

# Динамика двойного маятника с вязким трением в шарнирах.

## I. Математическая модель движения и построение диаграммы режимов

А. С. Смирнов<sup>1,2</sup>, И. А. Кравчинский<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения Российской академии наук,  
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

<sup>3</sup> ООО «Центр технологического консалтинга»,  
Российская Федерация, 195277, Санкт-Петербург, Большой Сампсониевский пр., 28/2

**Для цитирования:** Смирнов А. С., Кравчинский И. А. Динамика двойного маятника с вязким трением в шарнирах. I. Математическая модель движения и построение диаграммы режимов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 371–384. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.210>

В работе обсуждаются вопросы динамического поведения двойного математического маятника с идентичными параметрами звеньев и концевых грузов, который испытывает действие вязкого трения в обоих своих шарнирах с различными в общем случае диссипативными коэффициентами. Дается линейная математическая модель движения системы при малых отклонениях и выводится характеристическое уравнение, содержащее два безразмерных диссипативных параметра. Для случая малого демпфирования находятся приближенные аналитические выражения, позволяющие оценить и сопоставить друг с другом факторы затухания при движении системы по каждой из форм колебаний. Строится диаграмма диссипативных режимов движения, которая возникает при разделении плоскости безразмерных параметров дискриминантными кривыми на области с качественно различным характером движения системы. Отмечается, что в рассматриваемой системе может иметь место диссипативный внутренний резонанс и устанавливаются условия его существования в аналитической форме, а также дается их графическая иллюстрация. Статья является первой частью исследования динамики диссипативного двойного маятника, продолжение которого будет представлено в виде отдельной работы «Динамика двойного маятника с вязким трением в шарнирах. II. Диссипативные формы колебаний и оптимизация параметров демпфирования».

*Ключевые слова:* двойной маятник, вязкое демпфирование, малое трение, фактор затухания, дискриминантная кривая, диаграмма диссипативных режимов, диссипативный внутренний резонанс.

**1. Введение.** Динамике и управлению движением многозвенных маятниковых систем посвящено весьма большое количество научных работ, что связано с их широким использованием в прикладных задачах робототехники и биомеханики как элементов разнообразных манипуляторов и многочисленных биоморфных устройств [1–5]. При этом важную роль играет вопрос об учете сил сопротивления

в шарнирных сочленениях подобных конструкций, которые специально вводятся для подавления их колебаний, и влияния этих сил на динамическое поведение и характер движения рассматриваемых систем [6–8]. На этом пути естественным образом возникает необходимость определения, построения и детального исследования форм колебаний в диссипативных системах, которые обобщали бы известное понятие форм колебаний в консервативных системах. Указанным аспектам уделяется явно недостаточное внимание в существующей литературе, а в классических трудах и справочниках по теории механических колебаний данная тема освещается крайне скупо лишь в общих чертах и без каких-либо конкретных числовых примеров, которые прояснили бы ключевые моменты и тонкости, возникающие при построении диссипативных форм колебаний [9–13].

Ввиду того, что наиболее простой многозвенной конструкцией является двойной математический маятник с идентичными звеньями и концевыми грузами, вполне логично именно на этом весьма распространенном примере продемонстрировать последовательно все шаги, необходимые для построения диссипативных форм его колебаний при наличии вязкого трения в обоих шарнирах. Сложность предлагаемого исследования состоит в том, что имеется два независимых коэффициента вязкого демпфирования, комбинации которых могут быть совершенно различными, в отличие от работ [14–16], где диссипативные параметры в шарнирах считались для упрощения одинаковыми, что позволило получить конечные результаты аналитическим путем без особых затруднений. Поэтому представляет несомненный интерес установить зависимость всех основных величин, описывающих диссипативные формы колебаний, от коэффициентов демпфирования, обсудить их качественные и количественные характеристики, а также выявить многие нетривиальные особенности, которые требуют серьезного внимания.

Кроме того, отдельного разговора заслуживают и попутно возникающие задачи оптимизации процессов затухания движений двойного маятника, в которых также можно распорядиться выбором наилучшего по некоторому критерию качества значения не одного лишь диссипативного параметра, когда трение в обоих шарнирах двойного маятника полагается идентичным, а сразу двух коэффициентов вязкого демпфирования, принимая их оба в качестве оптимизируемых параметров. Это обстоятельство вновь существенно усложняет исследование, однако посредством надлежащего подбора указанных коэффициентов оно позволяет обеспечить наиболее эффективное подавление колебаний системы и выявить тем самым предельные возможности в отношении пассивного гашения колебаний [17, 18].

Предлагаемая работа, публикуемая в двух частях, охватывает все указанные вопросы динамического поведения двойного маятника с учетом вязкого трения в обоих его шарнирных сочленениях. Настоящая первая часть работы посвящена изучению математической модели движения диссипативного двойного маятника с рассмотрением сначала варианта малого трения, а затем построением диаграммы диссипативных режимов при произвольных коэффициентах демпфирования и, кроме того, анализом интересного случая диссипативного внутреннего резонанса. Вторая часть работы, которая будет опубликована в виде отдельной статьи, будет посвящена продолжению данного исследования, а именно построению и анализу диссипативных форм колебаний двойного маятника с выявлением условия их независимости от демпфирования и детальным обсуждением данной ситуации, а также вопросам оптимизации параметров вязкого демпфирования.

**2. Математическая модель движения диссипативного двойного маятника.** Рассмотрим расчетную схему двойного математического маятника, полагая для простоты массы его концевых грузов идентичными и равными  $m$  и считая также его длины одинаковыми и равными  $l$ . Кроме того, предположим, что этот маятник испытывает действие вязкого трения в неподвижном и подвижном шарнирах с различными в общем случае коэффициентами демпфирования  $b_1$  и  $b_2$  соответственно (рис. 1).

