

Экстремальные проблемы типа Турана о расположении всех нулей одного класса рациональных функций*

М. Ю. Мир, С. Л. Вали, В. М. Шах

Центральный университет Кашмира,
Индия, Гандербал-191201

Для цитирования: Мир М. Ю., Вали С. Л., Шах В. М. Экстремальные проблемы типа Турана о расположении всех нулей одного класса рациональных функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 324–331. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.206>

В статье мы доказываем неравенство типа Турана для рациональных функций и тем самым расширяем его на более общий класс рациональных функций $r(s(z))$ степени mn с предписанными полюсами, где $s(z)$ — многочлен степени m . Эти результаты не только обобщают некоторые неравенства типа Турана для рациональных функций, но также улучшают и обобщают некоторые известные полиномиальные неравенства.

Ключевые слова: рациональная функция, полиномы, нули, полярная производная, неравенства.

1. Введение. Для каждого натурального n обозначим через \mathcal{P}_n линейное пространство всех многочленов $P(z) := \sum_{j=0}^n a_j z^j$ степени не выше n над полем \mathbb{C} комплексных чисел. Пусть D_k^- — множество точек, лежащих внутри $T_k := \{z : |z| = k\}$, и D_k^+ — множество точек, лежащих вне T_k . Если $P \in \mathcal{P}_n$, то по оценке $|P'(z)|$ через $|P(z)|$ на T_1 для всех $z \in \mathbb{C}$, мы имеем следующее знаменитое неравенство Бернштейна [1].

Если $P \in \mathcal{P}_n$, то

$$\max_{z \in T_1} |P'(z)| \leq n \max_{z \in T_1} |P(z)|. \quad (1)$$

Поскольку равенство в (1) выполняется тогда и только тогда, когда все нули $P(z)$ лежат в начале координат, естественно задаться вопросом: что произойдет с неравенством (1), если мы наложим ограничения на расположение нулей P ? В связи с этим Туран [2] доказал следующее.

Если все нули $P \in \mathcal{P}_n$ лежат в $T_1 \cup D_1^-$, то

$$\max_{z \in T_1} |P'(z)| \geq \frac{n}{2} \max_{z \in T_1} |P(z)|. \quad (2)$$

Неравенство (2) было обобщено Джайном [3] в следующем виде.

*М. Ю. Мир выражает огромную благодарность агентству DST-INSPIRE за финансовую поддержку.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

Если $P \in \mathcal{P}_n$ имеет все нули в $T_1 \cup D_1^-$, то для каждой β при $|\beta| \leq 1$,

$$\max_{z \in T_1} |zP'(z) + \frac{n\beta}{2}P(z)| \geq \frac{n}{2} \{1 + \operatorname{Re}(\beta)\} \max_{z \in T_1} |P(z)|. \quad (3)$$

Существует несколько улучшений и обобщений неравенства типа Турана. Ли и др. [4] дали новое измерение неравенствам типа Турана, расширив их до рациональных функций $r \in \mathcal{R}_n$, где

$$\mathcal{R}_n = \mathcal{R}_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) := \left\{ \frac{P(z)}{w(z)} : P \in \mathcal{P}_n \right\}$$

и

$$w(z) = \prod_{j=1}^n (z - \alpha_j), \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, \dots, n.$$

Таким образом, \mathcal{R}_n — это множество всех рациональных функций с полюсами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и конечным предделом в точке ∞ . В этой статье мы предполагаем, что все полюса $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ лежат в D_1^+ . Заметим, что для произведения Бляшке справедливо $\mathcal{B} \in \mathcal{R}_n$, где

$$\mathcal{B}(z) := \prod_{j=1}^n \left(\frac{1 - \overline{\alpha_j}z}{z - \alpha_j} \right) = \frac{w^*(z)}{w(z)},$$

при $w^*(z) = z^n \overline{w\left(\frac{1}{z}\right)} = \prod_{j=1}^n (1 - \overline{\alpha_j}z)$ и $|\mathcal{B}(z)| = 1$ для $z \in T_1$.

Для этого класса рациональных функций Ли и др. [4] доказали следующее.

Если $r \in \mathcal{R}_n$ имеет все нули в $T_1 \cup D_1^-$, то для $z \in T_1$,

$$|r'(z)| \geq \frac{1}{2} |\mathcal{B}'(z)| |r(z)|. \quad (4)$$

Результат точен, и равенство справедливо для рациональной функции

$$r(z) = a\mathcal{B}(z) + b, \quad |a| = |b| = 1.$$

Недавно Мир [5] обобщил неравенство (4) и доказал следующее.

