстрирующие эффективность предлагаемых методов.

Ключевые слова: интегральное преобразование Лапласа, задача обращения, точки разрыва оригинала, скачок оригинала.

1. Применение интегрального преобразования Лапласа приводит к более простому уравнению относительно изображения искомого оригинала. На следующем шаге возникает задача обращения, т. е. нахождения оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p)$ из уравнения

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p). \quad (1)$$

Теория преобразования Лапласа и аналитические методы его обращения содержатся в классических работах [1, 2].

Формула обращения задается интегралом Римана — Меллина:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad c > \gamma, \quad (2)$$

где γ — абсцисса сходимости интеграла Лапласа (1).

*Статья подготовлена при поддержке гранта Санкт-Петербургского государственного университета «Мероприятие 3» (Pure ID 75207094).

В приведенных примерах вычисления проводились с помощью пакета Maple 15 с использованием оборудования Ресурсного центра. Вычислительный центр СПбГУ (<http://www.cc.spbu.ru/>).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

К сожалению, формула (2) мало пригодна для вычислений, и потому возникает необходимость в разработке и использовании приближенных методов обращения.

Методам обращения посвящены книги [3, 4]. Выбор метода обращения определяется той априорной информацией об оригинале и его образе, которой мы располагаем. Известно, что образ $F(p)$ как функция комплексной переменной p регулярен в полуплоскости $\operatorname{Re}(p) > \gamma$, так что мы можем при построении метода обращения использовать значения образа либо в окрестности начала координат, либо в окрестности бесконечно удаленной точки, либо на вещественной оси, либо во всей полуплоскости регулярности и т. д.

Частные случаи реализации возможных ситуаций и аналитический вид приближений подробно описаны в книге [4]. Задача обращения некорректна, это, в частности, проявляется в том, что искомый оригинал может быть и разрывным, в то время как приближенное решение во всех методах обращения есть линейная комбинация образа и его производных в некоторых точках, являющихся бесконечно гладкими функциями в области регулярности.

В случае разрыва оригинала первого рода в точке t методы обращения доставляют значение $(f(t+0) + f(t-0))/2$.

Для вычисления величины $f(t+0) - f(t-0)$ воспользуемся доказанным в книге [5] следующим утверждением.

Теорема 1 ([5], с. 298). *Если интеграл*

$$A(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} d\alpha(t)$$

сходится при некотором p , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{e}{t}\right)^n A^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right) = \alpha(t+0) - \alpha(t-0).$$

2. Пусть оригинал $f(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, T]$ при любом $T > 0$, его изображение равно $F(p)$ и производная $f'(t)$ также является функцией-оригиналом. Из условия теоремы 1 вытекает существование интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} df(t)$$

и его равенство величине $A(p) = pF(p) - f(0)$. По теореме 1 скачок оригинала в точке t равен

$$f(t+0) - f(t-0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(t), \quad (3)$$

где

$$\Phi_n(t) = \left(-\frac{e}{t}\right)^n A^{(n)}\left(\frac{n}{t}\right). \quad (4)$$

Если удастся аналитически точно вычислять производные высокого порядка, то эти формулы пригодны для проведения расчетов. Заметим, что число точек разрыва может быть любым.

Пример 1. *Рассмотрим функцию*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ -1, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & 2 < t \leq 3, \\ 0, & t > 3. \end{cases}$$

Ее изображение равно

$$F(p) = \frac{1 - 2 \exp(-p) + 2 \exp(-2p) - \exp(-3p)}{p},$$

и функция (4) легко записывается в явном виде. На рис. 1, *a* представлен график функции $\Phi_{3000}(t)$, на котором отчетливо видны величины скачков оригинала в точках $t = 1, 2, 3$. На рис. 1, *б* представлен график функции $\Phi_{500}(t) - \Phi_{490}(t)$. Очевидно, функции $\Phi_{500}(t)$ и $\Phi_{490}(t)$ должны быть близки друг к другу и иметь вид кривой рис. 1, *a*, а их разность в точках разрыва близка к нулю и имеет в этих точках почти нулевую производную. Заметим, что точки разрыва можно найти как корни уравнения $\Phi_{500}(t) - \Phi_{490}(t) = 0$, а затем в них вычислить функцию (4).

