

АСТРОНОМИЯ

УДК 531.36

MSC 70E15

О приближении поля притяжения твердого тела полем притяжения четверки материальных точек одинаковой массы

А. А. Буров, Е. А. Никонова, В. И. Никонов

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Российская Федерация, 119333, Москва, ул. Вавилова, 44/2

Для цитирования: Буров А. А., Никонова Е. А., Никонов В. И. О приближении поля притяжения твердого тела полем притяжения четверки материальных точек одинаковой массы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 385–394. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.211>

Изучается задача о приближении гравитационного потенциала твердого тела потенциалом системы четырех одинаковых точечных масс. Рассматривая потенциал в виде разложения по параметру, характеризующему отношение среднего размера тела к расстоянию до пробной точки пространства, предлагается подход к построению приближенного выражения вплоть до слагаемых третьего порядка малости. Этот подход применяется для построения модели поля притяжения ядра кометы 67P/Чурюмова — Герасименко.

Ключевые слова: моменты инерции твердого тела, приближение потенциала притяжения, комета 67P/Чурюмова — Герасименко.

1. Введение. Э. Дж. Раус ([1], с. 42 по русскому изданию¹) предложил оригинальный, опирающийся на аффинные преобразования способ представления образованного интегралами инерции тензора второго порядка² произвольного твердого тела как такого же тензора второго порядка для четверки материальных точек одинаковой массы. При таком подходе остается некоторая свобода выбора положения точек. В настоящей работе обсуждается вопрос о том, как воспользоваться этой свободой, чтобы не только осуществить указанное представление, но и наилучшим, в

¹См. также [2], с. 31 по английскому изданию.

²Иногда именуемого тензором Эйлера — Пуансо.

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

смысле квадратичного уклонения, образом приблизить компоненты образованного интегралами инерции тензора третьего порядка. Интерес к данной задаче обусловлен тем обстоятельством, что компоненты этих тензоров второго и третьего порядков играют решающую роль в представлении потенциала притяжения небесных тел в виде ряда Лапласа (см., например, [3, 4]).

2. Интегралы инерции произвольных порядков. Пусть \mathcal{B} — твердое тело, $Ox_1x_2x_3$ — связанная с этим телом правая декартова система координат. Величины

$$I_{k_1k_2k_3} = \iiint_{\mathcal{B}} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} dm(\mathbf{x}) \quad (1)$$

называют интегралами инерции, или компонентами тензора Эйлера—Пуансо порядка $k = k_1 + k_2 + k_3$. Здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ — координаты радиуса-вектора \overrightarrow{OP} некоторой точки P тела; $dm(\mathbf{x})$ — элемент массы тела, сосредоточенной в точке P [3, 4]. Интегралы инерции как коэффициенты присутствуют в разложении потенциала притяжения в ряд Лапласа (см. прил. 1).

Механическая интерпретация интегралов инерции младших порядков хорошо известна. Так $I_{000} = m$, т. е. не что иное, как масса тела \mathcal{B} . Далее, вектор $m\overrightarrow{OZ} = (I_{100}, I_{010}, I_{001})^T$ определяет положение центра масс тела — точки Z . Наконец, образованный интегралами инерции тензор второго порядка

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{pmatrix} \quad (2)$$

тесно связан с тензором инерции \mathbf{J} тела \mathcal{B} относительно точки O с помощью соотношений

$$\mathbf{J} = \text{tr}(\mathbf{I}_2)\mathbf{E} - \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{I}_2 = \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{J})\mathbf{E} - \mathbf{J}, \quad (3)$$

где $\text{tr}(\cdot)$ — след матрицы; \mathbf{E} — единичная 3×3 -матрица. Как известно (см., например, [3, 5]), у тензоров \mathbf{J} и \mathbf{I}_2 общие собственные векторы, определяющие главные оси инерции тела.

