К 300-ЛЕТИЮ СПбГУ

УДК 517.925, 517.928
MSC 34C05, 34C11, 34C30, 34C41, 34C45, 34D05, 34D10, 34D20, 34D35, 37C15, 37C75

Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. II. Локальный качественный анализ существенно нелинейных систем*

Н. А. Бегун, Е. В. Васильева, Т. Е. Звягинцева, Ю. А. Ильин

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Бегун Н. А., Васильева Е. В., Звягинцева Т. Е., Ильин Ю. А.* Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. II. Локальный качественный анализ существенно нелинейных систем // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 401–418. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.301

Данная статья является второй из цикла статей, посвященных обзору результатов научных исследований, которые проводились на кафедре дифференциальных уравнений Санкт-Петербургского университета в последние четыре десятилетия и продолжают проводиться в настоящее время. В первой статье рассказывалось об исследованиях устойчивых периодических точек диффеоморфизмов с гомоклиническими точками и систем дифференциальных уравнений со слабо гиперболическими инвариантными множествами. В настоящей работе излагаются результаты по локальному качественному анализу существенно нелинейных систем в окрестности нулевого решения, полученные сотрудниками и выпускниками кафедры. Система называется существенно нелинейной, если разложение ее правых частей в ряд Тейлора не содержит линейных членов. Изучение таких систем, во-первых, осложняется более сложной картиной поведения решений по сравнению с квазилинейными системами. Во-вторых, не существует даже теоретических формул для общего решения нелинейной системы первого приближения, наличие которых так помогает в квазилинейном случае. Все это затруд-

*Первую часть статьи см.: *Бегун Н. А., Васильева Е. В., Звягинцева Т. Е., Ильин Ю. А.* Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. I. Устойчивые периодические точки диффеоморфизмов с гомоклиническими точками и системы со слабо гиперболическими инвариантными множествами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 211–227. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.201

няет анализ и значительно ограничивает технические возможности. Поэтому практически любые новые результаты и любые новые методы работы с такими системами представляют большой интерес. Одним из самых эффективных инструментов работы с существенно нелинейными системами оказались логарифмические нормы Лозинского. В каком-то смысле они являются аналогом характеристических показателей (собственных чисел), используемых в теории квазилинейных систем. В исследованиях, проводимых на кафедре, продемонстрированы широкие возможности применения логарифмических норм в самых разных задачах. С их помощью удалось получить целый ряд результатов, являющихся аналогом хорошо известных теорем из локальной качественной теории квазилинейных систем. Полученные результаты, помимо чисто математического интереса, представляют и прикладной интерес, в первую очередь для задач, связанных с анализом устойчивости решений сложных нелинейных систем.

Ключевые слова: качественная теория дифференциальных уравнений, существенно нелинейные системы, логарифмические нормы Лозинского, инвариантные поверхности, устойчивость по Ляпунову, гладкая эквивалентность.

1. Введение. Статья является второй по счету из цикла работ (первая вышла в [1]), посвященных обзору научных исследований, проводимых на кафедре дифференциальных уравнений СПбГУ за последние четыре десятилетия. В ней рассказывается о результатах, которые получены в области локального качественного анализа существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений.

Локальная качественная теория изучает поведение решений системы дифференциальных уравнений в окрестности *стационарного* решения $x = 0$. К такой задаче сводится изучение поведения решений в окрестности любого выбранного решения $x = \varphi(t)$, поскольку заменой переменных $y = x - \varphi(t)$ это решение переводится в стационарное $y = 0$. Главные вопросы, представляющие интерес: 1) будут ли соседние решения стремиться к стационарному при $t \to +\infty$ (случай *асимптотической устойчивости*), 2) будут ли они оставаться в некоторой его окрестности (случай простой *устойчивости*) или же 3) только часть решений будет стремиться к стационарному, тогда как остальные будут покидать некоторую его окрестность (случай *условной устойчивости*).

Уже в первых работах основоположников качественной теории дифференциальных уравнений А. Пуанкаре [2] и А. М. Ляпунова [3] было установлено, что решения, стремящиеся к стационарному либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$, целиком заполняют некие интегральные поверхности, которые принято называть *устойчивыми* и *неустойчивыми* соответственно. Оказалось, что в отличие от индивидуальных решений, поверхности являются более стабильными образованиями, в частности они могут сохраняться при малых возмущениях исходной системы.

В одном из мемуаров [2] А. Пуанкаре рассмотрел двумерную аналитическую автономную систему и доказал существование устойчивой и неустойчивой поверхностей (в плоском случае это были просто кривые) в окрестности гиперболической точки покоя. Ж. Адамар [4] распространил этот результат на C^1-гладкие системы, придумав оригинальный метод доказательства, в котором инвариантная кривая ищется как неподвижная точка оператора сдвига по траекториям в соответствующем функциональном пространстве. Метод Адамара на произвольную размерность обобщил П. Льюис [5]. В каком-то смысле окончательный итог этим исследованиям подводит теорема Гробмана — Хартмана [6–8].

