

## Об эволюции кососимметричных изгибных колебаний круглой пластинки при ее вращении вокруг оси, расположенной в плоскости пластинки\*

*Н. Ф. Морозов*<sup>1,2</sup>, *А. В. Лукин*<sup>3</sup>, *И. А. Попов*<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения Российской академии наук,  
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

<sup>3</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

**Для цитирования:** *Морозов Н. Ф., Лукин А. В., Попов И. А.* Об эволюции кососимметричных изгибных колебаний круглой пластинки при ее вращении вокруг оси, расположенной в плоскости пластинки // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 354–370.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.209>

В настоящей работе выполняется построение и исследование модели связанных плоско-поперечных колебаний круглой тонкой пластинки с концентричным отверстием при действии кориолисовых и центробежных сил инерции, вызванных вращением системы вокруг оси, расположенной в плоскости пластинки. Уравнения колебаний в частных производных получены с применением вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. В предположении малости угловой скорости вращения по отношению к частоте рабочей кососимметричной изгибной формы колебаний пластинки найдено приближенное аналитическое решение как для радиальной и окружной, так и для поперечной компонент поля перемещений в режиме свободных колебаний. С помощью проекционного метода Галеркина задача была сведена к системе двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка для модальных координат взаимно ортогональных базисных кососимметричных форм колебаний пластинки. Обнаружено, что режим начально возбужденных гармонических колебаний при наличии вращения преобразуется в режим амплитудно-модулированных биений. Найдены аналитические выражения как для частоты медленной огибающей биений, так и для относительной глубины их амплитудной модуляции. Показана принципиальная возможность определения модуля проекции вектора угловой скорости на плоскость пластинки по измеряемой величине частоты огибающей. Исследована задача о выборе оптимальной геометрической формы резонатора с точки зрения максимизации чувствительности системы к изменениям величины угловой скорости вращения. Рассмотрен вопрос об определении направления проекции вектора угловой скорости на плоскость пластинки по измеряемой глубине амплитудной модуляции режима биений.

*Ключевые слова:* микромеханический гироскоп, твердотельный волновой гироскоп, многоосевой МЭМС гироскоп, инерциальная навигация, параметрические колебания.

---

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №21-71-10009, <https://rscf.ru/project/21-71-10009/>.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

**1. Введение.** Одной из важнейших задач измерительного приборостроения на современном этапе является создание малогабаритных инерциальных навигационных систем, обеспечивающих определение параметров ориентации и координат летательных, надводных и подводных аппаратов, наземных транспортных средств, роботов и др. Ключевым направлением разработок здесь является создание микроэлектромеханических датчиков инерциальной информации — акселерометров и гироскопов тактического и навигационного классов точности [1]. Наряду с высокими требованиями к точностным характеристикам датчиков, определяющее значение имеют параметры температурной стабильности и устойчивости систем к внешним воздействиям (вибрационным, ударным, акустическим) [2].

В последнее десятилетие в мировой индустрии микросистем интенсивное развитие получило направление разработки многоосевых датчиков — вибрационных микромеханических систем с архитектурой чувствительного элемента (ЧЭ), позволяющей одновременно определять более одной компоненты измеряемой характеристики движения (векторов переносного ускорения или угловой скорости). В отношении микромеханических гироскопов здесь следует указать работы передовых инженерных и исследовательских центров [3–8]. Одним из перспективных решений при разработке конструкции ЧЭ подобных сенсоров является использование особых свойств режимов упругих колебаний в телах с осевой симметрией — кольцах, пластинах, дисках [4, 8, 9]. Данный подкласс датчиков в известном смысле примыкает к обширной группе разработок в области микромасштабных твердотельных волновых гироскопов с осесимметричным резонатором [10–12], хотя и опирается на существенно иные принципы съема выходного сигнала, чем в системах со свободной гироскопической прецессией рабочей формы колебаний.

Вопросам колебаний осесимметричных упругих тел (колец, пластинок, оболочек) в неинерциальных системах отсчета посвящено значительное число работ. Кроме уже упомянутых выше задач вибрационной гироскопии, подобные постановки широко известны в роторной динамике [13–18]. В подавляющем большинстве исследований этого класса рассматривается случай совпадения направления вектора угловой скорости с осью симметрии упругого тела (диска), что приводит к возникновению в нем предварительного напряженного состояния за счет действия центробежных сил инерции и изменению характеристик свободных и вынужденных изгибных колебаний.

Отдельную группу исследований составляют работы по динамике тонких круглых пластинок с различными типами граничных условий на внешней и внутренней (при наличии у пластинки отверстия) кромках. Рассматриваются как линейные, так и нелинейные геометрические постановки [19, 20] для осесимметричных и кососимметричных колебаний [21, 22], а также бегущих упругих волн [23].

Насколько известно авторам предлагаемой работы, в научной литературе ранее не исследовались задачи динамики круглых пластинок (в частности, их кососимметричных колебаний) при совместном действии гироскопических и центробежных сил инерции, вызванных вращением системы вокруг некоторой оси, не совпадающей с осью симметрии пластинки. Наиболее близкой к названной постановке является работа [24], в которой изучаются аналогичные вопросы для тонкого упругого кольца.

В настоящей работе исследуются особые свойства гироскопически связанных плоско-поперечных колебаний тонкой круглой пластинки и рассматривается возможность их использования для определения величины и направления проекции на плоскость пластинки вектора угловой скорости подвижного объекта, на котором

установлен резонатор. Иными словами, изучаются перспективы применения чувствительного элемента указанной формы в новых архитектурах двухосевых микро-электромеханических гироскопов.

**2. Математическая модель.** Рассматривается задача об эволюции кососимметричных изгибных колебаний круглой пластинки с концентричным отверстием, заземленной по внутреннему краю и свободной по внешнему краю, в неинерциальной системе отсчета, движение которой представляет собой вращение вокруг некоторой оси, расположенной в плоскости пластинки. Графическая схема исследуемой задачи приведена на рис. 1.

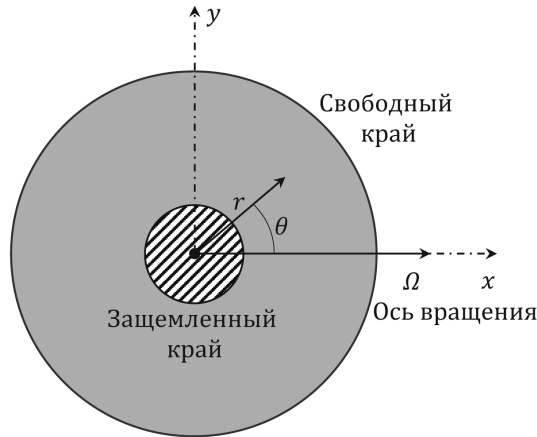


Рис. 1. Графическая схема рассматриваемой задачи.

Для материала пластинки принимается модель однородного изотропного линейно-упругого тела с объемной плотностью  $\rho$ , модулем Юнга  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Толщину, внутренний и внешний радиусы пластинки обозначим  $h, b$  и  $a$  соответственно. Примем, что вращение системы совершается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , направленной вдоль оси  $Ox$  декартовой системы координат  $Oxyz$ , связанной с пластинкой; в силу осевой симметрии конструкции ориентация этой оси в плоскости пластинки может быть задана произвольно.