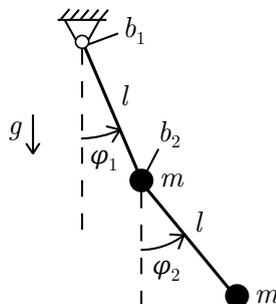


Рис. 1. Расчетная схема двойного маятника с вязким трением в шарнирах.

Построим математическую модель движения этой системы, полагая, что рассматриваются ее малые отклонения. Принимая углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , образуемые звеньями маятника с вертикалью, в качестве обобщенных координат, запишем кинетическую и потенциальную энергии двойного маятника в квадратичной аппроксимации, которые определяются хорошо известными выражениями [14]:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} ml^2 (2\dot{\varphi}_1^2 + 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^T \mathbf{A} \dot{\varphi}, \\ \Pi &= \frac{1}{2} mgl (2\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \frac{1}{2} \varphi^T \mathbf{C} \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T$  — столбец обобщенных координат, а  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{C}$  — матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов линейной модели соответственно:

$$\mathbf{A} = ml^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = mgl \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Для учета влияния вязкого трения в шарнирах двойного маятника запишем диссипативную функцию Рэлея в виде [19]

$$R = \frac{1}{2} (b_1 \dot{\theta}_1^2 + b_2 \dot{\theta}_2^2) = \frac{1}{2} [(b_1 + b_2) \dot{\varphi}_1^2 - 2b_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + b_2 \dot{\varphi}_2^2] = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^T \mathbf{B} \dot{\varphi}, \quad (3)$$

где  $\theta_1 = \varphi_1$ ,  $\theta_2 = \varphi_2 - \varphi_1$  — шарнирные углы поворота, а матрица диссипативных коэффициентов  $\mathbf{B}$  имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Следовательно, уравнения движения диссипативного двойного маятника можно записать в известной матричной форме [9]:

$$\mathbf{A} \ddot{\varphi} + \mathbf{B} \dot{\varphi} + \mathbf{C} \varphi = 0. \quad (5)$$

Разыскивая решение этого матричного уравнения в виде  $\varphi = \Phi e^{\lambda t}$ , приходим к алгебраическому матричному уравнению относительно столбца  $\Phi$ :

$$(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C})\Phi = 0, \quad (6)$$

для которого условие существования нетривиального решения имеет вид

$$\det\{(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C})\} = 0. \quad (7)$$

Из этого характеристического уравнения можно определить собственные значения диссипативного двойного маятника. Подставляя в (7) выражения для матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  согласно (2) и (4), после раскрытия определителя и ряда преобразований придем к уравнению четвертой степени относительно собственных значений  $\lambda$ :

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (8)$$

коэффициенты которого имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} a_0 &= m^2 l^4, & a_1 &= ml^2(b_1 + 5b_2), & a_2 &= 4m^2 gl^3 + b_1 b_2, \\ a_3 &= mgl(b_1 + 3b_2), & a_4 &= 2m^2 g^2 l^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Видно, что все коэффициенты (9) положительны, а диссипативные параметры  $b_1$  и  $b_2$  входят линейно только в те коэффициенты уравнения (8), которые стоят перед нечетными степенями  $\lambda$  и которые обращаются в нуль при  $b_1 = b_2 = 0$  [18]. Для упрощения дальнейшего исследования преобразуем характеристическое уравнение к более удобной форме:

$$Q(p) = p^4 + 2(\nu_1 + 5\nu_2)p^3 + 4(1 + \nu_1\nu_2)p^2 + 2(\nu_1 + 3\nu_2)p + 2 = 0, \quad (10)$$

где введены следующие обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad p = \frac{\lambda}{k}, \quad \nu_1 = \frac{b_1}{2ml^2k}, \quad \nu_2 = \frac{b_2}{2ml^2k}. \quad (11)$$

Поясним эти обозначения:  $k$  — частота малых колебаний обычного маятника длиной  $l$ , которая необходима для обезразмеривания;  $p$  — безразмерный корень характеристического уравнения системы; а параметры  $\nu_1$  и  $\nu_2$  можно назвать безразмерными диссипативными коэффициентами, причем обезразмеривание величин  $b_1$  и  $b_2$  осуществлено однотипным образом. Решая уравнение (10) при помощи численных процедур, можно найти его четыре корня  $p_s$ ,  $s = \overline{1, 4}$ , при любых значениях параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$ .

**3. Исследование случая малого трения.** Начнем с рассмотрения наиболее простого случая малого трения, когда  $\nu_1$  и  $\nu_2$  являются малыми величинами. Отметим сначала, что в рамках консервативной модели, т. е. при  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ , частоты колебаний двойного маятника  $k_{10}$  и  $k_{20}$  имеют следующие значения [14]:

$$k_{10} = \sqrt{2 - \sqrt{2}k}, \quad k_{20} = \sqrt{2 + \sqrt{2}k}. \quad (12)$$

Нетрудно понять, что при малых значениях диссипативных параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$  частоты колебаний двойного маятника с учетом вязкого трения практически не изменятся по сравнению с консервативным вариантом (12) [20]. Тем не менее сколь