В отличие от Пуанкаре, А. М. Ляпунов [3] рассматривал сразу n-мерные неавтономные квазилинейные системы $\dot{x} = A(t)x + f(t, x)$. Изучая условную устойчивость, он, используя введенные им понятия *характеристических показателей* и *правильности*, установил, что если линейная система $\dot{x} = A(t)x$ имеет k отрицательных характеристических показателей, $n - k$ положительных и при этом является правильной, то у исходной квазилинейной системы существует семейство решений, стремящихся к 0 при $t \to +\infty$, причем все эти решения целиком заполняют некую k-мерную интегральную поверхность. К сожалению, доказательство Ляпунова существенно использует аналитичность возмущения $f(t, x)$ и не переносится на C^1-случай. Проблему условной устойчивости в C^1-случае изучал О. Перрон [9]. Вместо условия правильности системы линейного приближения он ввел другое условие: он потребовал, чтобы для любой ограниченной $g(t)$ линейная неоднородная система $\dot{x} = A(t)x + g(t)$ имела хотя бы одно ограниченное решение. При этом предположении он смог получить результат, аналогичный результату Ляпунова, но уже для $f \in C^{0,1}_{t,x}$. Отметим, что теорема Перрона не является обобщением теоремы Ляпунова, так как условие правильности Ляпунова и условие Перрона являются независимыми (см. об этом у И. Г. Малкина [10, § 89]. Там же в [10, § 88]) можно найти условия, эквивалентные условию Перрона, найденные И. Г. Малкиным и К. П. Персидским, правда только для случая полной асимптотической устойчивости. Условия, эквивалентные условию Перрона для общего случая, были найдены А. Д. Майзелем [11] (для полуоси) и В. А. Плиссом [12] (для всей прямой). Они привели к понятию *экспоненциальной дихотомии* и *гиперболичности* для линейной неавтномной системы. Более детально об этом можно прочитать в монографии [13].

Современное изложение итоговой теоремы Ляпунова — Перрона, использующее язык интегральных поверхностей, дано В. А. Плиссом в [14]. Профессор, чл.-корр. РАН В. А. Плисс был заведующим кафедрой дифференциальных уравнений ЛГУ в течение уникально долгого периода — с 1960 по 2019 г. На нем — без преувеличения — держалась вся ленинградская школа дифференциальных уравнений. Скажем о [14] чуть более подробно. В. А. Плисс приводит определение гиперболичности и доказывает, что неособым линейным ляпуновским[1] преобразованием гиперболическая линейная система $\dot{x} = A(t)x$ приводится к блочно-диагональному виду $\dot{x}_+ = A_+(t)x_+$, $\dot{x}_- = A_-(t)x_-$, где решения $x_+(t)$ экспоненциально стремятся к нулю при $t \to +\infty$, а решения $x_-(t)$ экспоненциально стремятся к нулю при $t \to -\infty$. Совершая эту замену в исходной системе, получим $\dot{x}_+ = A_+(t)x_+ + f_+(t, x)$, $\dot{x}_- = A_-(t)x_- + f_-(t, x)$. Теорема Ляпунова — Перрона утверждает существование у этой системы устойчивой и неустойчивой интегральных поверхностей, задаваемых уравнениями вида $x_- = h_+(t, x_+)$ и $x_+ = h_-(t, x_-)$ соответственно. Функции h_+ и h_- Плисс, как и Перрон, ищет в виде решений интегральных уравнений специального вида методом последовательных приближений.

В 1934 г. Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [15] было доказано существование интегральной поверхности нового типа для автономной квазилинейной системы, матрица линейного приближения которой имела пару чисто мнимых собственных чисел, т. е. не являлась гиперболической. Вслед за Ляпуновым такие системы и случаи принято называть *критическими*. Уравнение этой поверхности выражало некритические переменные через критические. Эти поверхности назвали *нейтральными* (или *центральными*).

[1] Ляпуновское преобразование не меняет характеристических показателей. В своих работах Перрон пользовался линейными преобразованиями с такими же свойствами, но Ляпунов делал это на 30 лет раньше.

В 60-х годах прошлого века В. А. Плисс получил ряд важных результатов, имевших существенное значение для теории интегральных поверхностей. В работе [16] он доказал существование устойчивой, неустойчивой и нейтральной поверхностей в самой общей ситуации для случая постоянной матрицы линейного приближения. Этот результат позволяет дать полное описание поведения решений в окрестности точки покоя. Для доказательства В. А. Плисс использовал оригинальную модификацию метода Адамара [4]. Заметим, что в монографии [14] В. А. Плисс приводит другое доказательство этой теоремы, основанное уже на методе Перрона [9]. В работе [16] также доказывается замечательная теорема, получившая название *принцип сведения Плисса*. Этот принцип утверждает, что в критическом случае задача об устойчивости нулевого решения исходной системы эквивалентна задаче об устойчивости нулевого решения системы, получающейся сужением исходной системы на нейтральную поверхность. Таким образом, этот принцип позволяет понизить размерность исходной системы при исследовании ее на устойчивость. Следует отметить, что критические случаи в задаче об устойчивости изучал еще А. М. Ляпунов [3]. В некоторых случаях ему тоже удавалось понизить размерность исходной задачи, но достигалось это чисто алгебраическими методами и производило скорее впечатление остроумных и блестящих фокусов. Природа и сама возможность такого понижения порядка системы была непонятна. Принцип сведения Плисса дает простое и ясное геометрическое объяснение этому факту.

В следующей работе [17] В. А. Плисс доказывает весьма общую теорему о существовании инвариантных поверхностей, не укладывающуюся в обычные рамки теории возмущений. Он рассматривает систему вида

$$\dot{x} = X(x, y, t), \quad \dot{y} = Y(x, y, t),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, функции X, Y — непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x, y и ω-периодические по t.