В качестве механической модели пластинки будем рассматривать геометрически линейную бесдвиговую модель.

Для вывода уравнений движения системы применим интегральный вариационный принцип Гамильтона — Остроградского:

$$0 = \int_0^t (\delta T - \delta \Pi) dt, \quad (1)$$

где  $T$  и  $\Pi$  — кинетическая и потенциальная (упругая) энергии пластинки;  $d$  и  $\delta$  — операторы дифференцирования и варьирования соответственно;  $t$  — время.

Вариация кинетической энергии может быть записана следующим образом [25]:

$$\delta T = - \int_z \int_A \rho \ddot{u} \cdot \delta u dA dz, \quad (2)$$

где  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений материальных точек пластинки; интегрирование выполняется по объему тела ( $dA$  — элемент площади поверхности пластинки).

Вариация упругой энергии в общем виде может быть представлена как

$$\delta\Pi = \int_z \int_A (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\delta\varepsilon_{33} + \sigma_{23}\delta\varepsilon_{23} + \sigma_{13}\delta\varepsilon_{13} + \sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}) dAdz, \quad (3)$$

где  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  — компоненты тензоров напряжений и упругих деформаций в выбранной системе координат. Конкретный вид потенциальной энергии с учетом допущений принятой модели будет приведен далее.

Уравнения движения будем записывать в связанной с пластинкой цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ .

Векторное поле перемещений имеет вид

$$\mathbf{u} = (u - zw_r)\mathbf{j}_1 + (v - \frac{z}{r}w_\theta)\mathbf{j}_2 + w\mathbf{j}_3, \quad (4)$$

где  $u, v, w$  — радиальная, окружная и поперечная компоненты вектора перемещений;  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3$  — базисные векторы цилиндрической системы координат; нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующей пространственной координате.

Вектор сообщаемой пластинке угловой скорости имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega (\cos\theta\mathbf{j}_1 - \sin\theta\mathbf{j}_2). \quad (5)$$

Вектор абсолютной скорости материальных точек пластинки, записанный в базисе используемой неинерциальной цилиндрической системы координат, определяется выражением

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\tilde{d}\mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (6)$$

где оператор  $\tilde{d}/dt$  обозначает покомпонентное дифференцирование вектора без учета фактора подвижности рассматриваемого базиса.

С учетом (6) в базисе  $\{\mathbf{j}_{1,2,3}\}$  вектор скорости покомпонентно имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = & \left\{ \dot{u} - z\dot{w}_r - \Omega w \sin\theta, \dot{v} - \frac{z}{r}\dot{w}_\theta - \Omega w \cos\theta, \dot{w} + \right. \\ & \left. + \Omega \left[ \left( v - \frac{z}{r}w_\theta \right) \cos\theta + (u - zw_r) \sin\theta \right] \right\}^T. \quad (7) \end{aligned}$$

Поступая аналогичным образом, найдем следующее представление для вектора абсолютного ускорения в подвижном цилиндрическом базисе:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = & \left\{ \ddot{u} - z\ddot{w}_r - 2\Omega\dot{w} \sin\theta - \Omega^2 \sin\theta \left[ \left( v - \frac{z}{r}w_\theta \right) \cos\theta + (u - zw_r) \sin\theta \right], \right. \\ & \ddot{v} - \frac{z}{r}\ddot{w}_\theta - 2\Omega\dot{w} \cos\theta - \Omega^2 \cos\theta \left[ \left( v - \frac{z}{r}w_\theta \right) \cos\theta + (u - zw_r) \sin\theta \right], \quad (8) \\ & \left. \ddot{w} + 2\Omega \left[ \left( \dot{v} - \frac{z}{r}\dot{w}_\theta \right) \cos\theta + (\dot{u} - z\dot{w}_r) \sin\theta \right] - \Omega^2 w \right\}^T. \end{aligned}$$

Подстановка (8) в (2) и интегрирование полученного выражения по толщине пластинки позволяют записать вариацию кинетической энергии в виде

$$\begin{aligned} \delta T = & - \int_0^{2\pi} \int_b^a \{ I_0 [\ddot{u} - 2\Omega\dot{w} \sin \theta - \Omega^2 \sin \theta (v \cos \theta + u \sin \theta)] \delta u + \\ & + I_0 [\ddot{v} - 2\Omega\dot{w} \cos \theta - \Omega^2 \cos \theta (v \cos \theta + u \sin \theta)] \delta v + \\ & + I_0 [\ddot{w} + 2\Omega(\dot{u} \sin \theta + \dot{v} \cos \theta) - \Omega^2 w] \delta w + \\ & + I_2 \left[ \ddot{w}_r - \Omega^2 \sin \theta \left( \frac{1}{r} w_\theta \cos \theta + w_r \sin \theta \right) \right] \delta w_r + \\ & + \frac{I_2}{r} \left[ \frac{1}{r} \ddot{w}_\theta - \Omega^2 \cos \theta \left( \frac{1}{r} w_\theta \cos \theta + w_r \sin \theta \right) \right] \delta w_\theta \} r dr d\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $I_0 = \rho h$ ,  $I_2 = \frac{\rho h^3}{12}$ .

Вариация упругой энергии может быть записана как [25]

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_0^{2\pi} \int_b^a \{ [(rN_1)_r + N_{6\theta} - N_2] \delta u + [N_{2\theta} + (rN_6)_r + N_6] \delta v + \\ & + [(rQ_1)_r + Q_{2\theta}] \delta w - [(rM_1)_r + M_{6\theta} - rQ_1 - M_2] \delta w_r - \\ & - \frac{1}{r} [M_{2\theta} + rM_{6r} - rQ_2 + 2M_6] \delta w_\theta \} r dr d\theta + \\ & + \int_0^{2\pi} \left[ N_1 \delta u + N_6 \delta v + \left( Q_1 + \frac{1}{r} M_{6\theta} \right) \delta w - M_1 \delta w_r \right]_{r=b}^{r=a} r d\theta, \end{aligned} \quad (10)$$

где силы и моменты в поперечных сечениях элементов пластинки определяются выражениями

$$\begin{aligned} \{ N_1, N_2, N_6 \} &= \int_{-h/2}^{h/2} \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \} dz, \\ \{ M_1, M_2, M_6 \} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \{ \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12} \} dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, применение вариационного принципа Гамильтона — Остроградского (1) приводит к следующей системе уравнений движения пластинки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_6}{\partial \theta} + \frac{N_1 - N_2}{r} &= I_0 [\ddot{u} - 2\Omega\dot{w} \sin \theta - \Omega^2 \sin \theta (v \cos \theta + u \sin \theta)], \\ \frac{\partial N_6}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + \frac{2N_6}{r} &= I_0 [\ddot{v} - 2\Omega\dot{w} \cos \theta - \Omega^2 \cos \theta (v \cos \theta + u \sin \theta)], \\ \frac{\partial Q_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} + \frac{Q_1}{r} &= I_0 [\ddot{w} + 2\Omega(\dot{u} \sin \theta + \dot{v} \cos \theta) - \Omega^2 w], \\ \frac{\partial M_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_6}{\partial \theta} + \frac{M_1 - M_2}{r} - Q_1 &= I_2 \left[ -\ddot{w}_r + \Omega^2 \sin \theta \left( \frac{1}{r} w_\theta \cos \theta + w_r \sin \theta \right) \right], \\ -\frac{\partial M_6}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - \frac{2M_6}{r} + Q_2 &= I_2 \left[ \frac{1}{r} \ddot{w}_\theta - \Omega^2 \cos \theta \left( \frac{1}{r} w_\theta \cos \theta + w_r \sin \theta \right) \right] \end{aligned} \quad (12)$$