угодно малое трение вызывает затухание колебаний, наблюдаемое на практике, поэтому основными характеристиками такого процесса будут являться факторы затухания каждой из форм колебаний, определяемые модулем вещественной части каждой из пар корней характеристического уравнения (10), которые при малых  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , очевидно, являются комплексно-сопряженными. Обращаясь к этому уравнению, определим его решения с точностью до первого порядка малости по величинам  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , используя асимптотические методы решения алгебраических уравнений [21]. Ясно, что решения невозмущенного характеристического уравнения (при отсутствии диссипации, т. е. при  $\nu_1 = \nu_2 = 0$ ) имеют вид

$$p_{1,2} = \pm i\omega_{10}, \quad p_{3,4} = \pm i\omega_{20}, \quad (13)$$

где  $\omega_{10} = k_{10}/k = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$  и  $\omega_{20} = k_{20}/k = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$  — безразмерные частоты колебаний двойного маятника, вычисленные согласно (12). Будем разыскивать решения уравнения (10) при ненулевых значениях  $\nu_1$  и  $\nu_2$  в виде

$$p_{1,2} = -n_1 \pm i\omega_{10}, \quad p_{3,4} = -n_2 \pm i\omega_{20}, \quad (14)$$

где величины  $n_1$  и  $n_2$  представим линейными комбинациями параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$ :

$$n_1 = \alpha_1\nu_1 + \beta_1\nu_2, \quad n_2 = \alpha_2\nu_1 + \beta_2\nu_2, \quad (15)$$

причем коэффициенты  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$  и  $\beta_2$  подлежат определению после подстановки (14) в уравнение (10) и выполнения его с требуемой точностью. В результате указанных действий можно получить следующие значения:

$$\alpha_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}, \quad \beta_1 = \frac{10 - 7\sqrt{2}}{4}, \quad \beta_2 = \frac{10 + 7\sqrt{2}}{4}. \quad (16)$$

Видно, что эти величины оказываются вещественными, т. е. поправка первого порядка малости действительно входит только в вещественные части решений (14), которая нас и интересует, тогда как поправка в мнимую часть будет иметь, очевидно, второй порядок малости. Эти выводы подтверждают, что частоты колебаний при малых значениях  $\nu_1$  и  $\nu_2$  могут быть приняты такими же, как и в консервативной модели. Таким образом, окончательные приближенные выражения для величин  $n_1$  и  $n_2$ , представляющих собой искомые факторы затухания, получаются в результате подстановки (16) в (15):

$$n_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\nu_1 + \frac{10 - 7\sqrt{2}}{4}\nu_2, \quad n_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}\nu_1 + \frac{10 + 7\sqrt{2}}{4}\nu_2. \quad (17)$$

Чтобы сопоставить эти значения, образуем отношение величин  $n_2$  и  $n_1$ , вводя при этом в рассмотрение безразмерный параметр  $\eta = \nu_2/\nu_1$ :

$$f = \frac{n_2}{n_1} = \frac{2 + \sqrt{2} + (10 + 7\sqrt{2})\eta}{2 - \sqrt{2} + (10 - 7\sqrt{2})\eta}. \quad (18)$$

Подчеркнем, что хотя значения  $\nu_1$  и  $\nu_2$  предполагаются малыми, параметр  $\eta$  может принимать любые значения в диапазоне  $0 \leq \eta < \infty$ . Видно, что на левой границе этого интервала, когда  $\eta = 0$  ( $\nu_2 = 0$ , т. е. в подвижном шарнире трение отсутствует), имеем  $f = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5.828$ , тогда как на правой границе этого интервала,

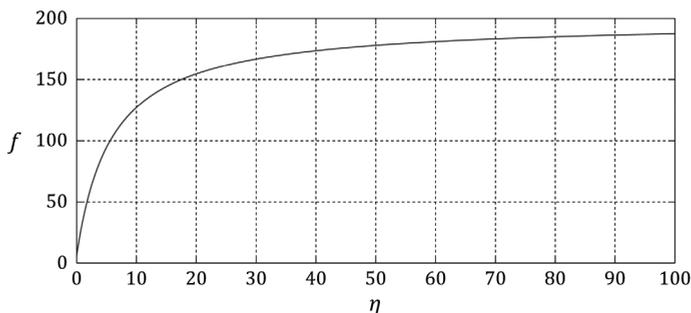


Рис. 2. График зависимости величины  $f = n_2/n_1$  от параметра  $\eta = \nu_2/\nu_1$ .

когда  $\eta = \infty$  ( $\nu_1 = 0$ , т.е. в неподвижном шарнире трение отсутствует), имеем  $f = 99 + 70\sqrt{2} \approx 197.99$ . Наконец, в случае  $\eta = 1$  ( $\nu_1 = \nu_2$ , т.е. в обоих шарнирах трение одинаковое) будем иметь  $f = 17 + 12\sqrt{2} \approx 33.971$ . Таким образом, видно, что в зависимости от параметра  $\eta = \nu_2/\nu_1$  движения системы по первой и второй формам колебаний при малом трении могут гаситься совершенно различно в количественном плане по отношению друг к другу. Тем не менее ясно, что  $n_2 > n_1$ , а потому вторая форма всегда будет подавляться быстрее, чем первая, т.е. в общем случае задания начальных условий движения будут происходить достаточно быстрое исчезновение колебаний по второй форме и их длительное затухание по первой форме (конечно, формально полное затухание происходит лишь за бесконечное время). График дробно-рациональной функции  $f(\eta)$  согласно (18) для наглядности приведен на рис. 2.