Пусть $\lambda_i(x, y, t)$ и $\mu_j(x, y, t)$ обозначают собственные числа симметризованных матриц Якоби $\frac{1}{2}\big(X'_x + (X'_x)^*\big)$ и $\frac{1}{2}\big(Y'_y + (Y'_y)^*\big)$ соответственно (звездочка обозначает транспонирование). Предполагается, что при всех x, t и $\|y\| \leqslant K$ выполняются неравенства

$$\lambda_i(x, y, t) \geqslant \lambda, \quad \mu_j(x, y, t) \leqslant \mu, \tag{1}$$

где $\mu < 0,\ \lambda > \mu$. Также предполагается, что $\|X'_y\| \leqslant \alpha$, $\|Y'_x\| \leqslant \beta$ и верно неравенство $4\alpha\beta < (\lambda - \mu)^2$. Наконец, предполагается, что $\frac{d\|y\|}{dt}\big|_{\|y\|=K} < 0$ (выражение в левой части — это производная от $\|y\|$ в силу исходной системы).

При этих условиях В. А. Плисс доказывает существование интегральной поверхности, задаваемой уравнением $y = g(x, t)$, где функция g непрерывна, ограничена: $\|g(x, t)\| \leqslant K$, удовлетворяет условию Липшица по x и ω-периодична по t. Для доказательства этой теоремы В. А. Плисс снова применяет тот же метод и схему, что и в [16]. Становится понятным, что этот метод имеет столь универсальный характер, что может быть распространен на значительно более широкий класс систем, чем квазилинейные. Эту задачу В. А. Плисс поставил в начале 70-х годов перед своими учениками В. Л. Лубихом и В. Н. Монаковым, а позже перед Ю. А. Ильиным. Отметим, что условия (1) на собственные числа симметризованной матрицы Якоби, использованные в формулировке теоремы, в литературе называют *условиями Важевского* в связи с неравенством, полученным Важевским в [18] для оценки характеристических показателей решений линейной системы (см. также [19]). Н. Н. Красовский обобщил эти условия в [20]. О возможности такого обобщения В. А. Плисс упоминает в конце статьи [17].

2. Локальная качественная теория существенно нелинейных систем. В работе [21] ученик В. А. Плисса В. Л. Лубих рассмотрел следующую существенно нелинейную систему (т. е. систему, не имеющую линейных слагаемых):

$$\dot{x} = X(x,y), \quad \dot{y} = G(y) + \varphi(x) + Y(x,y), \tag{2}$$

где $x, X \in \mathbb{R}^\mu$, $y, G, \varphi, Y \in \mathbb{R}^\nu$.

Пусть $\lambda_s(y),\ s = 1, \ldots, \nu$, обозначают собственные числа симметризованной матрицы Якоби $0,5\big(G'_y + (G'_y)^*\big)$. Далее делаются следующие предположения:

1) компоненты $G(y)$ — формы k-й степени, где $k > 1$ — нечетное число;

2) $\exists\, \delta > 0$: $\lambda_s(y) \leqslant -\delta \|y\|^{k-1}$;

3) компоненты $\varphi(x)$ — формы m-й степени, где $m > k$;

4) $\exists\, c > 0$: $\|\varphi(x)\| \geqslant c\|x\|^m$;

5) $\|X\|, \|Y\| = O(r^m)$, $\|DX\|, \|DY\| = O(r^{m-1})$, $\|Y(x,0) = O(\|x\|^{m+1})$, где $r = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.

При выполнении этих условий Лубих доказал существование инвариантной поверхности вида $y = g(x)$ со свойствами: $g(0) = 0$ и $\|g(x_1) - g(x_2)\| \leqslant \|x_1 - x_2\|$.

Главное отличие теоремы Лубиха от теоремы Плисса из [17] состоит в том, что собственные числа симметризованной матрицы Якоби оцениваются сверху теперь не числами, а отрицательно определенной функцией (предположение 2), что является как раз естественным для существенно нелинейных систем. Для доказательства использовалась та же схема рассуждений, что и в [17]. Заметим, что поверхность $y = g(x)$ из теоремы Лубиха будет нейтрального типа.

Продолжая исследование Лубиха, другой ученик В. А. Плисса, В. Н. Монаков, в [22] сумел, используя схему и идеи работы [16], доказать для системы (2) принцип сведения, а именно: если нулевое решение системы $\dot{x} = X(x, g(x))$, являющейся сужением исходной системы (2) на инвариантную поверхность $y = g(x)$, устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво, то такой же тип устойчивости имеет и нулевое решение исходной системы (2).

В следующей своей работе [23] В. Н. Монаков доказывает существование устойчивой интегральной поверхности для сильно нелинейной системы специального вида в критическом (по терминологии Ляпунова — Крылова — Боголюбова) случае. В ней он использует такие же условия на собственные числа симметризованной матрицы Якоби (условия Важевского), что и В. Л. Лубих в [21].

Наконец, в [24] Монаков устанавливает аналог теоремы Перрона для сильно нелинейной системы дифференциальных уравнений достаточно общего вида. Строго говоря, автор не вполне прав с названием, поскольку он рассматривает автономную систему, так же как и Пуанкаре, Адамар и Льюис, тогда как для теоремы Ляпунова — Перрона ключевым моментом является именно неавтономность. По-видимому, более правильным все-таки было бы говорить об аналоге теоремы Пуанкаре — Адамара — Льюиса. Приведем формулировку результата из этой работы. Рассматривается система следующего вида:

$$\dot{x} = V(x) + X(x,y), \quad \dot{y} = W(y) + Y(x,y), \tag{3}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$. Компоненты вектор-функций $V(x)$ и $W(y)$ — формы соответственно k_1-й и k_2-й степеней, $k_1, k_2 > 1$. Функции $V(x)$ и $W(y)$ играют роль как бы первого приближения, а X, Y — возмущения.