с рядом возможных комбинаций граничных условий вдоль кромок  $r = b, a$ :

$$\begin{aligned} \delta u = 0 & \quad \text{или} \quad N_1 = 0, \\ \delta v = 0 & \quad \text{или} \quad N_6 = 0, \\ \delta w = 0 & \quad \text{или} \quad Q_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial M_6}{\partial \theta} = 0, \\ \delta w_r = 0 & \quad \text{или} \quad M_1 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Для изотропного материала внутренние силы и моменты связаны с полем перемещений следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ (v_\theta + u)/r \\ (u_\theta + rv_r - v)/r \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{rr} \\ (w_{\theta\theta} + rw_r)/r^2 \\ (rw_{r\theta} - w_\theta)/r^2 \end{Bmatrix}. \quad (15)$$

С учетом (14), (15) система уравнений (12) может быть сведена к трем уравнениям свободных связанных плоско-поперечных колебаний пластинки:

$$\begin{aligned} c^2 \left[ u_{rr} - \frac{\nu}{r^2} (v_\theta + u) + \frac{\nu}{r} (v_{r\theta} + u_r) + \frac{1-\nu}{2r^2} (u_{\theta\theta} + rv_{r\theta} - 3v_\theta - 2u) + \frac{1-\nu}{r} u_r \right] = \\ = \ddot{u} - 2\Omega\dot{w} \sin \theta - \Omega^2 \sin \theta (v \cos \theta + u \sin \theta), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} c^2 \left[ \frac{1-\nu}{2r^2} (u_\theta + ru_r - v) + \frac{1}{r} (u_{r\theta} + rv_{rr}) + \frac{\nu}{r} u_{r\theta} + \frac{1}{r^2} (v_{\theta\theta} + u_\theta) \right] = \\ = \ddot{v} - 2\Omega\dot{w} \cos \theta - \Omega^2 \cos \theta (v \cos \theta + u \sin \theta), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} D\nabla^4 w + I_0\ddot{w} - I_2\nabla^2\ddot{w} + 2I_0\Omega(\dot{u} \sin \theta + \dot{v} \cos \theta) - I_0\Omega^2 w + \\ + I_2\Omega^2 \left[ \sin \theta \left( -\frac{1}{r^2} w_\theta \cos \theta + \frac{1}{r} w_{r\theta} \cos \theta + w_{rr} \sin \theta \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \sin \theta \left( \frac{1}{r} w_\theta \cos \theta + w_r \sin \theta \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \cos \theta \left( \frac{1}{r} w_{\theta\theta} \cos \theta - \frac{1}{r} w_\theta \sin \theta + w_{r\theta} \sin \theta + w_r \cos \theta \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \sin \theta \left( \frac{1}{r} w_\theta \cos \theta + w_r \sin \theta \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

где введены обозначения  $c^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho}$ ,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ .

Предметом дальнейшего исследования является изучение качественных особенностей решений системы уравнений (16)–(18) для частного случая эволюции начально сообщенной пластинке некоторой кососимметричной формы изгибных колебаний

при действии гироскопических сил (сил Кориолиса), вызванных малой по отношению к частоте возбужденных изгибных колебаний угловой скоростью вращения системы.

**3. Анализ гироскопически связанных плоско-поперечных колебаний пластинки.** С учетом вышеуказанных особенностей рассматриваемой постановки выполним ряд упрощений в общей системе (16)–(18):

1) в предположении малой толщины пластинки по отношению к ее характерным размерам в своей плоскости пренебрежем наличием сил инерции на поворот поперечных сечений (отбросим слагаемое  $\frac{\rho h^3}{12} \nabla^2 \ddot{w}$ );

2) имея в виду малость величины угловой скорости по сравнению с рабочей частотой возбужденной формы изгибных колебаний и гироскопическую (пропорциональную  $\Omega$ ) связь компонент вектора перемещений  $u, v$  с поперечным перемещением  $w$ , пренебрежем центробежными (пропорциональными  $\Omega^2$ ) слагаемыми в уравнениях (16)–(17);

3) с учетом пп. 1, 2 будем считать величиной старшего порядка малости и отбросим из рассмотрения последнюю группу слагаемых в уравнении (18), пропорциональную множителю  $\frac{\rho h^3}{12} \Omega^2$ ;

4) рассматривая низкочастотные (по сравнению с формами плоских движений пластинки) формы изгибных колебаний, пренебрежем силами инерции в радиальном и окружном направлениях (слагаемые  $\ddot{u}$  и  $\ddot{v}$  в уравнениях (16) и (17) соответственно).

Кроме того, перейдем к следующим безразмерным величинам, отмеченным символом  $\tilde{\phantom{x}}$ :

$$\begin{aligned} u &= h\tilde{u}, & v &= h\tilde{v}, & w &= h\tilde{w}, \\ r &= a\tilde{r}, & t &= T\tilde{t}, & \tilde{\Omega} &= T\Omega, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $T^2 = \frac{\rho h a^4}{D}$ .

Отбрасывая далее символ  $\tilde{\phantom{x}}$  в обозначениях безразмерных величин, получим следующую упрощенную систему уравнений колебаний пластинки:

$$\begin{aligned} u_{rr} - \frac{\nu}{r^2}(v_\theta + u) + \frac{\nu}{r}(v_{r\theta} + u_r) + \frac{1-\nu}{2r^2}(u_{\theta\theta} + rv_{r\theta} - 3v_\theta - 2u) + \\ + \frac{1-\nu}{r}u_r = -2\alpha^2\Omega\dot{w}\sin\theta, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\frac{1-\nu}{2r^2}(u_\theta + ru_r - v) + \frac{1}{r}(u_{r\theta} + rv_{rr}) + \frac{\nu}{r}u_{r\theta} + \frac{1}{r^2}(v_{\theta\theta} + u_\theta) = -2\alpha^2\Omega\dot{w}\cos\theta, \quad (21)$$

$$\nabla^4 w + \ddot{w} + 2\Omega(\dot{u}\sin\theta + \dot{v}\cos\theta) - \Omega^2 w = 0, \quad (22)$$

где  $\alpha^2 = \frac{a^2}{c^2 T^2}$ .