3. Задача Рауса и ее обобщение. Задача, поставленная Э. Дж. Раусом, может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеется четверка материальных точек одинаковой массы. Спрашивается, как расположить эти точки в пространстве, чтобы тензор инерции образованного ими твердого тела совпадал с главным центральным тензором инерции данного тела \mathcal{B} , если предполагается, что суммарная масса точек равна массе тела \mathcal{B} .

Решение Э. Дж. Рауса (см. [1], с. 42, см. также [2], с. 31) приведем в следующем изложении. Пусть начало системы отсчета $Ox_1x_2x_3$ совпадает с центром масс тела \mathcal{B} , а ее оси направлены по главным центральным осям инерции тела. Обозначим A' , B' , C' и D' как вершины правильного тетраэдра с центром в точке O . Введем связанную с тетраэдром систему отсчета $O\xi_1\xi_2\xi_3$ такую, что в ней координаты векторов $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ и $\overrightarrow{OD'}$ для определенности имеют вид

$$\mathbf{a}' = (-1, 1, 1)^T, \quad \mathbf{b}' = (1, -1, 1)^T, \quad \mathbf{c}' = (1, 1, -1)^T, \quad \mathbf{d}' = (-1, -1, -1)^T.$$

Положение системы отсчета $O\xi_1\xi_2\xi_3$ относительно системы отсчета $Ox_1x_2x_3$ задается ортогональной матрицей

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix},$$

зависящей в общем случае от трех параметров, например, корабельных углов φ , θ , ψ [6]:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \cos \psi \cos \theta, & \alpha_2 &= \sin \theta, & \alpha_3 &= -\sin \psi \cos \theta, \\ \beta_1 &= \sin \varphi \sin \psi - \cos \varphi \cos \psi \sin \theta, & \beta_2 &= \cos \varphi \cos \theta, & \beta_3 &= \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi, \\ \gamma_1 &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \sin \theta, & \gamma_2 &= -\sin \varphi \cos \theta, & \gamma_3 &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \theta \sin \psi. \end{aligned}$$

Иными словами, координаты векторов $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ и $\overrightarrow{OD'}$ в системе отсчета $Ox_1x_2x_3$ записываются как

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{S}\mathbf{a}', \quad \mathbf{b}'' = \mathbf{S}\mathbf{b}', \quad \mathbf{c}'' = \mathbf{S}\mathbf{c}', \quad \mathbf{d}'' = \mathbf{S}\mathbf{d}'.$$

Наконец, выполним преобразование \mathbf{T} : растянем тетраэдр вдоль осей системы отсчета $Ox_1x_2x_3$ в $\sqrt{I_{200}/mR^2}$, $\sqrt{I_{020}/mR^2}$ и $\sqrt{I_{002}/mR^2}$ раз соответственно. Здесь R — характерный размер тела \mathcal{B} , например радиус шара, объем которого равен объему тела. Это преобразование имеет вид

$$\mathbf{T}: \quad \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x}'', \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{I_{200}/mR^2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{I_{020}/mR^2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{I_{002}/mR^2} \end{pmatrix}.$$

В итоге, координаты векторов \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} и \overrightarrow{OD} определяются соотношениями

$$\mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{a}' = (a_1, a_2, a_3)^T, \quad \mathbf{b} = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{b}' = (b_1, b_2, b_3)^T,$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{c}' = (c_1, c_2, c_3)^T, \quad \mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{d}' = (d_1, d_2, d_3)^T,$$

где компоненты радиусов-векторов являются функциями от углов: $a_i = a_i(\varphi, \theta, \psi)$, $b_i = b_i(\varphi, \theta, \psi)$, $c_i = c_i(\varphi, \theta, \psi)$, $d_i = d_i(\varphi, \theta, \psi)$, $i = 1, 2, 3$.