Пусть $\lambda_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, обозначают собственные числа симметризованной матрицы Якоби $\frac{1}{2}\big(V_x'(x) + (V_x'(x))^*\big)$, а $\mu_j(y)$, $j = \overline{1,m}$, — собственные числа матрицы $\frac{1}{2}\big(W_y'(y) + (W_y'(y))^*\big)$. Ключевое предположение состоит в том, что эти собственные числа удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_i(x) \geqslant \sigma_1 \|x\|^{k_1-1}, \quad \mu_j(y) \leqslant -\sigma_2 \|y\|^{k_2-1},$$

где $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ — некоторые константы. Относительно X, Y предполагается, что $\|X\|, \|Y\| = O(r^l)$, $\|DX\|, \|DY\| = O(r^{l-1})$, где $l > \max(k_1, k_2)$ и $r = \|(x,y)\|$, (т. е. X, Y представляют собой слагаемые более высокого порядка малости, чем V, W). Отметим, что начало координат $(0,0)$ есть точка покоя. При этих предположениях Монаков доказал, что система (3) в некоторой окрестности $r < a$ начала координат имеет локально инвариантные устойчивую и неустойчивую поверхности: $x = h(y)$ и $y = g(x)$ соответственно, где $h(y)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию Липшица с константой, равной единице. Решения, начинающиеся на устойчивой поверхности, при $t \to -\infty$ покидают a-окрестность, а при $t \to +\infty$ стремятся к началу координат с оценкой $r(t) \leqslant At^{-1/(k_2-1)}$. Решения, начинающиеся на неустойчивой поверхности, покидают a-окрестность при $t \to +\infty$, а при $t \to -\infty$ стремятся к началу координат с оценкой $r(t) \leqslant B|t|^{-1/(k_1-1)}$. Решения, не начинающиеся на этих поверхностях, покидают a-окрестность как при возрастании, так и при убывании t.

В 1986 г. В. А. Плисс обратил внимание Ю.А. Ильина на возможность существенного обобщения (ослабления) применяемого в этих теоремах условия Важевского, если воспользоваться так называемыми *логарифмическими нормами* Лозинского. В 1958 г. вышла статья С. М. Лозинского[2] [25], в которой он ввел новое понятие *логарифмической нормы* (см. определение ниже) и с его помощью получил оценку на характеристические показатели решений линейной системы, являющуюся обобщением оценок Важевского [18] и Красовского [20]. В работе [25] также доказывается целый ряд свойств этой нормы. Необходимо отметить, что одновременно с Лозинским и независимо от него похожее понятие ввел и Далквист в [26]. Но статья Лозинского выглядит более основательной с точки зрения полноты анализа свойств нового понятия.

В работе [27] Ю. А. Ильин проанализировал возможность применения логарифмических норм не только в теории линейных систем, но и нелинейных, выяснил «геометрический» смысл этого понятия и его связь с функциями Ляпунова и дифференциальными неравенствами на нормы решений. Осветим эти вопросы чуть более подробно.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, A — матрица размерности $n \times n$. Пусть $\|x\|$ — произвольная векторная норма. Тем же символом обозначим порождаемую ею матричную норму $\|A\| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Определение. *Верхней логарифмической нормой матрицы A, порождаемой данной векторной нормой, называется число*

$$\gamma^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{h \to +0} \frac{\|E + hA\| - 1}{h},$$

где E обозначает единичную $(n \times n)$ матрицу.

[2] Сергей Михайлович Лозинский несколько лет был заведующим кафедрами математического анализа и дифференциальных уравнений ЛГУ.

Приведем некоторые свойства логарифмических норм.

1) $\gamma^*(A+B) \leqslant \gamma^*(A) + \gamma^*(B)$;

2) $\gamma^*(\alpha A) = \alpha\gamma^*(A)$, $\alpha \geqslant 0$;

3) $|\gamma^*(A) - \gamma^*(B)| \leqslant \|A - B\|$;

4) пусть непрерывная матричная функция $A(\theta)$ задана на конечном промежутке $\langle a, b\rangle$ и пусть $\gamma^*(A(\theta)) \leqslant 0$. Тогда $\gamma^*\left(\int_a^b A(\theta)d\theta\right) \leq \int_a^b \gamma^*(A(\theta))d\theta$.

Наряду с *верхней* логарифмической нормой, вводится и понятие *нижней* логарифмической нормы по формуле $\gamma_*(A) \stackrel{\text{def}}{=} -\gamma^*(-A)$. Соответствующие свойства γ_* легко выписываются на основании этой формулы. Ключевая роль γ_* и γ^* раскрывается следующей теоремой [26].

Теорема 1. *Пусть $x(t)$ есть произвольное решение системы*

$$\dot{x} = F(t,x)x + G(t,x), \tag{4}$$

где F — непрерывная матричная, а G — непрерывная векторная функция. Тогда

$$\gamma_*(F(t,x(t)))\,\|x(t)\| - \|G(t,x(t)))\| \leqslant \frac{d_+\|x(t)\|}{dt} \leqslant \gamma^*(F(t,x(t)))\,\|x(t)\| + \|G(t,x(t))\|.$$

Здесь $||x||$ — произвольная векторная норма; γ_* и γ^* — порождаемые ею нижняя и верхняя логарифмические нормы; $d_+||x(t)||/dt$ — правосторонняя производная от нормы решения (которая всегда существует, так как норма — выпуклая функция).