Теорема А. Если $r \in \mathcal{R}_n$, и все n нули r лежат в $T_k \cup D_k^-$, $k \leq 1$. Тогда для любой β при $|\beta| \leq 1$ и $z \in T_1$

$$\left| zr'(z) + \frac{n\beta}{1+k} r(z) \right| \geq \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{n}{1+k} (1 - k + 2\operatorname{Re}(\beta)) \right\} |r(z)|. \quad (5)$$

В этой статье мы сначала докажем следующее.

2. Основные результаты.

Теорема 1. Если $r \in \mathcal{R}_n$, и все нули $r(z)$ лежат в $T_k \cup D_k^-$, $k \leq 1$. Тогда для любой комплексной β при $|\beta| \leq 1$ и $z \in T_1$

$$\left| zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k} r(z) \right| \geq \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |r(z)| + \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} (\operatorname{Re}(\beta) - |\beta|) \right\} \inf_{z \in T_k} |r(z)|. \quad (6)$$

Здесь $t \leq n$ обозначает количество нулей $r(z)$.

Результат, недавно доказанный (Mir [6], теорема 2), следует из теоремы 1, если положить $t = n$.

Замечание 1. Для $\beta = 0$ теорема 1 сводится к результату Арунрата и Накпрасита [7], а для $k = 1, \beta = 0, t = n$ теорема 1 сводится к результату Азиза и Шаха ([8], теорема 3).

Если в теореме 1 мы предположим, что $r(z)$ имеет полюс порядка n в точке $z = \alpha, |\alpha| > 1$, то $r(z) = \frac{P(z)}{(z - \alpha)^n}$, так что

$$r'(z) = \frac{-D_\alpha P(z)}{(z - \alpha)^{n+1}},$$

где

$$D_\alpha P(z) := nP(z) + (\alpha - z)P'(z)$$

обозначает полярную производную $P(z)$ по отношению к точке α . Она обобщает обычную производную в смысле

$$P'(z) = \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \frac{D_\alpha P(z)}{\alpha - z}.$$

Также в этом случае мы имеем

$$\mathcal{B}(z) = \prod_1^n \left(\frac{1 - \bar{\alpha}z}{z - \alpha} \right) = \left(\frac{1 - \bar{\alpha}z}{z - \alpha} \right)^n.$$

Это дает

$$\mathcal{B}'(z) = \frac{n(1 - \bar{\alpha}z)^{n-1}(|\alpha|^2 - 1)}{(z - \alpha)^{n+1}}.$$

Используя эти факты, мы сразу получаем из теоремы 1 для $z \in T_1$.

Следствие 1. Если многочлен $P(z)$ имеет все нули в $T_k \cup D_k^-, k \leq 1$, то для каждой α при $|\alpha| \geq 1$ и β при $|\beta| \leq 1$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{-zD_\alpha P(z)}{(z - \alpha)^{n+1}} + \frac{t\beta}{1+k} \frac{P(z)}{(z - \alpha)^n} \right| \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \left[n \left| \frac{n(1 - \bar{\alpha}z)^{n-1}(|\alpha|^2 - 1)}{(z - \alpha)^{n+1}} \right| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right] \max_{z \in T_1} \left| \frac{P(z)}{(z - \alpha)^n} \right| + \\ & + \frac{1}{2} \left[\left| \frac{n(1 - \bar{\alpha}z)^{n-1}(|\alpha|^2 - 1)}{(z - \alpha)^{n+1}} \right| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} (\operatorname{Re}(\beta) - |\beta|) \right] \min_{z \in T_k} \left| \frac{P(z)}{(z - \alpha)^n} \right|. \end{aligned}$$

Это дает для $z \in T_1$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{zD_\alpha P(z)}{\alpha - z} + \frac{t\beta}{1+k} P(z) \right| \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \left[n \left| \frac{|\alpha| - 1}{z - \alpha} \right| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right] |z - \alpha|^n \max_{z \in T_1} \frac{|P(z)|}{|z - \alpha|^n} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left| \frac{n(|\alpha| - 1)}{z - \alpha} \right| + \frac{2t - n(1 + k)}{1 + k} + \frac{2t}{1 + k} (\operatorname{Re}(\beta) - |\beta|) \right] |z - \alpha|^n \min_{z \in T_k} \frac{|P(z)|}{|z - \alpha|^n}.$$

Если в следствии 1 мы положим $|\alpha| \rightarrow \infty$, то получим следующее.