Если за единицу длины принята величина R , то вычисление тензора Эйлера — Пуансо второго порядка для тетраэдра $ABCD$, в вершинах которого сосредоточены одинаковые массы $m/4$, завершает решение задачи Рауса. В системе отсчета $Ox_1x_2x_3$ этот тензор имеет вид

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} I_{200} & 0 & 0 \\ 0 & I_{020} & 0 \\ 0 & 0 & I_{002} \end{pmatrix}.$$

Для полученной таким образом четверки точек тензор Эйлера — Пуансо второго порядка совпадает с тензором Эйлера — Пуансо второго порядка для тела \mathcal{B} при любых значениях углов (φ, ψ, θ) . Такой произвол дает возможность разместить оси так, чтобы также приблизить компоненты тензора Эйлера — Пуансо третьего порядка³ наилучшим образом в смысле минимума функции:

³Где суммирование ведется по циклической перестановке $(a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d)$.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \theta, \psi) = \sum_{k_1+k_2+k_3=3} \left(\sum_{(a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d)} a_1^{k_1} a_2^{k_2} a_3^{k_3} - \frac{4I_{k_1 k_2 k_3}}{mR^3} \right)^2. \quad (4)$$

Об этом пойдет речь в следующем разделе.

4. Нахождение минимального значения функции (4) для кометы 67P/Чурюмова — Герасименко. Итак, ставится задача определения значений углов (φ, ψ, θ) , при которых функция (4) достигает минимального значения.

Эту задачу предлагается решать численно, с помощью так называемого метода роя частиц [7, 8], для кометы 67P/Чурюмова — Герасименко.

Замечание. Как известно, ядро кометы 67P/Чурюмова — Герасименко имеет сложное распределение масс, его форма далека от шарообразной. При изучении таких малых тел в небесной механике используется модель масконов. В настоящей работе продолжается начатое в [9] построение такой модели: кроме равномоментности системы точечных масс и ядра кометы 67P/Чурюмова — Герасименко, появляется дополнительное требование на приближение моментов инерции третьего порядка.

В [9] для вычисления инерциальных характеристик ядра кометы 67P/Чурюмова — Герасименко в предположении о постоянстве ее плотности была использована триангуляционная сетка, состоящая из 2842 вершин и 5678 граней, заданных в некоторой системе отсчета $SX_1X_2X_3$ [10].

Согласно выполненным в работе [9] вычислениям, объем ядра кометы, радиус шара такого же объема и положение центра масс ядра кометы в упомянутой системе отсчета имеют вид

$$V_B = \mathbf{I}_0/\rho = 18637936033 \text{ м}^3, \quad R \approx 1645 \text{ м},$$

$$\vec{S}\vec{O} = \mathbf{I}_1/m = (15, -30, 20)^T \text{ м}.$$

В этих же осях компоненты тензора \mathbf{I}_2 , отнесенные к массе ядра кометы, записываются как (в квадратных метрах)

$$\mathbf{I}_2/m = \begin{pmatrix} 1351556 & -2380 & -22882 \\ -2380 & 544188 & 6306 \\ -22882 & 6306 & 411705 \end{pmatrix}.$$

Единичные собственные векторы этого тензора, образующие правую тройку в осях $SX_1X_2X_3$, имеют вид

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0.9997 \\ -0.0026 \\ -0.0247 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0.00387 \\ 0.99867 \\ 0.05149 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0.02449 \\ -0.05157 \\ 0.99837 \end{pmatrix}.$$

Эти векторы задают главные центральные оси инерции, определяющие базис $Ox_1x_2x_3$. Отвечающие им собственные значения, отнесенные к массе кометы, имеют вид (в квадратных метрах)

$$J_1/m = 954007, \quad J_2/m = 1762279, \quad J_3/m = 1895545.$$

Следуя [11–13], вычислим компоненты тензоров \mathbf{I}_3/m , выписанных в осях $Ox_1x_2x_3$. Значения приведены в таблице.