Исследование эволюции некоторой начально возбужденной формы изгибных колебаний выполним с помощью приближенного (проеекционного) метода Бубнова – Галеркина. Будем искать решение для поперечной компоненты поля перемещений пластинки в виде

$$w(r, \theta, t) = R_{nk}(r) [\eta(t) \cos n\theta + \zeta(t) \sin n\theta], \quad (23)$$

где  $n, k$  — индексы осевой симметрии и радиальной изменяемости рассматриваемой формы колебаний;  $\eta(t), \zeta(t)$  — подлежащие определению модальные координаты;  $R_{nk}(r)$  — функция радиальной координаты, определяемая решением задачи на собственные значения для уравнения свободных изгибных колебаний пластинки на неподвижном основании:

$$R(r) = C_1 J_n(\kappa r) + C_2 I_n(\kappa r) + C_3 Y_n(\kappa r) + C_4 K_n(\kappa r). \quad (24)$$

Здесь  $J_n, I_n$  и  $Y_n, K_n$  — обычные и модифицированные функции Бесселя I и II рода соответственно. Параметр  $\kappa$  связан с размерной круговой частотой свободных колебаний  $\omega$  соотношением

$$\kappa^4 = \frac{\rho h a^4 \omega^2}{D^4}. \quad (25)$$

Значения коэффициентов  $C_j$  и параметра  $\kappa$  определяются из условий удовлетворения решением (24) граничных условий, которые в рассматриваемом случае пластинки, зашпеленной по внутреннему краю и свободной по внешнему (рис. 1), имеют вид

$$\begin{aligned} r = \beta : \quad R = 0, \quad R' = 0, \\ r = 1 : \quad R'' + \frac{\nu}{r} R' - \frac{\nu n^2}{r^2} R = 0, \\ R''' + \frac{1}{r} R'' - \frac{1 + 2n^2 - \nu n^2}{r^2} R' + \frac{(3 - \nu) n^2}{r^3} R = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где введено обозначение  $\beta = b/a$ .

Вид первых двух форм изгибных колебаний пластинки из семейств  $n = 0$  и  $n = 1$  для значения параметра  $\beta = 0.2$  показан на рис. 2 (коэффициент Пуассона  $\nu$  принят равным 0.22).

Примечательной особенностью принятой комбинации граничных условий является пересечение частотных ветвей  $(n, k) = (0, 1)$  (осесимметричные формы с наименьшей радиальной изменяемостью) и  $(n, k) = (1, 1)$  (исследуемые кососимметричные формы) при достижении геометрическим параметром  $\beta$  определенного значения: при  $\beta < 0.312$ , т.е. для полых круглых пластинок с достаточно малым внутренним радиусом, наименьшей собственной частотой обладает кососимметричная форма колебаний. Этот эффект отражен на рис. 3.

Везде далее будем рассматривать кососимметричную форму колебаний с наименьшей окружной и радиальной изменяемостью:  $(n, k) = (1, 1)$ .

Подстановка (23) в (20)–(21) приводит к системе неоднородных уравнений в частных производных относительно  $u$  и  $v$ , точное решение которой может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} u(r, \theta, t) &= \alpha^2 \Omega \left[ -\dot{\zeta} U_1(r) + \left( \dot{\zeta} \cos 2\theta - \dot{\eta} \sin 2\theta \right) U_2(r) \right], \\ v(r, \theta, t) &= \alpha^2 \Omega \left[ -\dot{\eta} V_1(r) - \left( \dot{\eta} \cos 2\theta + \dot{\zeta} \sin 2\theta \right) V_2(r) \right], \end{aligned} \quad (27)$$



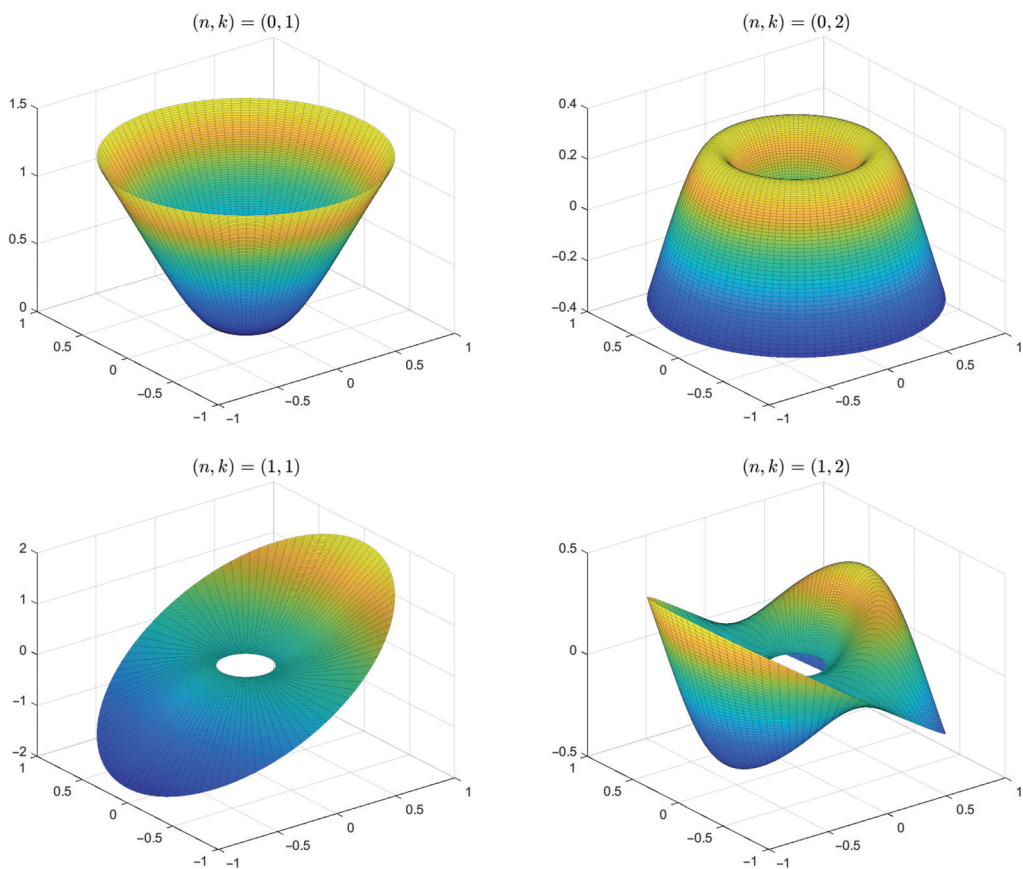


Рис. 2. Формы изгибных колебаний круглой пластинки с отверстием.

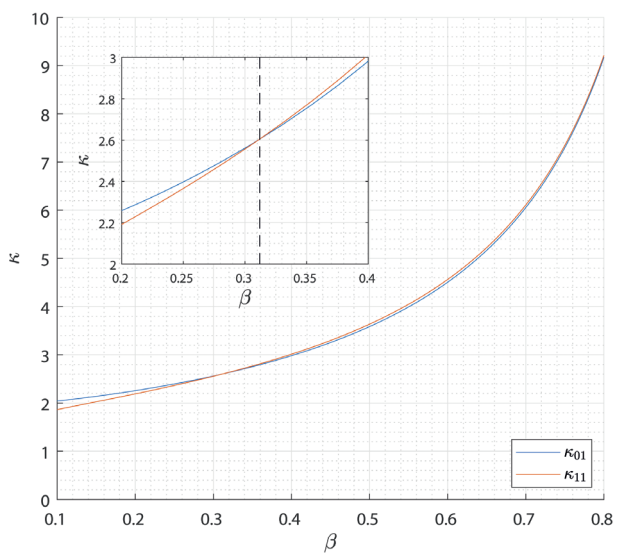


Рис. 3. Ветви безразмерного частотного параметра  $\kappa$ .