#### 4. Построение диаграммы диссипативных режимов движения.

В предыдущем пункте было показано, что при малых величинах  $\nu_1$  и  $\nu_2$  корни уравнения (10) являются комплексно-сопряженными. Ясно, что такая ситуация будет сохраняться и при достаточно небольших значениях этих параметров, однако при их постепенном увеличении два корня этого уравнения уже станут вещественными и отрицательными, тогда как два других корня по-прежнему останутся комплексно-сопряженными, а если  $\nu_1$  и  $\nu_2$  вовсе будут являться весьма значительными, то все четыре корня окажутся вещественными и отрицательными. Чтобы разобраться, при каких значениях данных параметров будет реализовываться тот или иной вариант, перейдем к построению и обсуждению диаграммы диссипативных режимов движения двойного маятника на плоскости безразмерных параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Поскольку оба эти параметра положительны, то нас будет интересовать лишь первый квадрант указанной плоскости. Разделим его на области с качественно разным характером движения, чему отвечает наличие различного числа вещественных корней характеристического уравнения (10). Ясно, что границам этих областей будут отвечать те кривые на плоскости  $\nu_1\nu_2$ , для которых уравнение (10) имеет кратные корни. Чтобы установить эти кривые, которые мы будем называть дискриминантными, необходимо решить систему уравнений  $Q(p) = 0$ ,  $Q'(p) = 0$ , которая в явном виде будет:

$$\begin{cases} Q(p) = p^4 + 2(\nu_1 + 5\nu_2)p^3 + 4(1 + \nu_1\nu_2)p^2 + 2(\nu_1 + 3\nu_2)p + 2 = 0, \\ Q'(p) = 4p^3 + 6(\nu_1 + 5\nu_2)p^2 + 8(1 + \nu_1\nu_2)p + 2(\nu_1 + 3\nu_2) = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Выразим из второго уравнения (19), например,  $\nu_1$ :

$$\nu_1 = -\frac{2p(p^2 + 2) + 3(5p^2 + 1)\nu_2}{3p^2 + 1 + 4p\nu_2} \quad (20)$$

и подставим это соотношение в первое уравнение (19), в результате чего после упрощений получим:

$$4p^2(5p^2 - 3)\nu_2^2 + 4p(p^4 + 2p^2 - 2)\nu_2 + p^6 - p^4 - 2p^2 - 2 = 0. \quad (21)$$

Решения этого квадратного уравнения относительно  $\nu_2$  имеют вид

$$\nu_2 = \frac{p^4 + 2p^2 - 2 \pm (2p^2 + 1)\sqrt{-p^4 + 4p^2 - 2}}{2p(3 - 5p^2)}. \quad (22)$$

Подставляя эти выражения в формулу (20), получим после серии несложных преобразований:

$$\nu_1 = \frac{p^4 - 2p^2 - 2 \mp (2p^2 + 1)\sqrt{-p^4 + 4p^2 - 2}}{2p(1 - p^2)}, \quad (23)$$

причем в соотношениях (22) и (23) верхние и нижние знаки соответствуют друг другу. Уравнения (22) и (23) представляют собой параметрические уравнения искомого дискриминантных кривых, отвечающих случаю наличия кратных корней характеристического уравнения, причем величина  $p$ , которая, конечно, является вещественной и отрицательной, играет роль параметра. Для удобства последующего построения этих кривых запишем их далее по отдельности. Так, беря нижние знаки в формулах (22) и (23), получим:

$$\begin{cases} \nu_1(p) = \frac{p^4 - 2p^2 - 2 + (2p^2 + 1)\sqrt{-p^4 + 4p^2 - 2}}{2p(1 - p^2)}, \\ \nu_2(p) = \frac{p^4 + 2p^2 - 2 - (2p^2 + 1)\sqrt{-p^4 + 4p^2 - 2}}{2p(3 - 5p^2)}, \end{cases} \quad (24)$$

а беря в этих формулах верхние знаки, будем иметь:

$$\begin{cases} \nu_1(p) = \frac{p^4 - 2p^2 - 2 - (2p^2 + 1)\sqrt{-p^4 + 4p^2 - 2}}{2p(1 - p^2)}, \\ \nu_2(p) = \frac{p^4 + 2p^2 - 2 + (2p^2 + 1)\sqrt{-p^4 + 4p^2 - 2}}{2p(3 - 5p^2)}. \end{cases} \quad (25)$$

Очевидно, что для вещественности величин  $\nu_1$  и  $\nu_2$  в обоих случаях следует потребовать положительность подкоренного выражения, т. е. выполнение неравенства  $-p^4 + 4p^2 - 2 > 0$ , откуда ввиду отрицательности  $p$  вытекает, что варьировать этот параметр необходимо в следующих пределах:

$$-1.848 \approx -\sqrt{2 + \sqrt{2}} \leq p \leq -\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx -0.765. \quad (26)$$

Далее рассмотрим по отдельности каждую из зависимостей (24) и (25) и разберемся с тем, как они будут себя вести при уменьшении  $p$  в диапазоне (26) от верхней

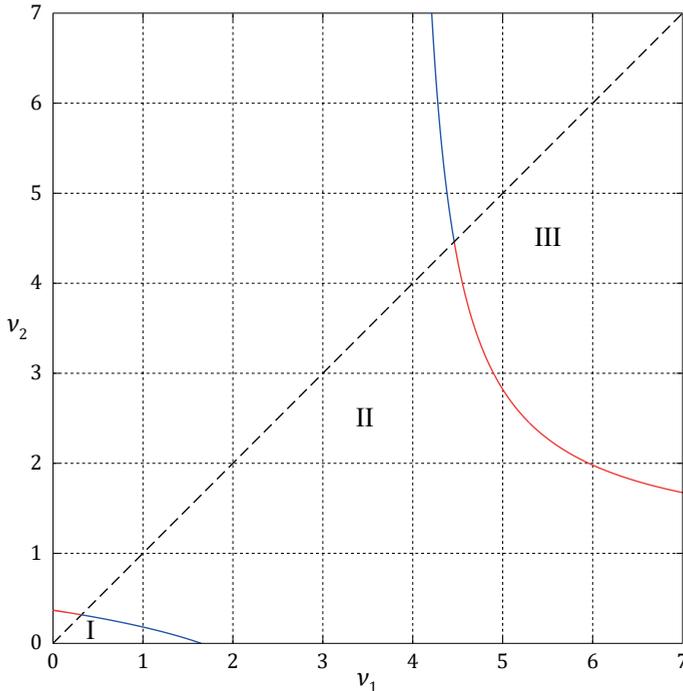


Рис. 3. Диаграмма диссипативных режимов движения на плоскости  $\nu_1\nu_2$ .