Заметим, что любая система дифференциальных уравнений может быть записана в виде (4), так как для произвольной функции $f(t,x) \in C^{0,1}_{t,x}$ справедлива формула

$$f(t,x) = \left(\int\limits_0^1 f'_x(t,\theta x)\,d\theta\right) x + f(t,0).$$

Применение этой теоремы к линейной системе $\dot{x} = A(t)x$ дает неравенства

$$\gamma_*(A(t))\,\|x\| \leqslant \frac{d_+\|x\|}{dt} \leqslant \gamma^*(A(t))\,\|x\|, \tag{5}$$

интегрируя которые мы получаем оценку Лозинского из [24]:

$$\|x(t_0)\|e^{\int_{t_0}^t \gamma_*(A(s))\,ds} \leqslant \|x(t)\| \leqslant \|x(t_0)\|e^{\int_{t_0}^t \gamma^*(A(s))\,ds}.$$

Отметим, что логарифмические нормы обобщают подавляющее большинство оценок подобного рода, имеющихся в литературе. Так, например, для евклидовой нормы $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ имеем $\gamma_*(A(t)) = \lambda_*(t)$, $\gamma^*(A(t)) = \lambda^*(t)$, где $\lambda_*(t)$ и $\lambda^*(t)$ суть наименьшее и наибольшее собственные числа симметризованной матрицы $\frac{1}{2}(A(t) + A^*(t))$. То есть мы получаем оценку Важевского, используемую в вышеприведенных теоремах В. А. Плисса, В. Л. Лубиха и В. Н. Монакова. Следовательно, можно попытаться обобщить все эти теоремы, заменив в них собственные числа на логарифмические нормы.

Если рассматривать норму $\|x\|$ как функцию Ляпунова, то из формулы (5) видно, что логарифмические нормы служат коэффициентным критерием отрицательности или положительности ее производной в силу системы, и тем самым являются коэффициентными критериями устойчивости или неустойчивости системы.

Поскольку большинство критериев устойчивости в литературе выводится именно из предположения, что какая-то норма является функцией Ляпунова, то логарифмические нормы обобщают все такие критерии. При этом условия на логарифмические нормы близки к необходимым условиям в силу следующей леммы [26].

Лемма 1. *Предположим, что правосторонняя производная некоторой нормы в силу системы $\dot{x} = A(t)x$ оценивается на единичной сфере следующим образом:*

$$\lambda_*(t)| \leqslant \left.\frac{d_+\|x\|}{dt}\right|_{\|x\|=1} \leqslant \lambda^*(t).$$

Тогда $\lambda_*(t) \leqslant \gamma_*(A(t)) \leqslant \gamma^*(A(t)) \leqslant \lambda^*(t)$.

Хотя изначально логарифмические нормы предназначались для оценки поведения решений линейных систем, оказалось, что их с успехом можно применять и к существенно нелинейным системам. Собственно, это уже видно из формулировок результатов В. Л. Лубиха и В. Н. Монакова, в которых использовался частный случай логарифмической нормы — условие Важевского.

В работе [26] доказываются следующие две теоремы.

Теорема 2. *Рассмотрим систему (4) с $G(t,x) = 0$. Тогда*

1) если $\gamma^*(F(t,x)) \leqslant 0$, то нулевое решение системы (4) устойчиво ($\|x\|$ есть функция Ляпунова первого рода);

2) если $\gamma^*(F(t,x))$ есть функция определенно отрицательная, то нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво ($\|x\|$ есть функция Ляпунова второго рода);

3) если $\gamma^*(F(t,x)) \leqslant \lambda < 0$ (случай почти линейной автономной системы), то нулевое решение экспоненциально устойчиво.

Теорема 3. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = F(t,x) + f(t), \tag{6}$$

где $F \in C^{0,1}_{t,x}(\mathbb{R}^{n+1}_{t,x})$, $f \in C(\mathbb{R}^1_t)$. Пусть функции $F(t,0)$ и $f(t)$ ограничены:

$$\sup_{\mathbb{R}} \|F(t,0)\| \leqslant M_1, \qquad \sup_{\mathbb{R}} \|f(t)\| \leqslant M_2.$$

Предположим, что при всех $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$ выполняется оценка

$$\gamma^*(F'_x(t,x)) \leqslant -\lambda \|x\|^k,$$

где $\lambda > 0$, $k \geqslant 0$, а γ^* порождена нормой $\|\cdot\|$. Тогда система (6) обладает свойством конвергенции, т. е. имеет единственное ограниченное на всей оси решение, асимптотически устойчивое в целом.

Теорема 3 обобщает теорему Б. П. Демидовича из [19]. В каком-то смысле она напоминает условие О. Перрона из [9], упомянутое нами во введении.

В статье [28] с помощью логарифмических норм существенно обобщаются результаты, полученные В. Н. Монаковым, причем изучаются уже произвольные, а не только автономные системы. Приведем основные результаты из этой работы. Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = U(x,t) + X(x,y,t), \quad \dot{y} = V(y,t) + Y(x,y,t), \tag{7}$$

где $x \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^q$. Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ суть некоторые нормы в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$. Обозначим теми же символами порождаемые ими матричные нормы. Положим $\|(x,y)\| = \max(\|x\|_1, \|y\|_2)$.

Относительно U, X, V и Y считаем, что при $\|(x,y)\| \leqslant a$ $(a > 0)$ они непрерывны по x, y и t, непрерывно дифференцируемы по x и y, и $U(0,t) = X(0,0,t) = 0$, $V(0,t) = Y(0,0,t) = 0$.

Пусть γ_* обозначает нижнюю логарифмическую норму, порожденную $\|\cdot\|_2$, а γ^* — верхнюю логарифмическую норму, порожденную $\|\cdot\|_1$. Предположим, что при $\|(x,y)\| \leqslant a$ выполняются условия

$$\gamma^*(U_x'(x,t)) \leqslant 0, \quad \gamma_*(V_y'(y,t)) \geqslant \sigma\|y\|_2^{k-1}, \quad \|DX\|, \|DY\| \leqslant C\|(x,y)\|^k, \tag{8}$$

где $\sigma > 0$, $C > 0$, $k > 1$.