Компоненты тензора $I_3/m, \text{ м}^3$

$I_{300} = 182733857$	$I_{021} = -16165563$	$I_{012} = 43393481$	$I_{030} = 88450027$	$I_{102} = -67599384$
$I_{111} = -81354341$	$I_{003} = -17819800$	$I_{201} = 242694220$	$I_{210} = -341622002$	$I_{120} = 13856796$

В таблице прил. 2, представлены результаты расчета, выполненного с помощью роевого алгоритма, завершившего свою работу за 145 итераций после того, как изменение значения функции (4) стало не превосходить 10^{-15} на протяжении 20 последовательных итераций. Последняя строка таблицы содержит значения углов

$$\varphi_* = -0.09737895, \quad \theta_* = -0.15747746, \quad \psi_* = -0.17917317, \quad (5)$$

доставляющие найденное минимальное значение функции (4). Это значение составляет

$$\mathcal{L}(\varphi, \theta, \psi)|_{\varphi=\varphi_*, \theta=\theta_*, \psi=\psi_*} \approx 0.0094465395711. \quad (6)$$

Относительно используемой системы отсчета радиус-векторы вершин тетраэдра, приближающего тело, имеют вид (в метрах)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (-1107, 549, 795)^T, \quad \mathbf{b} = (1517, -649, 464)^T, \\ \mathbf{c} &= (743, 901, -672)^T, \quad \mathbf{d} = (-1152, -801, -586)^T. \end{aligned}$$

Замечание 1. В [9] предложено альтернативное, опирающееся на свойства равногранного тетраэдра, решение задачи Рауса, описанной в разделе 3. Применительно к ядру кометы 67P/Чурюмова — Герасименко это решение определило систему материальных точек равных масс, радиусы-векторы которых в системе отсчета $Ox_1x_2x_3$ имеют вид (в метрах)

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= (-1163, 737, 641)^T, \quad \mathbf{b}' = (1163, -737, 641)^T, \\ \mathbf{c}' &= (1163, 737, -641)^T, \quad \mathbf{d}' = (-1163, -737, -641)^T. \end{aligned}$$

В принятых нами обозначениях, этому решению соответствует случай $\varphi = 0, \theta = 0, \psi = 0$, т. е. \mathbf{S} — единичная матрица. Значение функции (4) при этих значениях углов

$$\mathcal{L}(\varphi, \theta, \psi)|_{\varphi=0, \theta=0, \psi=0} \approx 0.02237145772. \quad (7)$$

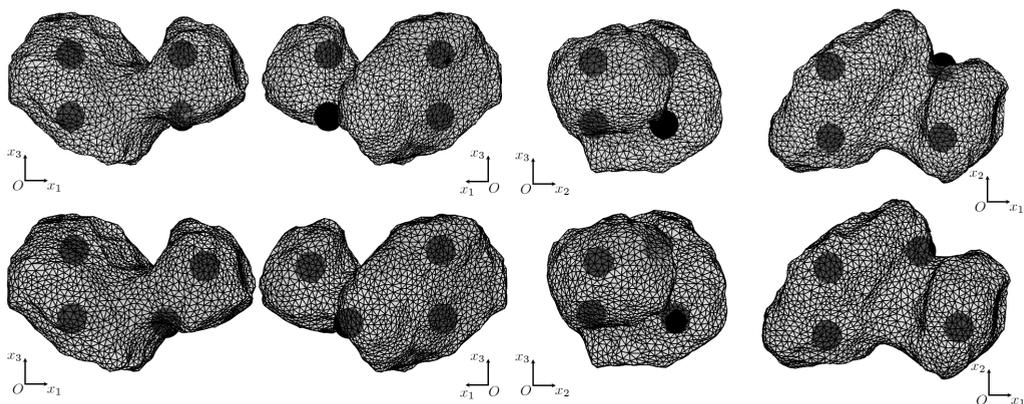
Величина (7) существенно превосходит величину (6), т. е. решение, найденное в [9], не доставляет минимума функции (4).

Вместе с тем вычисления показывают, что углы между соответствующими векторами имеют следующие значения:

$$\angle(\mathbf{a}, \mathbf{a}') \approx 9^\circ 23', \quad \angle(\mathbf{b}, \mathbf{b}') \approx 12^\circ 39', \quad \angle(\mathbf{c}, \mathbf{c}') \approx 16^\circ 49', \quad \angle(\mathbf{d}, \mathbf{d}') \approx 3^\circ 13'.$$

Таким образом, отклонение соответствующих радиусов-векторов точечных масс от вычисленных в работе [9] не превышает 17° . С геометрической точки зрения расположение построенной четверки масс мало отличается от соответствующей четверки из работы [9].