Следствие 2. Если многочлен $P(z)$ имеет все нули в $T_k \cup D_k^-, k \leq 1$, то для любой комплексной β при $|\beta| \leq 1$, имеем для $z \in T_1$

$$\left| zP'(z) + \frac{t\beta}{1+k}P(z) \right| \geq \frac{t}{1+k}(1 + \operatorname{Re}(\beta)) \max_{z \in T_1} |P(z)| + \\ + \frac{t}{1+k}(1 + \operatorname{Re}(\beta) - |\beta|) \min_{z \in T_k} |P(z)|.$$

Полагая $k = 1, \beta = 0$ и $t = n$, следствие 2 сводится к результату Азиза и Дауда ([9], теорема 4).

Пусть $r \in \mathcal{R}_n$ и $s \in \mathcal{P}_m$, тогда их композиция $r \circ s \in \mathcal{R}_{mn}$ определяется как $(r \circ s)z = r(s(z))$.

Здесь

$$r(s(z)) = \frac{P(s(z))}{w(s(z))},$$

где $P(s(z))$ обозначает композицию полиномов P и s , и

$$w(s(z)) = \prod_{j=1}^{mn} (z - \alpha_j).$$

Произведение Бляшке в этом случае определяется как

$$B(z) = \frac{w^*(s(z))}{w(s(z))} = z^{mn} \frac{\overline{w(s(\frac{1}{z}))}}{w(s(z))} = \prod_{j=1}^{mn} \frac{(1 - \overline{\alpha_j}z)}{z - \alpha_j}, \quad \alpha_j \in D_1^+.$$

Далее докажем следующее обобщение теоремы 1.

Теорема 2. Если $r \circ s \in \mathcal{R}_{mn}$, где $s(z)$ – полином степени m и $(r \circ s)(z) \neq 0$ в $D_k^+, k \leq 1$, то для любой комплексной β при $|\beta| \leq 1$, имеем для $z \in T_1$

$$\left| z s'(z) r'(s(z)) + \frac{mt\beta}{(1+k)} r(s(z)) \right| \geq \\ \geq \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| + \frac{2mt - mn(1+k)}{1+k} + \frac{2tm}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |r(s(z))| + \\ + \frac{1}{2} \left\{ B'(z) + \frac{2mt - mn(1+k)}{1+k} + \frac{2tm}{1+k} (\operatorname{Re}(\beta) - |\beta|) \right\} m^*, \quad (7)$$

где mt – количество нулей $(r \circ s)(z)$ со счетными кратностями; $m^* = \inf_{z \in T_k} |r(s(z))|$.

Замечание 2. При $\beta = 0, t = n$, теорема 2 сводится к результату, полученному в (Mir [5], теорема 2), а для $s(z) = z$ теорема 2 сводится к теореме 1.

3. Леммы. Для доказательства этих теорем нам понадобятся следующие леммы.

Первая лемма принадлежит Азизу и Шаху [10].

Лемма 1. Предположим, $r \in \mathcal{R}_n$, и все нули $r(z)$ лежат в $T_k \cup D_k^-$, $k \leq 1$, тогда для $z \in T_1$

$$|r'(z)| \geq \frac{1}{2} \left(|\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} \right) |r(z)|, \quad (8)$$

где $t \leq n$ обозначает количество нулей $r(z)$.

Следующая лемма следует из результата Ахтара и др. [11].

Лемма 2. Предположим, что $r \in \mathcal{R}_n$, и если все нули $r(z)$ лежат в $T_k \cup D_k^-$, $k \leq 1$, то для любой комплексной β при $|\beta| \leq 1$ и $z \in T_1$

$$\left| zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k} r(z) \right| \geq \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |r(z)|.$$

4. Доказательства теорем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что $r(z)$ имеет нуль на T_k , тогда $\min_{z \in T_k} |r(z)| = m = 0$ и результат тривиально следует из теоремы А, если взять $t = n$.