границы до нижней. При  $p = -\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx -0.765$  зависимости (24) и (25) дают одну и ту же точку  $\nu_1 = \nu_2 = \sqrt{10+7\sqrt{2}} \approx 4.461$ , лежащую на биссектрисе первого квадранта. Далее при уменьшении  $p$  от  $-\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx -0.765$  до  $-\sqrt{3/5} \approx -0.775$ , т. е. в весьма узких пределах, кривые (24) и (25) расходятся от указанной выше точки, причем при  $p \rightarrow -\sqrt{3/5} + 0$  для кривой (24) будем иметь  $\nu_1 \rightarrow \sqrt{15} \approx 3.873$ , а  $\nu_2 \rightarrow +\infty$ , тогда как для кривой (25) имеем в этих условиях  $\nu_1 \rightarrow 41/(2\sqrt{15}) \approx 5.293$ , а для  $\nu_2$  после раскрытия неопределенности вида  $0/0$  имеем  $\nu_2 \rightarrow 19/(2\sqrt{15}) \approx 2.453$ . Дальнейшее уменьшение  $p$  приводит к тому, что кривая (24) оказывается вне первого квадранта и попадает в него лишь при достижении значения  $p_*$ , подлежащего определению. Что же касается кривой (25), то она в указанных условиях продолжается от точки  $\nu_1 = 41/(2\sqrt{15})$ ,  $\nu_2 = 19/(2\sqrt{15})$ , причем при  $p \rightarrow -1 + 0$  будем иметь  $\nu_1 \rightarrow +\infty$ , а  $\nu_2 \rightarrow 1$ , а при дальнейшем понижении  $p$  она также оказывается вне первого квадранта вплоть до того, как  $p$  примет значение  $p_{**}$ , также пока неизвестное. Нетрудно понять, что кривая (24) попадет в первый квадрант в результате пересечения с осью  $\nu_2 = 0$ , а кривая (25) окажется в этом квадранте вследствие пересечения с осью  $\nu_1 = 0$ . Приравнявая нулю выражение для  $\nu_2$  из (24) и выражение для  $\nu_1$  из (25), можно установить соответственно, что  $p_* = -1.507$ , при этом  $\nu_1 = 1.647$ , а  $p_{**} = -1.837$ , при этом  $\nu_2 = 0.368$ . Наконец, будем уменьшать  $p$  от  $p_* = -1.507$  до  $-\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx -1.848$  в формулах (24), а также уменьшать  $p$  от  $p_{**} = -1.837$  до  $-\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx -1.848$  в формулах (25), вследствие чего получим оставшиеся участки кривых, расположенные в первом квадранте. Отметим, что эти участки при  $p = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$  стыкуются в точке  $\nu_1 = \nu_2 = \sqrt{10-7\sqrt{2}} \approx 0.317$ ,

которая лежит на биссектрисе первого квадранта, как и та точка, из которой мы начали построение кривых при  $p = -\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ . На рис. 3 участки кривых, отвечающих формулам (24), построены синим цветом, а участки кривых, отвечающих формулам (25) — красным цветом. Объединяя попарно участки, стыкующиеся друг с другом на биссектрисе первого квадранта (которая представлена пунктирной прямой), мы получаем две результирующие кривые, разделяющие первый квадрант плоскости  $\nu_1\nu_2$  на три области, классификация которых такова: в области I имеются две пары комплексно-сопряженных корней, в области II — пара комплексно-сопряженных корней и два отрицательных корня, и, наконец, в области III — четыре отрицательных корня. Это означает, что обе диссипативные формы колебаний существуют только в области I, в области II будет иметь место только одна диссипативная форма колебаний, тогда как в области III диссипативных форм колебаний уже не существует. Разумеется, данные заключения носят лишь качественный характер, тогда как количественный анализ диссипативных форм колебаний представляет собой отдельную и весьма трудоемкую задачу.

**5. Условие внутреннего резонанса.** Обратимся к более детальному анализу области I на диаграмме диссипативных режимов движения, в которой имеются две пары комплексно-сопряженных корней. Выясним, возможно ли для рассматриваемой диссипативной системы существование случая диссипативного внутреннего резонанса, означающего совпадение частот ее колебаний при движении по каждой из форм колебаний. Этот случай важен не только с теоретической точки зрения, но также может представлять и определенный практический интерес, так как движение двойного маятника в общем случае будет являться одночастотным. С этой целью положим, что корни уравнения (10) есть

$$p_{1,2} = -n_1 \pm i\omega, \quad p_{3,4} = -n_2 \pm i\omega, \quad (27)$$

т. е. все они имеют одинаковую по абсолютной величине мнимую часть, причем  $\omega$  и есть общая частота колебаний. Тогда характеристический полином  $Q(p)$  можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q(p) &= (p + n_1 - i\omega)(p + n_1 + i\omega)(p + n_2 - i\omega)(p + n_2 + i\omega) = \\ &= p^4 + 2(n_1 + n_2)p^3 + (n_1^2 + n_2^2 + 2\omega^2 + 4n_1n_2)p^2 + \\ &+ 2[n_1(n_2^2 + \omega^2) + n_2(n_1^2 + \omega^2)]p + (n_1^2 + \omega^2)(n_2^2 + \omega^2). \end{aligned} \quad (28)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях в выражениях (10) и (28), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = \nu_1 + 5\nu_2, \\ n_1^2 + n_2^2 + 2\omega^2 + 4n_1n_2 = 4(1 + \nu_1\nu_2), \\ n_1(n_2^2 + \omega^2) + n_2(n_1^2 + \omega^2) = \nu_1 + 3\nu_2, \\ (n_1^2 + \omega^2)(n_2^2 + \omega^2) = 2. \end{cases} \quad (29)$$