На рисунке приведены проекции на координатные плоскости системы отсчета $Ox_1x_2x_3$ ядра кометы 67P/Чурюмова — Герасименко и соответствующих систем точечных масс для решения, полученного в [9], и для найденного решения (5).



Ядро кометы 67P/Чурюмова — Герасименко в проекциях на координатные плоскости. Четыре изображения верхнего ряда отвечают решению, полученному в [9]. Четыре изображения в нижнем ряду, представленные в аналогичных проекциях, отвечают найденным углам φ_* , θ_* и ψ_* .

Замечание 2. Естественно, что полученные результаты должны быть чувствительными как к выбору триангуляционной сетки (ср. [12]), так и к точности ее задания. В настоящей работе задача о чувствительности результатов к точности триангуляционной сетки не рассматривается.

Замечание 3. Как справедливо подмечено рецензентом, более точная оценка параметров (6) по сравнению с полученной ранее оценкой (7) из работы [9] достигнута за счет более трудоемкого метода роя частиц. Спрашивается, насколько оправдано использование более трудоемкого метода для получения на первый взгляд не очень существенного уточнения. Понятно, что качество приближения потенциала оценивается качеством приближения тех или иных «интересных» траекторий. Из ныне используемых наиболее точным приближением потенциала считается приближение Вернера — Ширса [14, 15]. Сравнительный анализ траекторий, полученных в приближении Вернера — Ширса, траекторий, полученных в рамках приближения из работы [9], и траекторий, полученных в рамках приближения, полученного в настоящей работе, составляет тему отдельного исследования.

Исторические замечания. Примечательно, что задача Э. Дж. Рауса о приближении инерционных свойств тела инерционными свойствами системы точечных масс, скорее всего, не является предметом постоянного внимания специалистов. Если работы середины XX в. [16–18], по всей видимости, носили чисто академический характер, то работы конца XX — начала XXI в. [19–25] скорее всего были инициированы инженерными задачами, а также задачами из небесной механики. Вместе с тем работы, посвященные наилучшему приближению интегралов инерции третьего и более высоких порядков за счет надлежащего выбора положения четырех точек, авторам неизвестны.

5. Выводы. С помощью роевого метода безградиентной минимизации осуществлен поиск тетраэдра с равными точечными массами в вершинах такой, что его главные центральные моменты инерции совпадают с главными центральными моментами инерции ядра кометы 67P/Чурюмова — Герасименко, а моменты инерции третьего порядка приближены наилучшим образом.

При реализации эффективно использовалось восходящее к Э. Дж. Раусу предположение о равенстве масс, расположенных в вершинах тетраэдра. Распространение подхода на случай, когда массы в вершинах не равны между собой, представляет собой содержательную задачу, требующую дальнейшей работы.