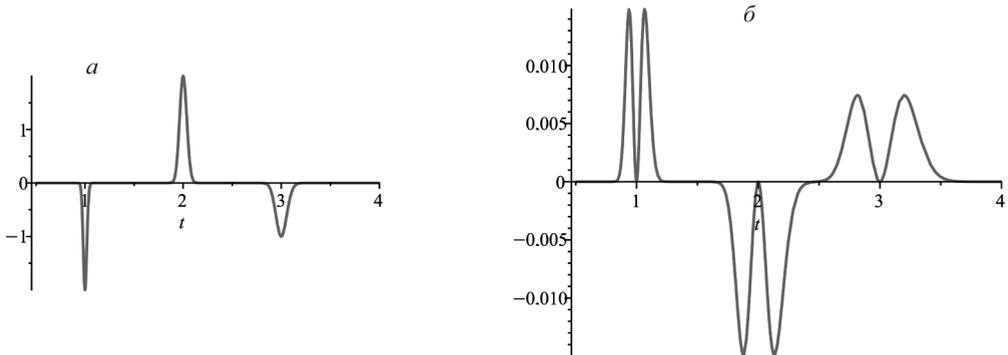


Рис. 1. Графики функций $\Phi_{3000}(t)$ (*a*) и $\Phi_{500}(t) - \Phi_{490}(t)$ (*б*).

3. Перейдем к случаю приближенного вычисления величины (4) и определению скорости сходимости метода (3).

Введем два оператора Виддера:

$$\begin{aligned} W_n(f, t) &= (-1)^n \frac{p^{n+1}}{n!} F^{(n)}(p) \Big|_{p=n/t}, & n = 1, 2, \dots, \\ S_n(f, t) &= (-1)^n \frac{p^{n+1}}{n!} F^{(n)}(p) \Big|_{p=(n+1)/t}, & n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Запишем их в виде сингулярных интегралов:

$$\begin{aligned} W_n(f, t) &= \int_0^\infty w_n(x) f(tx) dx, & w_n(x) &= \frac{n^{n+1}}{n!} e^{-nx} x^n, \\ S_n(f, t) &= \int_0^\infty s_n(x) f(tx) dx, & s_n(x) &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} e^{-(n+1)x} x^n. \end{aligned}$$

Ядра $w_n(x), s_n(x)$ удовлетворяют условиям теорем И. П. Романовского и Д. К. Фаддеева [6], откуда сразу следует сходимость, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(f, t) = f(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, t) = f(t),$$

если $f(x)$ интегрируема и непрерывна в точке $x = t$.

Однако нас интересует не только факт сходимости, но и скорость сходимости, т. е. поведение величин

$$\varepsilon_n^W(f, t) = W_n(f, t) - f(t), \quad \varepsilon_n^S(f, t) = S_n(f, t) - f(t).$$

Свойства введенных операторов Виддера и методы их приближенного вычисления изучены в книге [4].

Теорема 2. Пусть оригинал $f(t)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, T]$ при любом $T > 0$, его изображение равно $F(p)$ и производная $f'(t)$ также является функцией-оригиналом. Тогда при $t > 0$ справедлива формула

$$\sqrt{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (W_n(f, t) - S_{n-1}(f, t)) = f(t+0) - f(t-0),$$

где $W_n(f, t), S_n(f, t)$ — операторы Виддера (5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 скачок оригинала в точке t равен

$$f(t+0) - f(t-0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{e}{t}\right)^n A^{(n)} \left(\frac{n}{t}\right).$$

По формуле Лейбница находим

$$A^{(n)} \left(\frac{n}{t}\right) = \frac{n}{t} F^{(n)} \left(\frac{n}{t}\right) + n F^{(n-1)} \left(\frac{n}{t}\right).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости тождества

$$A^{(n)} \left(\frac{n}{t}\right) = (-1)^n \frac{n! t^n}{n^n} (W_n(f, t) - S_{n-1}(f, t)). \quad (6)$$

Подставляя эту величину в (4) и заменяя факториал по формуле Стирлинга, приходим к утверждению теоремы. Итак, с помощью приближений $W_n(f, t), S_n(f, t)$ мы получаем представление не только о значении оригинала в некоторой точке, но и о наличии разрыва в ней.

Для приближенного вычисления величины $W_n(f, t) - S_{n-1}(f, t)$ в книге [4] были получены приближенные формулы

$$W_n(f, t) - S_{n-1}(f, t) \approx \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \varphi \left(\frac{n}{t} (1 - re_m(j))\right) (re_m(j))^{-n}, \quad (7)$$

$$\varphi(p) = pF(p), \quad e_m(x) = \exp \left(\frac{2\pi i}{m} x\right),$$

и приведены оценки их погрешности как функции входящих в нее параметров.

Очевидно, при наличии разрыва разность $W_n(f, t) - S_{n-1}(f, t)$ в соответствии с теоремой 2 убывает, вообще говоря, как $1/\sqrt{n}$. Значит, вычисление скачка с удовлетворительной точностью на основе формулы (6) может потребовать проведения вычислений для очень больших n , что вызовет большие затруднения при фактической реализации методов Виддера. Поэтому необходим детальный анализ алгоритма вычисления скачков, скорости его сходимости и приемы ее увеличения.