Предположим, что все нули $r(z)$ лежат в D_k^- , $k \leq 1$, так что $m > 0$ и $|r(z)| \geq m$ при $z \in T_k$. Отсюда по теореме Руша следует, что для любой δ при $|\delta| < 1$ все нули

$$F(z) = r(z) + \delta m$$

лежат в D_k^- , $k \leq 1$. Применяя лемму 2 к $F(z)$, имеющему t нулей и n полюсов, получаем для $z \in T_1$

$$\left| zF'(z) + \frac{t\beta}{1+k} F(z) \right| \geq \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |F(z)|.$$

Это дает для $z \in T_1$

$$\left| zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k} (r(z) + \delta m) \right| \geq \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |r(z) + \delta m|.$$

Выбирая подходящим образом аргумент δ в правой части приведенного выше неравенства, и, используя неравенство треугольника в левой части, получим для $z \in T_1$

$$\begin{aligned} & \left| zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k} r(z) \right| + |\delta| \left| \frac{tm\beta}{1+k} \right| \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |r(z)| + \\ & + \frac{1}{2} |\delta| \left\{ |\mathcal{B}'(z)| + \frac{2t - n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} m. \end{aligned} \quad (9)$$

Полагая $|\delta| \rightarrow 1$, получаем для $z \in T_1$

$$\begin{aligned} & \left| zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k}r(z) \right| \geq \\ & \geq \left\{ \frac{-t|\beta|}{1+k} \right\} m + \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| + \frac{2t-n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} (|r(z)| + m). \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда следует, что для $z \in T_1$

$$\begin{aligned} & \left| zr'(z) + \frac{t\beta}{1+k}r(z) \right| \geq \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| + \frac{2t-n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |r(z)| + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| + \frac{2t-n(1+k)}{1+k} + \frac{2t}{1+k} (\operatorname{Re}(\beta) - |\beta|) \right\} \inf_{z \in T_k} |r(z)|. \end{aligned} \quad (11)$$

□

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Так как $r \circ s \in \mathcal{R}_{mn}$ имеет все нули в $T_k \cup D_k^-$, $k \leq 1$. Пусть $m^* = \min_{z \in T_k} |r(s(z))|$, то $m^* \leq |r(s(z))|$ для $z \in T_k$. Если $r(s(z))$ имеет нуль на T_k , то $m^* = 0$, в этом случае теорема следует тривиально из теоремы А, если положить $s(z) = z$ и $t = n$. Итак, мы предполагаем, что $r(s(z))$ имеет все нули в D_k^- , тогда для каждой δ при $|\delta| < 1$ мы имеем

$$m^*|\delta| < |r(s(z))|, \quad \text{for } z \in T_k.$$

Следовательно, по теореме Руша все нули рациональной функции $T(z) = r(s(z)) + \delta m^*$ лежат в D_k^- . Применяя лемму 2 к рациональной функции $T(z)$, имеющей mt нулей и nm полюсов получаем для $z \in T_1$

$$\left| zT'(z) + \frac{tm\beta}{1+k}T(z) \right| \geq \left\{ \frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2tm-nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{(1+k)} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |T(z)|.$$

Аналогично, для $z \in T_1$

$$\begin{aligned} & \left| z(r(s(z)))' + \frac{tm\beta}{1+k}(r(s(z)) + \delta m^*) \right| \geq \\ & \geq \left\{ \frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt-nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{(1+k)} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |r(s(z)) + \delta m^*|. \end{aligned} \quad (12)$$

Выбрав аргумент δ в правой части подходящим образом, как и в доказательстве теоремы 1, получим для $z \in T_1$

$$\begin{aligned} & \left| z(r(s(z)))' + \frac{tm\beta}{1+k}r(s(z)) \right| + |\delta| \left| \frac{tm\beta}{1+k}m^* \right| \geq \\ & \geq \left\{ \frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt-nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |r(s(z))| + \\ & + |\delta|m^* \left\{ \frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt-nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{(1+k)} \operatorname{Re}(\beta) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Пусть $|\delta| \rightarrow 1$, получаем для $z \in T_1$

$$\begin{aligned} & \left| z(r(s(z)))' + \frac{tm\beta}{1+k}r(s(z)) \right| \geq \\ & \geq - \left| \frac{tm\beta}{1+k} \right| m^* + \left\{ \frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt - nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |r(s(z))| + \\ & + m^* \left\{ \frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt - nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Откуда следует, что

$$\begin{aligned} & \left| z(r(s(z)))' + \frac{tm\beta}{1+k}r(s(z)) \right| \geq \\ & \geq \left\{ \frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt - nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} (|r(s(z))| + m^*) - \left| \frac{tm\beta}{1+k} \right| m^*. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь $(r(s(z)))' = r'(s(z))s'(z)$, поэтому из неравенства (15) получаем для $z \in T_1$

$$\begin{aligned} & \left| zs'(z)r'(s(z)) + \frac{tm\beta}{1+k}r(s(z)) \right| \geq \\ & \geq \left\{ \frac{|B'(z)|}{2} + \frac{2mt - nm(1+k)}{2(1+k)} + \frac{tm}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} (|r(s(z))| + m^*) - \left| \frac{tm\beta}{1+k} \right| m^*. \end{aligned} \quad (16)$$