Теорема 4. *При сделанных предположениях существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что система (7) имеет единственную локально-интегральную поверхность (неустойчивую), представимую в виде $x = h(y,t)$, где $h : \{(y,t) : \|y\|_2 \leqslant \varepsilon_0, t \in \mathbb{R}\} \mapsto \mathbb{R}^p$ есть непрерывная функция, такая, что для любых t и $\|y\|_2, \|\tilde{y}\|_2 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ выполняется: $h(0,t) = 0$, $\|h(y,t) - h(\tilde{y},t)\|_1 \leqslant L(\varepsilon)\|y - \tilde{y}\|_2$, где $L(\varepsilon) \in (0,1]$ и $L(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Всякое решение системы (7), начинающееся на поверхности $x = h(y,t)$, остается на ней с убыванием t и стремится к началу координат так, что выполняется неравенство*

$$\|z(t)\| \leqslant \|z(t_0)\| \left(1 + \frac{\sigma(k-1)}{2k}\|z(t_0)\|^{k-1}(t_0 - t)\right)^{1/(1-k)}, \quad t \leqslant t_0,$$

где $z(t) = (x(t), y(t))$. Любое решение, не расположенное на этой поверхности, с убыванием времени покидает сектор $\|x\|_1 \leqslant \|y\|_2$.

Следствие. *Если система (7) периодическая по t с периодом ω, то $h(y, t+\omega) = h(y,t)$. Если система (7) автономная, то h не зависит от t.*

Замечание 1. Если в системе (7) сделать замену времени $t \mapsto -t$, то неравенства в (8) заменятся на $\gamma_*(U_x'(x,t)) \geqslant 0$, $\gamma^*(V_y'(y,t)) \leqslant -\sigma\|y\|_2^{k-1}$ и мы получим теорему о существовании *устойчивой* поверхности $x = h(y,t)$, на которой все решения будут стремиться к 0 при $t \to +\infty$.

Замечание 2. Если же в условии (8) потребовать вместо $\gamma^*(U_x'(x,t)) \leqslant 0$ выполнение более сильного неравенства $\gamma^*(U_x'(x,t)) \leqslant -\lambda\|x\|_1^{m-1}$, и, соответственно, $\|DX\|, \|DY\| \leqslant C\|(x,y)\|^l$, где $l = \max(m,k)$, то система (7) будет одновременно обладать *неустойчивой* $x = h(y,t)$ и *устойчивой* $y = g(x,t)$ поверхностями с соответствующими свойствами. Этот случай соответствует гиперболическому из классической теоремы Ляпунова—Перрона.

Рассмотрим отдельно случай, когда система (7) будет периодическая по t с периодом ω. Тогда можно накладывать ограничения не на сами функции U и V, а на их средние за период. Положим

$$\widehat{U}(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega U(x,t)\,dt, \quad \widehat{V}(y) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega V(y,t)\,dt.$$

Теорема 5. *Пусть правые части системы (7) непрерывны, непрерывно дифференцируемы по x и y, а U и V дважды непрерывно дифференцируемы по x и y*

соответственно. Пусть

$$\gamma^*(\widehat{U}'_x(x)) \leqslant 0, \quad \gamma_*(\widehat{V}'_y(y)) \geqslant \sigma\|y\|_2^{k-1},$$

$$U'_x(0,t) = 0, \quad \|U''_{xx}(x,t)\|_1 = O\left(\|x\|_1^{l-2}\right),$$

$$V'_y(0,t) = 0, \quad \|V''_{yy}(y,t)\|_2 = O\left(\|y\|_2^{k-2}\right),$$

$$\|DX\|, \|DY\| = O\left(\|(x,y)\|^k\right),$$

где $\sigma > 0$, $l \geqslant 2$ и $2 < k \leqslant 2(l-1)$. Тогда для системы (7) справедливы все утверждения теоремы 4, причем $h(y, t+\omega) = h(y,t)$.

Наконец, сделаем такое замечание. В условиях теоремы 4 порядок малости функции U по x может быть произвольным, но при этом должно иметь место неравенство $\gamma^*(U'_x(x,t)) \leqslant 0$. Если же порядок малости U по x не ниже порядка малости V по y, то для существования интегральной поверхности достаточно потребовать выполнения одного неравенства $\gamma_*(V'_y(y,t)) \geqslant \sigma\|y\|_2^{k-1}$ из условий (8). Любопытно, что для квазилинейных систем аналогичный результат места не имеет. В доказательстве существенно используется, что $k > 1$.

Теорема 6. *Пусть для системы (7) выполнены условия*

$$\gamma^*(U'_x(x,t)) \leqslant \lambda\|x\|_1^{k-1}, \quad \gamma_*(V'_y(y,t)) \geqslant \sigma\|y\|_2^{k-1}, \quad \|DX\|, \|DY\| \leqslant C\|(x,y)\|^k,$$

где $\sigma > 0, C > 0$, а на λ нет ограничений. Тогда все заключения теоремы 4 остаются в силе.

Отметим, что система, рассмотренная В. Н. Монаковым в [23], удовлетворяет условиям теоремы 6.

В совместной статье [29] Д. Ю. Волков[3] и Ю. А. Ильин применили логарифмические нормы для доказательства существования инвариантного тора у существенно нелинейной системы вида

$$\dot{x} = P(x) + Q(x,\varphi), \quad \dot{\varphi} = a(x,\varphi),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in \mathbb{R}^m$, вектор-функции P, Q и a непрерывно дифференцируемы по своим аргументам и 2π-периодические по каждой компоненте вектора φ. Предполагается, что

$$\gamma_*\left(P'_x(x)\right) \leqslant -\lambda\|x\|^k, \quad \|Q'_{x,\varphi}\|, \|a'_{x,\varphi}\| \leqslant l\|x\|^k, \quad \|Q(0,\varphi)\| \leqslant M,$$

где $\lambda > 0$, $l, M, k \geqslant 0$.