где функции  $U_1(r), U_2(r), V_1(r), V_2(r)$  являются решениями следующих граничных задач:

$$\begin{aligned} U_1'' - \frac{1}{r^2}U_1 + \frac{1}{r}U_1' &= R_{11}(r), \\ \text{Г.У.: } r = \beta : \quad U_1 &= 0, \\ r = 1 : \quad U_1' + \frac{\nu}{r}U_1 &= 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} V_1'' + \frac{1-\nu}{2r}V_1' - \frac{1-\nu}{2r^2}V_1 &= R_{11}(r), \\ \text{Г.У.: } r = \beta : \quad V_1 &= 0, \\ r = 1 : \quad rV_1' - V_1 &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} U_2'' + \frac{1}{r}U_2' - \frac{3-2\nu}{r^2}U_2 - \frac{1+\nu}{r}V_2' + \frac{3-\nu}{r^2}V_2 &= R_{11}(r), \\ \frac{2(1+\nu)}{r}U_2' + \frac{3-\nu}{r^2}U_2 + V_2'' + \frac{1-\nu}{2r}V_2' - \frac{9-\nu}{2r^2}V_2 &= R_{11}(r), \\ \text{Г.У.: } r = \beta : \quad U_2 = 0, \quad V_2 = 0, \\ r = 1 : \quad U_2' + \frac{\nu}{r}U_2 - \frac{2\nu}{r}V_2 = 0, \quad rV_2' - V_2 + 2U_2 &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Решение приведенных граничных задач может быть получено численно с помощью соответствующих методов вычислительной математики (в частности, методом коллокаций<sup>1</sup>).

Подставим найденные выражения для радиальной и окружной компонент поля перемещений (27) в уравнение изгибных колебаний (22). Учитывая искомый вид поперечной компоненты поля перемещений (23), запишем проекционные условия метода Галеркина: поэтапно умножим (22) на  $R_{11}(r) \cos \theta$ ,  $R_{11}(r) \sin \theta$  и проинтегрируем полученные уравнения по площади пластинки. Таким образом, придем к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений для модальных координат  $\eta(t), \zeta(t)$ :

$$\begin{aligned} (1 + 2\alpha^2\Omega^2 A_1) \ddot{\eta} + (\kappa_{11}^4 - \Omega^2) \eta &= 0, \\ (1 + 2\alpha^2\Omega^2 B_1) \ddot{\zeta} + (\kappa_{11}^4 - \Omega^2) \zeta &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где введены обозначения:

$$A_1 = -\frac{\int_{\beta}^1 r R_{11} (V_1 + \frac{1}{2}U_2 + \frac{1}{2}V_2) dr}{\int_{\beta}^1 r R_{11}^2 dr}, \quad B_1 = -\frac{\int_{\beta}^1 r R_{11} (U_1 + \frac{1}{2}U_2 + \frac{1}{2}V_2) dr}{\int_{\beta}^1 r R_{11}^2 dr}. \quad (32)$$

Задача (31) позволяет провести качественный анализ эволюции начально возбужденной (с некоторыми начальными условиями  $\eta_0, \zeta_0$ ) косимметричной формы колебаний при действии гироскопических и центробежных сил.

Примечательно, что гироскопическая по своей физической природе связь движений пластинки в своей плоскости и вне плоскости приводит для рассматриваемого

<sup>1</sup>MathWorks MATLAB version: 9.13.0 (R2022b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. URL: <https://www.mathworks.com> (дата обращения: 05.01.2023).

случая ориентации вектора угловой скорости к появлению слагаемых, пропорциональных квадрату скорости вращения (см. множители при вторых производных в системе (31)).

Уравнения (31) могут быть записаны в виде

$$\ddot{\eta} + \omega_{\eta}^2 \eta = 0, \quad \ddot{\zeta} + \omega_{\zeta}^2 \zeta = 0, \quad (33)$$

где безразмерные частоты модальных осцилляторов с окружной изменяемостью по  $\cos \theta$  и  $\sin \theta$  (см. представление решения для прогиба (23)) определяются выражениями

$$\omega_{\eta}^2 = \frac{\kappa_{11}^4 - \Omega^2}{1 + 2\alpha^2 \Omega^2 A_1}, \quad \omega_{\zeta}^2 = \frac{\kappa_{11}^4 - \Omega^2}{1 + 2\alpha^2 \Omega^2 B_1}. \quad (34)$$

Считая угловую скорость вращения пластинки малой по отношению к рассматриваемой круговой частоте изгибных колебаний системы на неподвижном основании, запишем в первом приближении по  $\Omega^2$ :

$$\begin{aligned} \omega_{\eta} &\cong \kappa_{11}^2 - \left( \frac{1}{2\kappa_{11}^2} + \alpha^2 \kappa_{11}^2 A_1 \right) \Omega^2, \\ \omega_{\zeta} &\cong \kappa_{11}^2 - \left( \frac{1}{2\kappa_{11}^2} + \alpha^2 \kappa_{11}^2 B_1 \right) \Omega^2. \end{aligned} \quad (35)$$

Для дальнейшего исследования будет удобно перейти от частот  $\omega_{\eta}, \omega_{\zeta}$  к средней частоте  $\omega_m$  и частотному расщеплению  $2\Delta_{\omega}$  по формулам

$$\begin{aligned} \omega_m &= \frac{1}{2} (\omega_{\eta} + \omega_{\zeta}) = \kappa_{11}^2 - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\kappa_{11}^2} + \alpha^2 \kappa_{11}^2 (2S + \delta_a + \delta_b) \right] \Omega^2, \\ \Delta_{\omega} &= \frac{1}{2} (\omega_{\zeta} - \omega_{\eta}) = \frac{\alpha^2 \kappa_{11}^2 (\delta_a - \delta_b)}{2} \Omega^2, \end{aligned} \quad (36)$$

где с учетом структуры коэффициентов  $A_1, B_1$  (32) введены обозначения:

$$S = -\frac{\int_{\beta}^1 r R_{11} (U_2 + V_2) dr}{2 \int_{\beta}^1 r R_{11}^2 dr}, \quad \delta_a = -\frac{\int_{\beta}^1 r R_{11} V_1 dr}{\int_{\beta}^1 r R_{11}^2 dr}, \quad \delta_b = -\frac{\int_{\beta}^1 r R_{11} U_1 dr}{\int_{\beta}^1 r R_{11}^2 dr}. \quad (37)$$

Предположим, что в начальный момент времени пластинке сообщено начальное поперечное отклонение по рассматриваемой кососимметричной форме изгибных колебаний, причем угловая ориентация этой формы по отношению к связанной с пластинкой осью  $Ox$  (см. рис. 1) определяется некоторым углом  $\gamma$ :

$$w_0(r, \theta) = C R_{11}(r) \cos(\theta + \gamma) = C R_{11}(r) [\cos \gamma \cos \theta - \sin \gamma \sin \theta]. \quad (38)$$

Параметр  $C$  характеризует амплитуду начального прогиба; в силу линейности задачи везде далее примем  $C \equiv 1$ .