Литература

1. Раус Э. Дж. *Динамика системы твердых тел*. Т. 1. Москва, Наука (1983).
2. Routh E. J. *The elementary part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: Being Part I. of a treatise on the whole subject*. London, Macmillan & Co (1891).
3. Дубошин Г. Н. *Небесная механика. Основные задачи и методы*. Москва, Наука (1968).
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. *Уравнения в частных производных математической физики*. Москва, Высшая школа (1970).
5. Dobrovolskis A. R. Inertia of Any Polyhedron. *Icarus* **124** (2), 698–704 (1996). <https://doi.org/10.1006/icar.1996.0243>
6. Лурье А. И. *Аналитическая механика*. Москва, Госфизмат (1961).
7. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization. *Proceedings of ICNN'95 – International Conference on Neural Networks, Perth, WA, Australia* **4**, 1942–1948 (1995). <https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>
8. Poli R., Kennedy J., Blackwell T. Particle swarm optimization: an overview. *Swarm Intelligence* **1**, 33–57 (2007). <https://doi.org/10.1007/s11721-007-0002-0>
9. Никонова Е. А. Равногранный тетраэдр и система точечных масс, равномоментная твердому телу. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (1), 155–164 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.113>
10. Gaskell R., Jorda L., Capanna C., Hviid S., Gutierrez P. *SPC SHAP5 CARTESIAN PLATE MODEL FOR COMET 67P/C-G 6K PLATES, RO-C-MULTI-5-67P-SHAPE-V2.0:CG_SPC_SHAP5_006K_CART*, NASA Planetary Data System and ESA Planetary Science Archive (2017).
11. Буров А. А., Никонов В. И. Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка. *Доклады Российской Академии наук. Физика, технические науки* **492** (1), 58–62 (2020). <https://doi.org/10.31857/S2686740020030086>
12. Буров А. А., Никонов В. И. Чувствительность значений компонент тензоров Эйлера — Пуансо к выбору триангуляционной сетки поверхности тела. *Журнал вычислительной математики и математической физики* **60** (10), 1764–1776 (2020). <https://doi.org/10.31857/S0044466920100063>
13. Burov A. A., Nikonov V. I. Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics* **16** (2), 259–273 (2020). <https://doi.org/10.20537/nd200203>
14. Werner R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **59** (3), 253–278 (1994). <https://doi.org/10.1007/BF00692875>
15. Werner R. A., Scheeres D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **65** (3), 313–344 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF00053511>
16. Franklin Ph. Equipomental systems. *Studies in Applied Mathematics* **8** (1–4), 129–140 (1929).
17. Sommerville D. M. Y. Equipomental tetrads of a rigid body. *Math. Notes* **26**, 10–11 (1930). <https://doi.org/10.1017/S1757748900002127>
18. Talbot A. Equipomental systems. *The Mathematical Gazette* **36** (316), 95–110 (1952). <https://doi.org/10.2307/3610326>
19. Huang N. C. Equipomental system of rigidly connected equal particles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **16** (6), 1194–1196 (1993). <https://doi.org/10.2514/3.21150>
20. Gil Chica F. J., Pérez Polo M., Pérez Molina M. Note on an apparently forgotten theorem about solid rigid dynamics. *European Journal of Physics* **35** (4), art. 045003 (2014). <https://doi.org/10.1088/0143-0807/35/4/045003>
21. Chaudhary H., Saha S. K. Balancing of shaking forces and shaking moments for planar mechanisms using the equipomental systems. *Mechanism and Machine Theory* **43** (3), 310–334 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.04.003>
22. Selig J. M. *Geometric Fundamentals of Robotics*. 2nd ed. Berlin, Springer (2005).
23. Selig J. M. Equipomental systems and robot dynamics. *IMA Mathematics of Robotics*, Sept. 9–11, 2015. Oxford, St Anne's College (2015).
24. Laus L. P., Selig J. M. Rigid body dynamics using equipomental systems of point-masses. *Acta Mechanica* **231**, 221–236 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02543-3>

25. Nuñez N. N. R., Vieira R. S., Martins D. Equipomental systems representations of point-masses of planar rigid-bodies. *Acta Mechanica* **234**, 5565–5580 (2023). <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03683-3>

Статья поступила в редакцию 26 августа 2023 г.;
доработана 1 ноября 2023 г.;
рекомендована к печати 9 ноября 2023 г.

Контактная информация:

Буров Александр Анатольевич — д-р физ.-мат. наук, доц., вед. науч. сотр.; jtm@narod.ru
Никонова Екатерина Александровна — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотр.;
nikonova.ekaterina.a@gmail.com
Никонов Василий Иванович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; nikon_v@list.ru

On the approximation of the field of attraction of a rigid body by the field of attraction of four material points of the same mass

A. A. Burov, E. A. Nikonova, V. I. Nikonov

Federal Research Center “Computing Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, 44/2, ul. Vavilova, Moscow, 119333, Russian Federation

For citation: Burov A. A., Nikonova E. A., Nikonov V. I. On the approximation of the field of attraction of a rigid body by the field of attraction of four material points of the same mass. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 385–394. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.211> (In Russian)

The problem of approximation of the gravitational potential of a rigid body by the potential of a system of four identical point masses is studied. Considering the potential in the form of expansion by a parameter characterizing the ratio of the mean body size to the distance to the test point of space, an approach is proposed to construct an approximate expression up to the terms of the third order of smallness. This approach is used to construct a model of the field of attraction for the comet nucleus (67P)Churyumov—Gerasimenko.