Переписывая третье из этих уравнений в виде

$$(n_1 + n_2)(n_1n_2 + \omega^2) = \nu_1 + 3\nu_2 \quad (30)$$

и исключая отсюда  $n_1 + n_2$  посредством первого уравнения (29), можно выразить комбинацию  $n_1 n_2$ :

$$n_1 n_2 = \frac{\nu_1 + 3\nu_2}{\nu_1 + 5\nu_2} - \omega^2. \quad (31)$$

Обращаясь теперь ко второму уравнению (29) и записывая его в виде

$$(n_1 + n_2)^2 + 2n_1 n_2 + 2\omega^2 = 4(1 + \nu_1 \nu_2), \quad (32)$$

вновь исключим из него  $n_1 + n_2$  посредством первого уравнения (29) и  $n_1 n_2$  посредством уравнения (31), в результате чего будем иметь:

$$(\nu_1 + 5\nu_2)^3 + 2(\nu_1 + 3\nu_2) = 4(1 + \nu_1 \nu_2)(\nu_1 + 5\nu_2). \quad (33)$$

Отметим, что при этом слагаемые с  $\omega$  сокращаются, так что уравнение (33) и есть неявное уравнение искомой кривой на плоскости  $\nu_1 \nu_2$ , отвечающей случаю внутреннего резонанса, которая, очевидно, должна располагаться внутри области I. Уравнение (33) также может быть переписано в альтернативной форме:

$$\nu_1^3 + 125\nu_2^3 + 11\nu_1 \nu_2 (\nu_1 + 5\nu_2) = 2(\nu_1 + 7\nu_2). \quad (34)$$

Отсюда вытекает, что при  $\nu_1 = 0$  будем иметь  $\nu_2 = \sqrt{14/125} \approx 0.335$ , а при  $\nu_2 = 0$  —  $\nu_1 = \sqrt{2} \approx 1.414$ . Подчеркнем также, что последнее из уравнений системы (29) нами не было использовано при получении уравнения (33). Перепишем это последнее уравнение (29) в виде

$$(n_1 n_2)^2 + [(n_1 + n_2)^2 - 2n_1 n_2] \omega^2 + \omega^4 = 2 \quad (35)$$

и подставим в него  $n_1 + n_2$  согласно первому уравнению (29) и  $n_1 n_2$  согласно (31), и в результате несложных преобразований получим биквадратное уравнение относительно  $\omega$ :

$$4\omega^4 + \left[ (\nu_1 + 5\nu_2)^2 - 4\frac{\nu_1 + 3\nu_2}{\nu_1 + 5\nu_2} \right] \omega^2 + \left( \frac{\nu_1 + 3\nu_2}{\nu_1 + 5\nu_2} \right)^2 - 2 = 0. \quad (36)$$

Рассматривая его совместно с уравнением (33), можно при необходимости установить, как изменяется частота  $\omega$  при движении по кривой, отвечающей случаю внутреннего резонанса. Остается лишь построить область I в увеличенном масштабе и провести внутри нее кривую (33) (она изображена зеленым цветом), которая разделит эту область на две подобласти I, a и I, b (рис. 4). Очевидно, что в подобласти I, a,

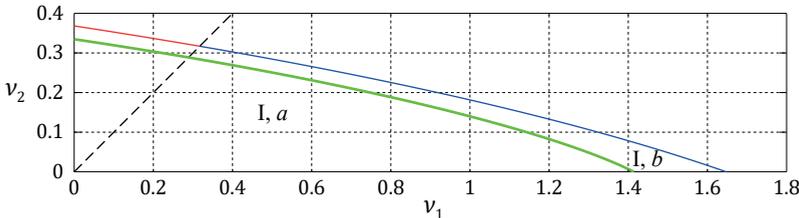


Рис. 4. Кривая, отвечающая случаю внутреннего резонанса, в области I на плоскости  $\nu_1 \nu_2$ .

которая примыкает к точке  $\nu_1 = \nu_2 = 0$  (отвечающей консервативному варианту) и содержит внутри себя зону малых значений  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , подробно изученную ранее, частота колебаний при движении по первой форме колебаний диссипативной системы будет меньше частоты колебаний при движении по второй форме колебаний, и эта ситуация является типичной. Что же касается подобласти I,  $b$ , то в ней будет реализовываться противоположная ситуация, которая является весьма нетривиальной. Эти заключения лишней раз подчеркивают, что установление характера диссипативных форм колебаний требует весьма скрупулезного анализа, чему и будет посвящено дальнейшее исследование.