Подчеркнем, что угол  $\gamma$  определяет, таким образом, ориентацию возбужденной формы колебаний по отношению к направлению вектора угловой скорости  $\Omega$ . Здесь необходимо отметить, что одним из возможных технических применений рассматриваемой задачи является предложение нового принципа работы и конструктивного решения для датчиков угловой скорости (прежде всего — микромеханических вибрационных гироскопов с электростатическими возбудителями колебаний и системами

емкостного съема выходного сигнала). В контексте этих приложений направление и величина вектора  $\Omega$  (точнее, его проекции на плоскость пластинки) подлежат определению, а ориентация начально возбужденной формы колебаний чувствительного элемента является заданной. Из сказанного следует, что с учетом осевой симметрии геометрии пластинки мы можем интерпретировать угол  $\gamma$  как параметр, определяющий искомое направление вектора угловой скорости по отношению к известной начальной ориентации возбужденной кососимметричной формы колебаний.

Сопоставление (38) с (23) показывает, что начальные значения модальных координат в рассматриваемом случае равны  $\eta_0 = \cos \gamma$ ,  $\zeta_0 = -\sin \gamma$ , а значит,

$$\eta(t) = \cos \gamma \cos \omega_\eta t, \quad \zeta(t) = -\sin \gamma \cos \omega_\zeta t. \quad (39)$$

Таким образом, свободные изгибные колебания пластинки при действии гироскопических и центробежных сил определяются выражением

$$w(r, \theta, t) = R_{11}(r) [\cos \gamma \cos \theta \cos \omega_\eta t - \sin \gamma \sin \theta \cos \omega_\zeta t], \quad (40)$$

которое, с учетом введенных обозначений (36), может быть преобразовано к форме

$$w(r, \theta, t) = R_{11}(r) [\cos(\theta + \gamma) \cos \Delta_\omega t \cos \omega_m t + \cos(\theta - \gamma) \sin \Delta_\omega t \sin \omega_m t]. \quad (41)$$

Необходимо отметить, что отдельного рассмотрения требует техническая и алгоритмическая реализация задачи сообщения резонатору заданных начальных условий и поддержания свободных колебаний пластинки с течением времени в условиях физически неизбежной диссипации механической энергии, с одной стороны, и недопустимости внесения возбудителем колебаний окружной асимметрии в систему — с другой. Принципиальное решение этой группы вопросов может быть найдено путем расположения пластинки между двумя эквидистантными плоскими электродными структурами с осевой симметрией, состоящими из электростатических приводов с переменным межэлектродным зазором и емкостных датчиков поперечных перемещений. При работе подобной электродной системы в режиме возбуждения параметрических колебаний резонатора указанные выше условия будут выполнены [11].

Имея в виду разработку модели датчика угловой скорости, рассмотрим зависимость от времени движения точки на внешней (свободной) кромке пластинки в принимаемом известном направлении пучности начально возбужденной формы колебаний  $\theta = -\gamma$ :

$$W(t) \equiv w(1, -\gamma, t) = R_{11}(1) [\cos \Delta_\omega t \cos \omega_m t + \cos 2\gamma \sin \Delta_\omega t \sin \omega_m t]. \quad (42)$$

Как видно из полученного выражения, колебания в точке съема выходного сигнала представляют собой амплитудно-модулированные биения с частотой огибающей  $\Delta_\omega$  и относительной глубиной модуляции  $1 - |\cos 2\gamma|$ . Характер этих колебаний показан на рис. 4.

Из сказанного следует, что возникает принципиальная возможность определения амплитуды и направления вектора угловой скорости  $\Omega$  (или, как отмечено выше, в общем случае — его проекции на плоскость пластинки) по измеряемым характеристикам колебаний в некоторых точках пластинки: частота биений  $\Delta_\omega$ , как видно из (36), пропорциональна квадрату модуля вектора угловой скорости  $\Omega^2$ ; параметр глубины амплитудной модуляции  $\cos 2\gamma$  связан с направлением этого вектора.

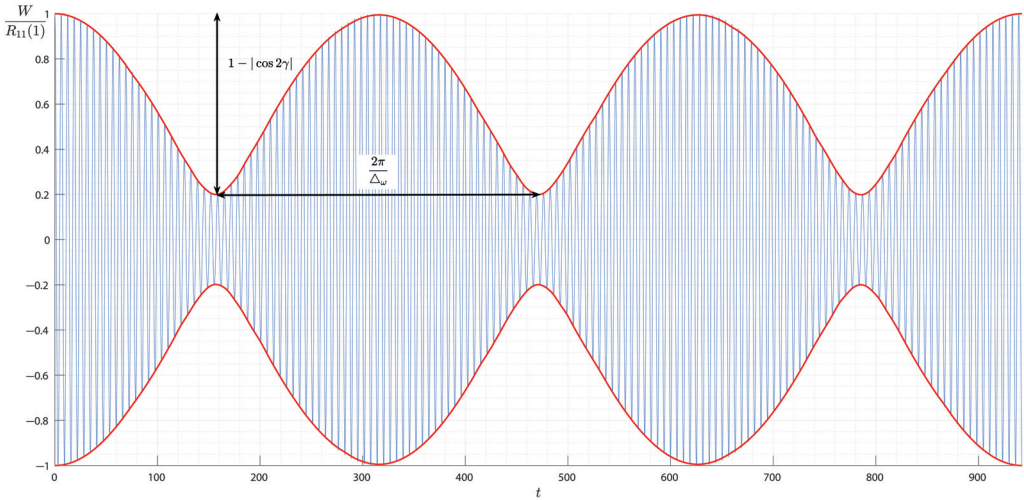


Рис. 4. Вид зависимости от времени колебаний в точке съема выходного сигнала.

Исследуем подробнее выражение (36) для частоты биений  $\Delta\omega$ . Видим, что коэффициент при  $\Omega^2$  есть произведение  $\alpha^2/2$  и  $\kappa_{11}^2(\delta_a - \delta_b)$ , где первый множитель определяется конкретными физико-механическими и геометрическими параметрами пластинки, а второй представляет собой безразмерную величину, зависящую лишь от формы пластинки — параметра  $\beta$  отношения ее внутреннего радиуса к внешнему. Таким образом, возникает задача о нахождении оптимальной формы пластинки (оптимальной величины параметра  $\beta$ ), соответствующей наибольшему возможному значению множителя чувствительности  $\kappa_{11}^2(\delta_a - \delta_b)$ . Результаты расчета зависимостей названных величин от параметра  $\beta$  приведены на рис. 5.

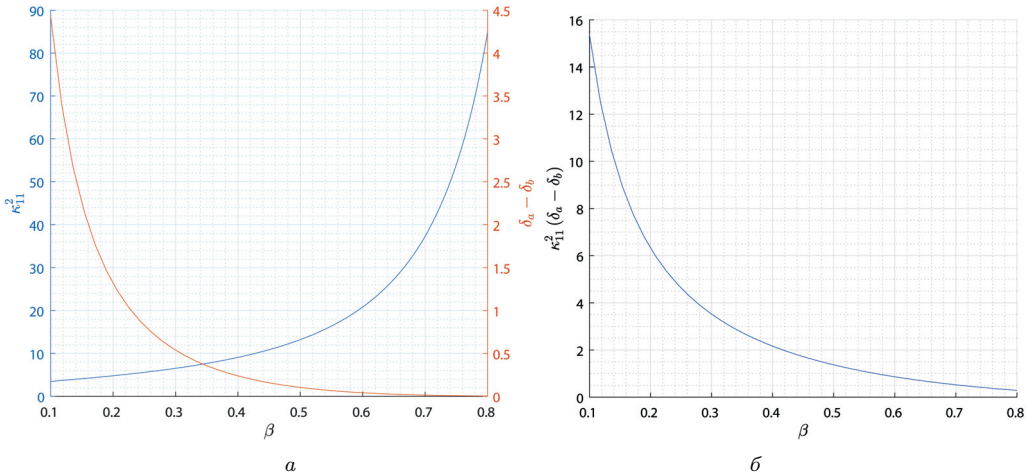


Рис. 5. Зависимость параметров влияния вращения от  $\beta$ : а — множители  $\kappa_{11}^2$  и  $\delta_a - \delta_b$ ; б — полный множитель чувствительности.