Теорема 7. *Если $2l < \lambda$, то рассматриваемая система имеет единственный инвариантный тор, представимый в виде $x = u(\varphi)$, где функция $u(\varphi)$ является 2π-периодической по каждой компоненте вектора φ и удовлетворяет условию Липшица $\|u(\varphi_1) - u(\varphi_2)\| \leqslant L\|\varphi_1 - \varphi_2\|$ с константой $L = 2l(\lambda - l)^{-1}$. Этот тор устойчив в том смысле, что каждое решение, начинающееся в некоторой его окрестности, стремится к нему при $t \to +\infty$.*

[3] Выпускник кафедры дифференциальных уравнений 1985 г., ученик Ю. Н. Бибикова.

В работе [30] обобщается теорема, доказанная В. Л. Лубихом в [21]. Рассматривается система существенно нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x} = X(t,z), \quad \dot{y} = G(y) + F(x) + Y(t,z), \tag{9}$$

где $z = (x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, удовлетворяющая предположениям:

1) вектор-функции X, G, F и Y непрерывны по своим аргументам и непрерывно дифференцируемы по x и y на множестве $||z|| \leqslant a$, $t \in \mathbb{R}$. При всех $t \in \mathbb{R}$ выполняется

$$X(t,0) = 0, \quad G(0) = F(0) = Y(t,0) = 0$$

(т. е. $x = 0$, $y = 0$ — решение системы (9));

2) $G(y)$ — однородная функция степени $k > 1$, где $(-1)^k = -1$ (при этом k может быть и рациональным числом, не обязательно целым), и существует такое $b > 0$, что

$$\gamma^*(G'(y)) \leqslant -b||y||^{k-1},$$

где верхняя логарифмическая норма γ^* порождается векторной нормой $||y||$ в $\mathbb{R}^q$;

3) $F(x)$ является однородной знакоопределенной функцией степени $m > k$;

4) наконец, при $||z|| \leqslant a$, $t \in \mathbb{R}$ функции X и Y удовлетворяют неравенствам

$$||X_z'(t,z)||, ||Y_z'(t,z)|| \leqslant C_1||z||^{m-1},$$

$$||Y(t,x,0)|| \leqslant C_2||x||^{m+1},$$

где $C_1, C_2 \geqslant 0$.

Нормы $||x||$ и $||y||$ выбираются такими, чтобы выполнялись условия 2)–4). Что касается $||z||$, то по определению полагаем

$$||z|| \stackrel{\text{def}}{=} \max(||x||, ||y||).$$

Отметим, что не исключаются случаи, когда система (9) является периодической по t или автономной.

Теорема 8. *При сделанных предположениях у системы (9) существует локально-интегральная поверхность «нейтрального» типа, задаваемая уравнением*

$$y = g(t,x),$$

где функция g удовлетворяет следующим условиям:

1) $g \in C(\mathbb{R} \times \{||x|| \leqslant a\} \mapsto \mathbb{R}^q)$;

2) $g(t,0) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$;

3) для любых $||x_1||, ||x_2|| \leqslant a$ и любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется $||g(t,x_1) - g(t,x_2)|| \leqslant ||x_1 - x_2||$;

4) $||g(t,x) - f(x)|| \leqslant \alpha/2||x||^{m/k}$, где $f(x)$ — это единственное решение уравнения $G(y) + F(x) = 0$, обладающее следующими свойствами:

1) $f \in C^1(\mathbb{R}^p)$;

2) f однородная функция степени m/k;

3) существуют такие постоянные $\alpha > 0, \beta > 0, T > 0$, что

$$\alpha||x||^{m/k} \leqslant ||f(x)|| \leqslant \beta||x||^{m/k}, \quad ||f'(x)|| \leqslant T||x||^{m/k-1}.$$

Замечание 1. Если исходная система (9) — ω-периодическая по t, то и функция g будет ω-периодической по t. Если же система (9) — автономная, то g не зависит от t.

Предположения относительно вида правой части второго уравнения системы (9) выглядят на первый взгляд не слишком естественными. Однако в статье приводится пример, когда при отсутствии слагаемого $F(x)$ теорема оказывается неверной. Более того, у системы из этого примера вообще нет никакого «нейтрального» множества из-за сложного поведения решений.

В статье [31], опубликованной в 2015 г., логарифмические нормы были применены для доказательства C^1-эквивалентности существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений и ее возмущения в окрестности асимптотически устойчивой точки покоя.

Рассматривается система

$$\dot{x} = F(x), \tag{10}$$

и ее возмущение

$$\dot{y} = F(y) + G(y), \tag{11}$$

где $x, y \in \mathbb{R}^k$, $F(0) = G(0) = 0$ и функция G имеет в нуле более высокий порядок малости, чем F.