4. В книге [4] получена асимптотическая формула

$$\Phi_n(t) = f(t+0) - f(t-0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} t (f'(t+0) + f'(t-0)) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, в общем случае скорость сходимости невелика. Она увеличивается, если в точке t выполняется условие $f'(t+0) + f'(t-0) = 0$ (в частности, при $f'(t+0) = f'(t-0) = 0$, как в предыдущем примере).

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

Ее изображение равно

$$F(p) = \frac{1 - \exp(-p) - p \exp(-p)}{p^2}.$$

В этом случае в точке разрыва $f'(t+0) + f'(t-0) \neq 0$, и скорость сходимости уменьшается, что хорошо видно на рис. 2. Входящие в формулу (7) параметры таковы: $r = 0.95$, $m = 251$.

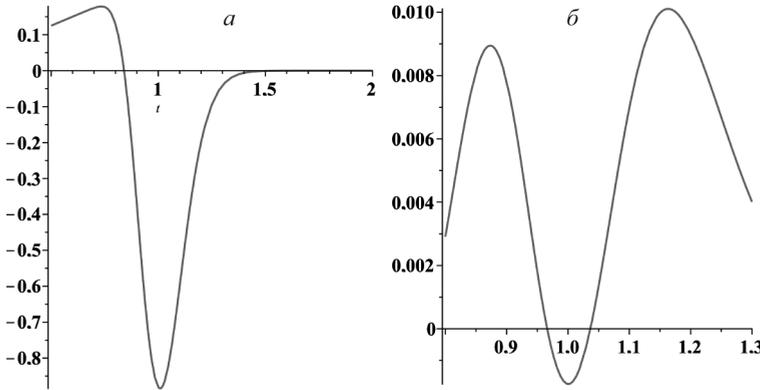


Рис. 2. Графики функций $\Phi_{100}(t)$ (а) и $\Phi_{100}(t) - \Phi_{97}(t)$ (б).

В книге [4] предложены методы ускорения сходимости рассмотренных способов определения точек разрыва искомого оригинала и величины скачков в точках разрыва.

Замечание. Для вычисления величины (6) с помощью представления (7) можно прийти иным путем, если для вычисления входящих в формулу (4) производных воспользоваться известной формулой Коши вида

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{g(w) dw}{(w-z)^{n+1}}, \quad g(z) = A(z),$$

где C — окружность с центром в точке z и таким радиусом, при котором вся линия интегрирования расположена в области регулярности изображения. Затем для вычисления интеграла применяется составная квадратурная формула прямоугольников. Однако на этом пути не видна скорость сходимости величины (4) к своему предельному значению.

5. Предположим, что с помощью описанной выше техники определены все точки разрыва оригинала в количестве m штук и для каждой из них вычислены пары

чисел (t_k, s_k) , $k = 1, 2, \dots, m$, где $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ — точки разрыва, а $s_k = f(t_k + 0) - f(t_k - 0)$ — величины скачков оригинала в этих точках.

Построим новую последовательность изображений $\{F_k(p)\}_{k=1}^m$ по формулам

$$F_{k+1}(p) = F_k(p) - s_k \frac{\exp(-pt_k)}{p}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad F_0(p) = F(p).$$

Изображение $F_m(p)$ соответствует непрерывному оригиналу $f_m(t)$, получающемуся из искомого оригинала $f(t)$ удалением всех разрывов. Функция $f_m(t)$ находится с помощью известных методов обращения. Затем необходимо к этой функции добавить все скачки s_k .

Пример 3. Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ t, & t > 1. \end{cases}$$

Ее изображение равно

$$F(p) = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} \right) \exp(-p).$$