Как видно из рисунка, эффект гироскопического расщепления кратных собственных частот рассматриваемых взаимно ортогональных кососимметричных

форм колебаний резонатора проявляется тем сильнее, чем меньше внутренний радиус пластинки по отношению к внешнему. Этот результат можно считать ожидаемым и связанным с пропорциональностью сил Кориолиса эффективной массе, вовлеченной в колебания, которая, в свою очередь, растет с уменьшением радиуса отверстия.

Кратко рассмотрим и вопрос об определении направления проекции вектора  $\Omega$  на плоскость пластинки по измеряемой глубине амплитудной модуляции, связанной с величиной  $\cos 2\gamma$ . Данная задача составляет известные трудности, поскольку наблюдение медленной огибающей сигнала в виде биений (см. рис. 4) позволяет определить лишь  $|\cos 2\gamma|$ . Кроме того, функция  $\cos 2\gamma$  сама по себе является двузначной на интервале  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  (одному ее значению соответствуют два возможных угловых направления, симметричных относительно  $\gamma = 0$ ). Дополнительная информация, необходимая для однозначного определения  $\gamma$ , вероятно, может быть получена путем синхронных измерений сигналов колебаний в нескольких точках на кромке пластинки и их фазовой демодуляции по высокочастотной гармонике. Конкретное исследование этого вопроса составляет предмет дальнейших исследований.

**4. Заключение.** В настоящей работе была впервые построена математическая модель связанных плоско-поперечных колебаний круглой тонкой пластинки с концентричным отверстием при действии кориолисовых и центробежных сил инерции, вызванных вращением системы вокруг оси, расположенной в плоскости пластинки. Уравнения колебаний в частных производных получены с применением вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. В предположении малости угловой скорости вращения по отношению к частоте рабочей кососимметричной изгибной формы колебаний пластинки найдено приближенное аналитическое решение как для радиальной и окружной, так и для поперечной компонент поля перемещений в режиме свободных колебаний. С помощью проекционного метода Галеркина задача была сведена к системе двух линейных дифференциальных уравнений второго порядка для модальных координат взаимно ортогональных базисных кососимметричных форм колебаний пластинки. Обнаружено, что режим начально возбужденных гармонических колебаний при наличии вращения преобразуется в режим амплитудно-модулированных биений. Найдены аналитические выражения как для частоты медленной огибающей биений, так и для относительной глубины их амплитудной модуляции. Показана принципиальная возможность определения модуля проекции вектора угловой скорости на плоскость пластинки по измеряемой величине частоты огибающей. Исследована задача о выборе оптимальной геометрической формы резонатора с точки зрения максимизации чувствительности системы к изменениям величины угловой скорости вращения. Рассмотрен вопрос об определении направления проекции вектора угловой скорости на плоскость пластинки по измеряемой глубине амплитудной модуляции режима биений.

## Литература/References

1. Peshekhonov V.G. The Outlook for Gyroscopy. *Gyroscopy Navig.* **11**, 193–197 (2020). <https://doi.org/10.1134/S2075108720030062>
2. Indeitsev D. A., Belyaev Y. V., Lukin A. V., Popov I. A., Igumnova V. S., Mozhgova N. V. Analysis of imperfections sensitivity and vibration immunity of MEMS vibrating wheel gyroscope. *Nonlinear Dynamics* **105** (2), 1273–1296 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06664-0>
3. Tsai D.H., Fang W. Design and simulation of a dual-axis sensing decoupled vibratory wheel gyroscope. *Sensors and Actuators, A: Physical* **126** (1), 33–40 (2006). <https://doi.org/10.1016/j.sna.2005.09.004>

4. Johari H., Shah J., Ayazi F. High frequency xyz-axis single-disk silicon gyroscope. *Proceedings of the IEEE International Conference on Micro Electro Mechanical Systems*, 856–859 (2008). <https://doi.org/10.1109/MEMSYS.2008.4443791>
5. Vigna B. Tri-axial MEMS gyroscopes and six degree-of-freedom motion sensors. *Technical Digest – International Electron Devices Meeting IEDM* (2011). <https://doi.org/10.1109/IEDM.2011.6131635>
6. Cao H., Zhao R., Cai Q., Shi Y., Liu L. Structural Design and Simulation Analysis of Silicon Micro Triaxial Wheel-ring Gyroscope. *International Conference on Sensing, Measurement and Data Analytics in the Era of Artificial Intelligence ICSMD 2020 – Proceedings*, 130–132 (2020). <https://doi.org/10.1109/ICSMD50554.2020.9261699>
7. Takahashi H., Abe K., Takahata T., Shimoyama I. MEMS triaxial gyroscope using surface and sidewall doping piezoresistors. *Journal of Micromechanics and Microengineering* **30** (10) (2020). <https://doi.org/10.1088/1361-6439/ab9e4d>
8. Sedebo G.T., Shatalov M.Y., Joubert S.V., Shafi A.A. The Dynamics of a Three-Dimensional Tuning Functionally Graded Plate Gyroscope. *Mechanics of Solids* **57** (6), 1577–1589 (2022). <https://doi.org/10.3103/S0025654422060267>
9. Smirnov A.L. Free Vibrations of the Rotating Shells of Revolution. *ASME. J. Appl. Mech.* **56** (2), 423–429 (June 1989). <https://doi.org/10.1115/1.3176100>
10. Hu Z., Gallacher B.J. Effects of Nonlinearity on the Angular Drift Error of an Electrostatic MEMS Rate Integrating Gyroscope. *IEEE Sensors Journal* **19** (22), 10271–10280 (2019). <https://doi.org/10.1109/JSEN.2019.2929352>
11. Indeitsev D.A., Zavorotneva E.V., Lukin A.V., Popov I.A., Igumnova V.S. Nonlinear Dynamics of a Microscale Rate Integrating Gyroscope with a Disk Resonator under Parametric Excitation. *Rus. J. Nonlin. Dyn.* **19** (1), 59–89 (2023).
12. Maslov A.A., Merkurjev I.V., Maslov D.A., Podalkov V.V. Scale Factor of the Wave Solid-State Gyroscope Operating in the Angular Velocity Sensor Mode. *29<sup>th</sup> Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, ICINS* (2022). <https://doi.org/10.23919/ICINS51784.2022.9815350>
13. Luo A.C.J., Mote C.D., Jr. Nonlinear Vibration of Rotating Thin Disks. *ASME. J. Vib. Acoust. October 2000* **122** (4), 376–383 (2000). <https://doi.org/10.1115/1.1310363>
14. Nayfeh A.H., Jilani A., Manzione P. *Transverse Vibrations of a Centrally Clamped Rotating Circular Disk. Nonlinear Dynamics* **26**, 163–178 (2001). <https://doi.org/10.1023/A:1012957024898>
15. Hamidzadeh H.R. Non-linear free transverse vibration of thin rotating discs. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: *Journal of Multi-Body Dynamics* **221** (3), 467–473 (2007). <https://doi.org/10.1243/14644193JMBD46>
16. Angoshtari A., Jalali M.A. On the existence of chaotic circumferential waves in spinning disks. *Chaos* **17** (2) (2007). <https://doi.org/10.1063/1.2735813>
17. Hu Y., Wang T. Nonlinear resonance of the rotating circular plate under static loads in magnetic field. *Chinese Journal of Mechanical Engineering (English Edition)* **28** (6), 1277–1284 (2015). <https://doi.org/10.3901/CJME.2015.0720.097>
18. Kang J.H. Axisymmetric Vibration of Rotating Annular Plate with Variable Thickness Subjected to Tensile Centrifugal Body Force. *International Journal of Structural Stability and Dynamics* **17** (9), 1750101 (2017). <https://doi.org/10.1142/S0219455417501012>
19. Vasiliev G.P., Smirnov A.L. Free vibration frequencies of a circular thin plate with nonlinearly perturbed parameters. *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics* **21** (2), 227–237 (2021). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-227-237>
20. Asher A., Gilat R., Krylov S. Natural Frequencies and Modes of Electrostatically Actuated Curved Bell-Shaped Microplates. *Applied Sciences* **12** (5), 2704 (2022). <http://dx.doi.org/10.3390/app12052704>
21. Touzé C., Thomas O., Chaigne A. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part I: Theory. *Journal of Sound and Vibration* **258** (4), 649–676 (2002). <https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5143>
22. Thomas O., Touzé C., Chaigne A. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part II: Experiments. *Journal of Sound and Vibration* **265** (5), 1075–1101 (2003). [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01564-X](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01564-X)
23. Nayfeh T. A., Vakakis A. F. Subharmonic travelling waves in a geometrically non-linear circular plate. Pergamon Int. *J. Non-Linear Mechanics* **29** (2), 233–245 (1994). [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(94\)90042-6](https://doi.org/10.1016/0020-7462(94)90042-6)