Keywords: moments of inertia of a rigid body, approximation of the potential of attraction, comet (67P)Churyumov—Gerasimenko.

References

1. Routh E. J. *Dynamics of a system of rigid bodies*. Vol. 1. Transl. from English. Moscow, Nauka Publ. (1983). (In Russian)
2. Routh E. J. *The elementary part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies: Being Part I. of a treatise on the whole subject*. London, Macmillan & Co. (1891).
3. Duboshin G. N. *Celestial Mechanics. Fundamental Problems and Methods*. Moscow, Nauka Publ. (1968). (In Russian)
4. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Partial differential equations of mathematical physics*. Moscow, Vysshaya shkola Publ. (1970). (In Russian)
5. Dobrovolskis A. R. Inertia of Any Polyhedron. *Icarus* **124** (2), 698–704 (1996). <https://doi.org/10.1006/icar.1996.0243>
6. Lurie A. I. *Analytical Mechanics*. Moscow, Gosfizmat Publ. (1961). (In Russian)
7. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization. *Proceedings of ICNN'95 — International Conference on Neural Networks, Perth, WA, Australia 1995*, **4**, 1942–1948 (1995). <https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>
8. Poli R., Kennedy J., Blackwell T. Particle swarm optimization: an overview. *Swarm Intelligence*. **1**, 33–57 (2007). <https://doi.org/10.1007/s11721-007-0002-0>

9. Nikonova E. A. Isosceles Tetrahedron and an Equipomental System of a Rigid Body. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (1), 155–164 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.113> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **56** (1), 119–124 (2023). <https://doi.org/10.1134/S1063454123010107>].
10. Gaskell R., Jorda L., Capanna C., Hviid S., Gutierrez P. *SPC SHAP5 CARTESIAN PLATE MODEL FOR COMET 67P/C-G 6K PLATES, RO-C-MULTI-5-67P-SHAPE-V2.0:CG_SPC_SHAP5_006K_CART*, NASA Planetary Data System and ESA Planetary Science Archive (2017).
11. Burov A. A., Nikonov V. I. Computation of Attraction Potential of Asteroid (433) Eros with an Accuracy up to the Terms of the Fourth Order. *Reports of the Russian Academy of Sciences. Physics, technical sciences* **492** (1), 58–62 (2020). <https://doi.org/10.31857/S2686740020030086> (In Russian) [Eng. transl.: *Doklady Physics* **65** (5), 164–168 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1028335820050080>].
12. Burov A. A., Nikonov V. I. Sensitivity of the Euler–Poinsoit Tensor Values to the Choice of the Body Surface Triangulation Mesh. *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics* **60** (10), 1764–1776 (2020). <https://doi.org/10.31857/S0044466920100063> (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics* **60** (10), 1708–1720 (2020). <https://doi.org/10.1134/S0965542520100061>].
13. Burov A. A., Nikonov V. I. Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics* **16** (2), 259–273 (2020). <https://doi.org/10.20537/nd200203>
14. Werner R. A. The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **59** (3), 253–278 (1994). <https://doi.org/10.1007/BF00692875>
15. Werner R. A., Scheeres D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **65** (3), 313–344 (1996). <https://doi.org/10.1007/BF00053511>
16. Franklin Ph. Equipomental systems. *Studies in Applied Mathematics* **8** (1–4), 129–140 (1929).
17. Sommerville D. M. Y. Equipomental tetrads of a rigid body. *Math. Notes* 1930. **26**, 10–11 (1930). <https://doi.org/10.1017/S1757748900002127>
18. Talbot A. Equipomental systems. *The Mathematical Gazette* **36** (316), 95–110 (1952). <https://doi.org/10.2307/3610326>
19. Huang N. C. Equipomental system of rigidly connected equal particles. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **16** (6), 1194–1196 (1993). <https://doi.org/10.2514/3.21150>
20. Gil Chica F. J., Pérez Polo M., Pérez Molina M. Note on an apparently forgotten theorem about solid rigid dynamics. *European Journal of Physics* **35** (4), art. 045003 (2014). <https://doi.org/10.1088/0143-0807/35/4/045003>
21. Chaudhary H., Saha S. K. Balancing of shaking forces and shaking moments for planar mechanisms using the equipomental systems. *Mechanism and Machine Theory* **43** (3), 310–334 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2007.04.003>
22. Selig J. M. *Geometric Fundamentals of Robotics*. 2nd ed. Springer, Berlin (2005).
23. Selig J. M. Equipomental systems and robot dynamics. *IMA Mathematics of Robotics*, Sept. 9–11, 2015. Oxford, St Anne's College (2015).
24. Laus L. P., Selig J. M. Rigid body dynamics using equipomental systems of point-masses. *Acta Mechanica* **231**, 221–236 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02543-3>
25. Nuñez N. N. R., Vieira R. S., Martins D. Equipomental systems representations of point-masses of planar rigid-bodies. *Acta Mechanica* **234**, 5565–5580 (2023). <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03683-3>