**6. Заключение.** В настоящей работе была рассмотрена динамика двойного математического маятника, обладающего идентичными звеньями и концевыми грузами, с вязким трением в обоих его шарнирных сочленениях. Для случая малых значений диссипативных коэффициентов были получены приближенные аналитические выражения для факторов затухания каждой из форм колебаний и показано, что вторая форма при любых соотношениях между параметрами демпфирования подавляется силами сопротивления намного быстрее, чем первая форма. При рассмотрении произвольных значений диссипативных коэффициентов была построена диаграмма режимов движения двойного маятника на плоскости безразмерных параметров демпфирования, позволяющая выявить поведение корней характеристического уравнения при изменении этих параметров. Помимо этого, было установлено, что в диссипативной системе возможен внутренний резонанс, отвечающий равенству частот колебаний при движении по каждой из форм колебаний и заслуживающий отдельного внимания ввиду его возможного практического использования. Полученные результаты были приведены в удобной графической форме, позволяющей наиболее детально проследить все обнаруженные качественные и количественные особенности. В следующей статье «Динамика двойного маятника с вязким трением в шарнирах. II. Диссипативные формы колебаний и оптимизация параметров демпфирования» будет рассмотрен непосредственно вопрос о построении и анализе диссипативных форм колебаний двойного маятника на основе разумного сочетания аналитических и численных методов исследования, а также будет поставлено и решено несколько сопутствующих задач об оптимальном пассивном гашении колебаний рассматриваемой системы.

## Литература

1. Формальский А. М. *Управление движением неустойчивых объектов*. Москва, Физматлит (2014).
2. Перегудова О. А., Макаров Д. С. Синтез управления трехзвенным манипулятором. *Автоматизация процессов управления* **2** (40), 109–113 (2015).
3. Анохин Н. В. Приведение многозвенного маятника в положение равновесия с помощью одного управляющего момента. *Известия РАН. Теория и системы управления* **5**, 44–53 (2013).
4. Смольников Б. А., Юревич Е. И. К проблеме биоморфного управления движениям роботов. *Робототехника и техническая кибернетика* **1** (6), 17–20 (2015).
5. Тяжелов А. А., Кизилова Н. Н., Фищенко В. А., Яремин С. Ю., Карпинский М. Ю., Карпинская Е. Д. Анализ стабิโลграмм на основе математической модели тела человека как многозвенной системы. *Травма* **13** (4), 17–25 (2012).
6. Sawant K. R., Shrikanth V. Energy dissipation and behavioral regimes in an autonomous double pendulum subjected to viscous and dry friction damping. *European Journal of Physics* **42** (5), 055008 (2021).
7. Bendersky S., Sandler B. Investigation of a spatial double pendulum: An engineering approach. *Discrete Dynamics in Nature and Society* **2006**, 1–22 (2006).

8. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Dissipative Model of Double Mathematical Pendulum with Noncollinear Joints. *Lecture Notes in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference "Modern Engineering: Science and Education"*. St. Petersburg, Russia, June 2021, 38–47 (2022).
9. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний*. Москва, Высшая школа (1980).
10. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле*. Москва, Наука (1967).
11. Магнус К. *Колебания: введение в исследование колебательных систем*. Москва, Мир (1982).
12. Болотин В. В. (ред.). *Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение (1978).
13. Биргер И. А., Пановко Я. Г. (ред.). *Прочность, устойчивость, колебания*. Т. 3. Москва, Машиностроение (1968).
14. Леонтьев В. А., Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимальное демпфирование колебаний двухзвенного манипулятора. *Робототехника и техническая кибернетика* **2** (19), 52–59 (2018).
15. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 2, 357–365 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215>
16. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. II. Решение задачи и анализ результатов. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 1, 121–138 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.111>
17. Болотник Н. Н. *Оптимизация амортизационных систем*. Москва, Наука (1983).
18. Смольников Б. А. *Проблемы механики и оптимизации роботов*. Москва, Наука (1991).
19. Карман Т., Био М. *Математические методы в инженерном деле*. Москва; Ленинград, ГИТТЛ (1946).
20. Блехман И. И., Мышкис А. Д., Пановко Я. Г. *Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики*. Москва, Наука (1983).
21. Найфэ А. *Введение в методы возмущений*. Москва, Мир (1984).

Статья поступила в редакцию 7 августа 2023 г.;  
доработана 28 октября 2023 г.;  
рекомендована к печати 9 ноября 2023 г.

#### Контактная информация:

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент, мл. науч. сотр.; smirnov.alexey.1994@gmail.com  
Кравчинский Игорь Андреевич — аспирант; igor.krav2000@gmail.com

## Dynamics of a double pendulum with viscous friction in the joints. I. Mathematical model of motion and construction of the regime diagram

A. S. Smirnov<sup>1,2</sup>, I. A. Kravchinskiy<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,

29, ul. Polytechnicheskaya, St. Petersburg, 195251, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,  
61, Bolshoy pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

<sup>3</sup> LLC "Change Mobility Together",

28/2, Bolshoy Sampsonievsky pr., St. Petersburg, 195277, Russian Federation

**For citation:** Smirnov A. S., Kravchinskiy I. A. Dynamics of a double pendulum with viscous friction in the joints. I. Mathematical model of motion and construction of the regime diagram. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 371–384. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.210> (In Russian)

The paper discusses the dynamic behavior of a double mathematical pendulum with identical parameters of links and end loads, which is under the influence of viscous friction in both of its joints with generally different dissipative coefficients. A linear mathematical model of the system motion for small deviations is given, and a characteristic equation

containing two dimensionless dissipative parameters is derived. For the case of low damping, approximate analytical expressions are found that make it possible to evaluate and compare with each other the damping factors during the motion of the system on each of the oscillation modes. A diagram of dissipative motion regimes is constructed, which arises when the plane of dimensionless parameters is divided by discriminant curves into regions with a qualitatively different character of the system motion. It is noted that a dissipative internal resonance can take place in the system under consideration, and the conditions for its existence in an analytical form are established, as well as their graphic illustration is also given. This article is the first part of the study of the dynamics of a dissipative double pendulum, the continuation of which will be presented as a separate work “Dynamics of a double pendulum with viscous friction in the joints. II. Dissipative oscillation modes and optimization of damping parameters”.

*Keywords:* double pendulum, viscous damping, low friction, damping factor, discriminant curve, dissipative regime diagram, dissipative internal resonance.