Аналогично, для $z \in T_1$ получаем

$$\begin{aligned} & \left| zs'(z)r'(s(z)) + \frac{mt\beta}{(1+k)}r(s(z)) \right| \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| + \frac{2mt - mn(1+k)}{1+k} + \frac{2tm}{1+k} \operatorname{Re}(\beta) \right\} |r(s(z))| + \\ & + \frac{1}{2} \left\{ |B'(z)| + \frac{2mt - mn(1+k)}{1+k} + \frac{2tm}{1+k} (\operatorname{Re}(\beta) - |\beta|) \right\} m^*, \end{aligned} \quad (17)$$

□

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за ценные предложения.

Литература/References

1. Bernstein S. N. Sur la limitation des dérivées des polynomes. *C. R. Acad. Sci. Paris* **190**, 338–340 (1930).
2. Turán P. Über die ableitung von polynomen. *Compos. Math.* **7**, 89–95 (1939).
3. Jain V. K. Generalizations of certain well known inequalities for polynomials. *Glas. Math.* **32**, 45–51 (1997).
4. Li X., Mohapatra R. N. Rodriguez R. S. Bernstein-type inequalities for rational functions with prescribed poles. *J. London Math. Soc.* **51**, 523–531 (1995).

5. Mir A. Certain estimates of the derivative of a meromorphic function on boundary of the unit disk, *Indian. J. Pure Appl. Math.* **50** (2), 315–331 (2019).
6. Mir A. *Comparison inequalities between rational functions with prescribed poles.* *RACSAM.* (2021). <https://doi.org/10.1007/s13398-021-01023-5>
7. Arunrat N., Nakprasit K. M. Bounds of the derivative of some classes of rational functions. *Mathematics and Mathematical Sciences* **52**, 1–7 (2020).
8. Aziz A., Shah W. M. Some refinements of Bernstein- type inequalities for rational functions. *Glas. Math.* **32**, 29–37 (1997).
9. Aziz A., Dawood Q. M. Inequalities for a polynomial and its derivative. *Journal of Approximation theory* **54**, 306–313 (1988).
10. Aziz A., Shah W. M. Some properties of rational functions with prescribed poles and restricted zeros. *Math. Balkanica* **18**, 33–40 (2004).
11. Akhtar T., Malik S. A., Zargar B. A. Turán-type inequalities for rational functions with prescribed poles. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* **13**, 1003–1009 (2022).
12. Markov A. On a problem of D. I. Mendelev. *Zapiski Imperatorskoi Akademii nauk* **62**, 1–24 (1889).
13. Mir M. Y., Wali S. L., Shah W. M. Inequalities for a class of rational functions. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* **13** (2), 609–617 (2022).

Статья поступила в редакцию 7 июня 2023 г.;
доработана 18 сентября 2023 г.;
рекомендована к печати 9 ноября 2023 г.

Контактная информация:

Мир Мохаммад Юсуф — д-р, науч. сотр.; myousf@cukashmir.ac.in
Вали Шах Лубна — науч. сотр.; wali@cukashmir.ac.in
Шах Вали Мохаммад — д-р, проф.; shahlw@yahoo.co.in

Extremal problems of Turán-type involving the location of all zeros of a class of rational functions*

M. Y. Mir, S. L. Wali, W. M. Shah

Central University of Kashmir, Ganderbal-191201, India

For citation: Mir M. Y., Wali S. L., Shah W. M. Extremal problems of Turán-type involving the location of all zeros of a class of rational functions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 324–331. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.206> (In Russian)

In this paper, we prove a Turán-type inequality for rational functions and thereby extend it to a more general class of rational functions $r(s(z))$ of degree mn with prescribed poles, where $s(z)$ is a polynomial of degree m . These results not only generalize some Turán-type inequalities for rational functions, but also improve as well as generalize some known polynomial inequalities.

Keywords: rational function, polynomials, zeros, polar derivative, inequalities.

Received: June 7, 2023
Revised: September 18, 2023
Accepted: November 9, 2023

Authors' information:

Mohammad Yu. Mir — myousf@cukashmir.ac.in
Shah L. Wali — myousf@cukashmir.ac.in
Wali M. Shah — shahlw@yahoo.co.in

*M. Y. Mir expresses his deep gratitude to the DST-INSPIRE agency for financial support.