24. Eley R., Fox C. H. J., McWilliam S. The dynamics of a vibrating-ring multi-axis rate gyroscope. *Proceedings of The Institution of Mechanical Engineers Part C-journal of Mechanical Engineering Science* **214**, 1503–1513 (2000). <https://doi.org/10.1243/0954406001523443>

25. Nayfeh A. H., Pai P. F. *Linear and Nonlinear Structural Mechanics. Wiley Series in Nonlinear Science.* Wiley-Interscience (2004).

Статья поступила в редакцию 1 февраля 2023 г.;  
доработана 7 октября 2023 г.;  
рекомендована к печати 9 ноября 2023 г.

Контактная информация:

Морозов Никита Федорович — д-р физ.-мат. наук, проф.; [n.morozov@spbu.ru](mailto:n.morozov@spbu.ru)

Лукин Алексей Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доц.; [lukin\\_av@spbstu.ru](mailto:lukin_av@spbstu.ru)

Попов Иван Алексеевич — [popov\\_ia@spbstu.ru](mailto:popov_ia@spbstu.ru)

## Gyroscopically coupled in-plane and transverse vibrations of an annular free-clamped microplate\*

*N. F. Morozov*<sup>1,2</sup>, *A. V. Lukin*<sup>3</sup>, *I. A. Popov*<sup>3</sup>

<sup>1</sup> St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences, 61, Bolshoy pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

<sup>3</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, 29, ul. Politehnicheskaya, St. Petersburg, 195251, Russian Federation

**For citation:** Morozov N. F., Lukin A. V., Popov I. A. Gyroscopically coupled in-plane and transverse vibrations of an annular free-clamped microplate. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 354–370. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.209> (In Russian)

In this work, we construct and study a model of coupled plane-transverse oscillations of a circular thin plate with a concentric hole under the action of Coriolis and centrifugal inertia forces caused by the rotation of the system along an axis located in the plane of the plate. Equations of vibrations in partial derivatives are obtained using the variational principle of Hamilton — Ostrogradsky. Assuming the smallness of the angular velocity of rotation with respect to the frequency of the working skew-symmetric flexural form of the plate oscillations, an approximate analytical solution is found for both the radial and circumferential, and transverse components of the displacement field in the free oscillation mode. Using the Galerkin projection method, the problem was reduced to a system of two second-order linear differential equations for modal coordinates of mutually orthogonal basic skew-symmetric modes of the plate vibrations. It is found that the regime of initially excited harmonic oscillations in the presence of rotation is transformed into the regime of amplitude-modulated beats. Analytical expressions are found both for the frequency of the slow beat envelope and for the relative depth of their amplitude modulation. The fundamental possibility of determining the modulus of the projection of the angular velocity vector onto the plane of the plate from the measured value of the envelope frequency is shown. The problem of choosing the optimal geometric shape of the resonator from the point of view of maximizing the sensitivity of the system to changes in the value of the angular velocity of rotation is studied. The question of determining the direction of the

---

\*The research was funded by the Russian Science Foundation grant no.21-71-10009, <https://rscf.ru/project/21-71-10009/>.



projection of the angular velocity vector onto the plane of the plate from the measured depth of the amplitude modulation of the beat regime is considered.

*Keywords:* micromechanical gyroscope, rate-integrating gyroscope, triaxial MEMS gyroscope, inertial navigation, parametric oscillations.

Received: February 1, 2023  
Revised: October 7, 2023  
Accepted: November 9, 2023

Authors' information:

*Nikita F. Morozov* — n.morozov@spbu.ru

*Alexey V. Lukin* — lukin\_av@spbstu.ru

*Ivan A. Popov* — popov\_ia@spbstu.ru

## ХРОНИКА

18 октября 2023 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступили кандидат физ.-мат. наук, доцент А. С. Кулешов и аспирант Н. М. Видов (механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва) с докладом на тему «Нелинейные эффекты вблизи многообразия равновесий неголономных систем».

Краткое содержание доклада:

В 1986 г. Я. В. Татаринов заложил основы теории слабо неголономных систем — механических систем с неголономными связями, содержащими малый параметр  $\varepsilon$  и таких, что: 1) при  $\varepsilon = 0$  связи интегрируемы, т. е. получается семейство голономных систем, зависящее от постоянных интегрирования; 2) эти голономные системы — вполне интегрируемые гамильтоновы системы. При  $\varepsilon \neq 0$  поведение таких систем можно рассматривать при помощи асимптотических методов, представляя его как трансгрессию: сочетание движения слегка модифицированной голономной системы с медленным изменением былых констант. В докладе представлено исследование эффекта трансгрессии в двух задачах неголономной динамики: 1) движение тяжелого тонкого твердого стержня по поверхности прямого кругового цилиндра; 2) качение тяжелого однородного шара по неподвижной поверхности в окрестности наинизшей точки (эллиптического типа) данной поверхности.