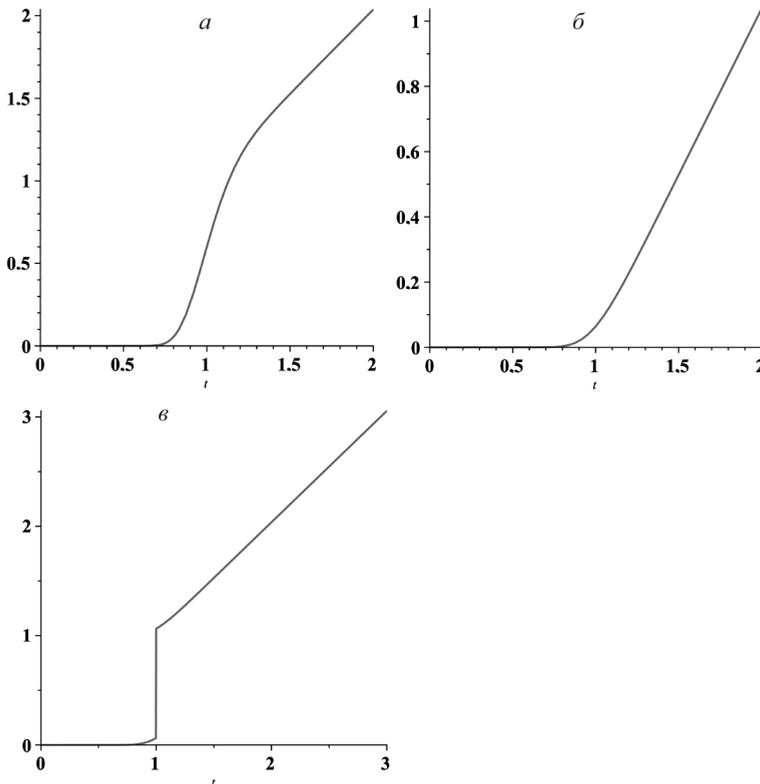


Рис. 3. Приближение по Виддеру (а); функция $f_1(t)$ (б); функция $f(t)$ (в).

Соответствующий ему оригинал, найденный методом Виддера, представлен на рис. 3, а. На нем точка разрыва практически отсутствует.

Имеется одна точка разрыва, и в ней $t_1 = 1, s_1 = 1$. Следовательно,

$$F_1(p) = F(p) - \frac{\exp(-p)}{p} = \frac{\exp(-p)}{p^2}.$$

Соответствующий этому изображению сглаженный оригинал $f_1(t)$ изображен на рис. 3, б.

После добавления к нему скачка в точке $t = 1$ находим искомый оригинал, представленный на рис. 3, в.

Литература

1. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного*. Москва, Лань (2002).
2. Крылов В. И., Скобля Н. С. *Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа*. Москва, Наука (1974).
3. Cohen A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion*. New York, Springer (2007).
4. Рябов В. М. *Численное обращение преобразования Лапласа*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2013).
5. Widder D. V. *The Laplace transform*. Princeton (1946).
6. Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной*. Москва, Наука (1974).

Статья поступила в редакцию 4 сентября 2023 г.;
доработана 11 октября 2023 г.;
рекомендована к печати 9 ноября 2023 г.

Контактная информация:

Лебедева Анастасия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, доц.; a.v.lebedeva@spbu.ru
Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.ryabov@spbu.ru

Determination of breakpoints and the magnitude of the jump of the original according to its Laplace image*

A. V. Lebedeva, V. M. Ryabov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Lebedeva A. V., Ryabov V. M. Determination of breakpoints and the magnitude of the jump of the original according to its Laplace image. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 316–323.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.205> (In Russian)

The application of the integral Laplace transform for a wide class of problems leads to a simpler equation for the image of the desired original. At the next step, the inversion problem arises, i. e., finding the original by its image. As a rule, it is not possible to carry out this step analytically. The problem arises of using approximate inversion methods. In this case, the approximate solution is represented as a linear combination of the image

*This paper was prepared with the support by a grant from St. Petersburg State University “Event 3” (Pure ID 75207094).

Research was carried out using computational resources provided by Resource Center “Computer Center of St. Petersburg State University” (<http://www.cc.spbu.ru/en>).

and its derivatives at a number of points of the complex half-plane in which the image is regular. However, the original, unlike the image, may even have break points. Of undoubted interest is the task of developing methods for determining the possible break points of the original and the magnitude of the original jump at these points. The proposed methods use the values of high-order image derivatives in order to obtain a satisfactory accuracy of approximate solutions. Methods for accelerating the convergence of the obtained approximations are indicated. The results of numerical experiments illustrating the effectiveness of the proposed methods are presented.

Keywords: Laplace integral transform, inversion problem, original discontinuity points, original jump.

References

1. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. *Methods of the theory of functions of a complex variable*. Moscow, Lan' Publ. (2002). (In Russian)
2. Krylov V. I., Skoblya N. S. *Methods of the approximate Fourier transform and the inversion of the Laplace transform*. Moscow Publ. (1974). (In Russian)
3. Cohen A. M. *Numerical methods for Laplace transform inversion*. New York, Springer (2007).
4. Ryabov V. M. *Numerical inversion of the Laplace transform*. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (2013). (In Russian)
5. Widder D. V. *The Laplace transform*. Princeton (1946).
6. Natanson I. P. *Theory of functions of a real variable*. Moscow, Nauka Publ. (1974). (In Russian)

Received: September 4, 2023

Revised: October 11, 2023

Accepted: November 9, 2023

Authors' information:

Anastasia V. Lebedeva – a.v.lebedeva@spbu.ru

Victor M. Ryabov – v.ryabov@spbu.ru