## References

1. Formalskii A. M. *Motion control of unstable objects*. Moscow, Fizmatlit Publ. (2014). (In Russian)
2. Peregudova O. A., Makarov D. S. Control synthesis for three-link manipulator. *Automation of Control Processes* **2** (40), 109–113 (2015). (In Russian)
3. Anokhin N. V. Bringing a multilink pendulum to the equilibrium position using a single control torque. *Izvestiia RAN. Teoriia i sistemy upravleniia* **5**, 44–53 (2013). (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Computer and Systems Sciences International* **52** (5), 717–725 (2013)].
4. Smolnikov B. A., Yurevich E. I. About the problem of biomorphic robot motion control. *Robotics and Technical Cybernetics* **1** (6), 17–20 (2015). (In Russian)
5. Tyazhelov A. A., Kizilova N. N., Fischenko V. A., Yaremin S. Yu., Karpinsky M. Yu., Karpinskaya Ye. D. Analysis of posturography based on mathematical model of human body as multilink system. *Trauma* **13** (4), 17–25 (2012). (In Russian)
6. Sawant K. R., Shrikanth V. Energy dissipation and behavioral regimes in an autonomous double pendulum subjected to viscous and dry friction damping. *European Journal of Physics* **42** (5), 055008 (2021).
7. Bendersky S., Sandler B. Investigation of a spatial double pendulum: An engineering approach. *Discrete Dynamics in Nature and Society* **2006**, 1–22 (2006).
8. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Dissipative Model of Double Mathematical Pendulum with Noncollinear Joints. *Lecture Notes in Mechanical Engineering. Selected Contributions from the Conference “Modern Engineering: Science and Education”*. St. Petersburg, Russia, June 2021, 38–47 (2022).
9. Biderman V. L. *Theory of mechanical oscillations*. Moscow, Vysshaya shkola Publ. (1980). (In Russian)
10. Timoshenko S. P. *Vibration problems in engineering*. Toronto; New York; London, D. Van Nostrand Company (1955) [Rus. ed.: Timoshenko S. P. *Kolebaniya v inzhenernom dele*. Moscow, Nauka Publ. (1967)].
11. Magnus K. *Schwingungen. Eine Einführung in die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. Stuttgart, Teubner (1961) [Rus. ed.: Magnus K. *Kolebaniia: vvedenie v issledovanie kolebatel'nykh sistem*. Moscow, Mir Publ. (1982)].
12. Bolotin V. V. (ed). *Vibrations in technology. Directory. Vol. 1. Oscillations of linear systems*. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1978). (In Russian)
13. Birger I. A., Panovko Ya. G. (eds). *Strength, stability, oscillations*. Vol. 3. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1968). (In Russian)
14. Leontev V. A., Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimal damping of two-link manipulator oscillations. *Robotics and Technical Cybernetics* **2** (19), 52–59 (2018). (In Russian)
15. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. I. Formulation of the problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 2, 357–365 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics* **55**, iss. 2, 243–248 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215>].
16. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. II. Solving the problem and analyzing the results. *Vestnik of Saint*

*Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10**(68), iss. 1, 121–138 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.111> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 1, 93–106 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.111>].

17. Bolotnik N. N. *Optimization of amortization systems*. Moscow, Nauka Publ. (1983). (In Russian)

18. Smolnikov B. A. *Problems of mechanics and robotoptimization*. Moscow, Nauka Publ. (1991). (In Russian)

19. Karman von T., Biot M. A. *Mathematical methods in engineering*. New York, McGraw-Hill (1940) [Rus. ed.: Karman T., Bio M. *Matematicheskie metody v inzhenernom dele*. Moscow; Leningrad, GITTL Publ. (1946)].

20. Blekhman I. I., Myshkis A. D., Panovko Ya. G. *Mechanics and applied mathematics. Logic and features of applications of mathematics*. Moscow, Nauka Publ. (1983). (In Russian)

21. Nayfeh A. H. *Introduction to perturbation techniques*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, John Wiley & Sons (1981) [Rus. ed.: Nayfeh A. *Vvedenie v metody vozmushchenii*. Moscow, Mir Publ. (1984)].

Received: August 7, 2023  
Revised: October 28, 2023  
Accepted: November 9, 2023

#### Authors' information:

Alexey S. Smirnov — [smirnov.alexey.1994@gmail.com](mailto:smirnov.alexey.1994@gmail.com)

Igor A. Kravchinskiy — [igor.krav2000@gmail.com](mailto:igor.krav2000@gmail.com)

## ХРОНИКА

22 ноября 2023 г. на заседании секции теоретической механики им. проф. Н. Н. Поляхова в Доме ученых им. М. Горького (Санкт-Петербург) выступил кандидат техн. наук, доцент А. А. Суханов (Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого) с докладом на тему «Об одной модели трения скольжения».

Краткое содержание доклада:

В докладе рассмотрен оригинальный взгляд на природу возникновения трения скольжения между твердыми телами, называемого сухим трением. В отличие от общепризнанной модели сухого трения, заключающейся в контактном взаимодействии и деформировании шероховатостей соприкасающихся поверхностей тел, предложена альтернативная модель, в которой сила трения не является деформационной силой, а представляет собой касательную проекцию силы нормального давления со стороны шероховатостей, выступающих в роли усредненных наклонных плоскостей, вдоль которых «поднимается» одно тело над другим. Предложенная модель сухого трения дает полное теоретическое обоснование эмпирическому закону Амонтона — Кулона, не противоречит результатам сложных относительных движений с ограничениями и, в частности, легко объясняет так называемый парадокс Пенлеве. Проведенные эксперименты наглядно демонстрируют и подтверждают предложенную модель сухого трения.