Received: August 26, 2023
 Revised: November 1, 2023
 Accepted: November 9, 2023

Authors' information:

Alexander A. Burov — jtm@narod.ru
 Ekaterina A. Nikonova — nikonova.ekaterina.a@gmail.com
 Vasily I. Nikonov — nikonov_v@list.ru

Приложение 1.
Потенциал сил гравитационного тяготения
и интегралы инерции различных порядков

Если \mathcal{B} — твердое тело с центром масс в точке O , а $Ox_1x_2x_3$ — связанная с этим телом правая декартова система координат, то в точке P , положение которой задается радиусом-вектором $\vec{OP} = \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$, $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$, потенциал U_N поля гравитационного притяжения тела \mathcal{B} допускает представление в виде (см., например, [3, 4])

$$U_N = -G \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} I_{k_1 k_2 k_3} \frac{(-1)^k}{k_1! k_2! k_3!} \frac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial x_3^{k_3}} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (8)$$

где k_1, k_2, k_3 — неотрицательные целые числа; G — гравитационная постоянная; $I_{k_1 k_2 k_3}$ — описание выше, в разделе 2, интегралы инерции порядка $k = k_1 + k_2 + k_3$.

Приложение 2.
Итерации метода безградиентной минимизации

Значения углов φ, θ, ψ в радианах
и соответствующие им величины функции $\mathcal{L}(\varphi, \theta, \psi)$

Номер итерации	φ	θ	ψ	$\mathcal{L}(\varphi, \theta, \psi)$
1	0.01525497	0.20434528	0.16669413	0.04724611880
2	-0.07251879	0.07559017	0.13172898	0.03652842035
3	-0.11473688	-0.01194712	-0.07043501	0.01780898082
4	-0.25925574	-0.1276443	-0.07007915	0.01447984160
5	-0.2855786	-0.26485684	-0.14788059	0.01178003361
6	-0.04126288	-0.24973747	-0.13657628	0.01144894846
7	-0.10929887	-0.14329311	-0.19081401	0.00951869958
11	-0.11479271	-0.14914261	-0.19206269	0.00951864937
15	-0.10602144	-0.14569386	-0.19520838	0.00951428992
34	-0.09348174	-0.15828296	-0.17781406	0.00944843962
60	-0.09719712	-0.15744585	-0.17923352	0.00944654177
90	-0.09734441	-0.15747287	-0.17917998	0.00944653964
114	-0.09737813	-0.15747717	-0.17917308	0.00944653957
125	-0.09737886	-0.15747747	-0.17917316	0.00944653957
145	-0.09737895	-0.15747746	-0.17917317	0.00944653957