Теорема 9. *Пусть для систем (10) и (11) при* $\|x\|, \|y\| \leq \Delta < 1$ *выполнены следующие условия:*

(a) $F, G \in C^2$;

(b) $\gamma^*(F'_y(y)) \leq -\lambda_0 \|y\|^{m-1}$;

(c) $\|F'_y(y)\| \leq K\|y\|^{m-1}$;

(d) $\|G(y)\| \leq c_0\|y\|^{2m-2+n}$;

(e) $\|G'_y(y)\| \leq c_1\|y\|^{m-1+n}$;

где $\lambda_0 > 0$, $m \geq 2$, $K > 0$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$, $n \geq \max\{N, 1\}$, *и константа* N *определяется формулой*

$$N = \frac{2^m K m}{\lambda_0} + 1 - m.$$

Тогда в некоторой окрестности начала координат существует C^1*-гладкая замена переменных вида* $x = y + f(y)$, *переводящая (11) в (10) и такая, что*

$$\|f(y)\| = O(\|y\|^{m-1+n}), \quad \|f'_y(y)\| = O(\|y\|^n).$$

Данная теорема обобщает результаты С. П. Токарева[4], полученные им в 1977 и 1987 гг.

В совсем недавней статье [32] было продолжено локальное качественное исследование системы (9). В этой статье в условиях теоремы 8 доказывается существование инвариантного расслоения некоторой окрестности нейтральной поверхности $y = g(t, x)$ на локально-интегральные поверхности устойчивого типа при дополнительном предположении, что нулевое решение на нейтральной поверхности равномерно устойчиво. Последнее эквивалентно тому, что равномерно устойчиво нулевое

[4] Выпускник кафедры дифференциальных уравнений, его научным руководителем в аспирантуре был Ю. Н. Бибиков, в докторантуре — В. А. Плисс.

решение следующей системы

$$\dot{x} = X(t, x, g(t, x)), \tag{12}$$

представляющей собой сужение исходной системы (9) на локально-интегральную поверхность g.

Теорема 10. *Пусть нулевое решение системы (12) равномерно устойчиво по Ляпунову. Тогда у поверхности $y = g(t, x)$ существует окрестность $\mathcal{N}(\delta)$ со следующим свойством: через любое решение $z_\xi(t) = (x_\xi(t), y_\xi(t))$, лежащее на поверхности $y = g(t, x)$ (т. е. $x_\xi(t_0) = \xi$, $y_\xi(t_0) = g(t_0, \xi)$) и одновременно в окрестности $\mathcal{N}(\delta)$, проходит единственная локально-интегральная поверхность вида $x = h(t, y, \xi)$. Все решения, располагающиеся на этой поверхности, с ростом t стремятся к решению $z_\xi(t)$. Эти поверхности целиком заполняют окрестность $\mathcal{N}(\delta)$.*

Замечание 3. Если система (9) периодическая или автономная, то устойчивость нулевого решения, как хорошо известно, автоматически будет равномерной, и тогда требование равномерности может быть исключено из формулировки теоремы.

Существование указанного расслоения является первым шагом для доказательств принципа сведения для системы (9) и топологической эквивалентности системы (9) своей главной части.

В заключение обзора упомянем о совсем новом результате Ю. А. Ильина, который был доложен на конференции «*Наука СПбГУ — 2023*», прошедшей 21 ноября 2023 г. в Санкт-Петербурге [33]. При доказательстве существования локально-интегральных поверхностей важную роль играет блочно-диагональный вид системы первого приближения. В том случае, когда система первого приближения линейная с постоянной матрицей коэффициентов, этого всегда можно добиться переходом к Жордановой форме. Линейная гиперболическая система с переменной матрицей также приводится к блочно-диагональному виду ляпуновским преобразованием (см. [14]) (мы упоминали об этом во введении). К сожалению, ничего подобного для существенно нелинейных систем не имеет места, и нужную блочно-диагональность приходится требовать априори в условии теоремы (см. формулировки почти всех приведенных в обзоре теорем). Это снижает общность полученных результатов и ставит естественный вопрос: а можно ли обойтись без этого предположения? Автору удалось получить такое обобщение теоремы 4 из [27], в котором уже не предполагается блочно-диагональность невозмущенной системы. Для доказательства применяется все тот же метод Адамара, что и в [27], который удалось модифицировать так, чтобы преодолеть возникшие трудности. Приведем формулировку результата.

Рассматривается существенно нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x, y), \quad \dot{y} = Y(t, x, y) \tag{13}$$

в окрестности нулевого решения $x = 0, y = 0$. Предполагается, что $x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q$, функции X, Y при всех $t \in \mathbb{R}$ и $||(x, y)|| \leqslant r$ непрерывны по своим аргументам, непрерывно дифференцируемы по x и y, и удовлетворяют следующим условиям:

$$\|X'_x\| \leqslant c_1 \|(x, y)\|^k, \|X'_y\| \leqslant c_2 \|(x, y)\|^k, \|Y'_x\| \leqslant c_4 \|(x, y)\|^k,$$

$$\gamma_*(Y'_y(t, x, y)) \geqslant \sigma \|y\|^k - c_3 \|x\|^k,$$

где $k > 0$ характеризует порядок нелинейности системы, а константы $\sigma > 0$, $c_{1,2,3,4} \geqslant 0$ удовлетворяют оценке

$$\sigma d > c_1 + c_2 + c_3 + c_4,$$

в которой число d задается формулой

$$d \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\|u\|_2=1, \|v\|_2 \leqslant 1} \int_0^1 \|su + (1-s)v\|_2^{k-1} ds > 0.$$

Несложно убедиться в том, что $0 < d < 1/k$. Обозначим через H следующее множество

$$H = \{(t, x, y)) : t \in \mathbb{R}, \|x\| \leqslant \|y\| \leqslant r\}.$$

Теорема 11. *При сделанных предположениях система (13) обладает единственной интегральной поверхностью (неустойчивой), располагающейся в H и представимой в виде $x = h(t, y)$, где вектор-функция $h : \{(t, y) : t \in \mathbb{R}, \|y\| \leqslant r\} \mapsto \mathbb{R}^p$ непрерывна по своим аргументам и удовлетворяет условию Липшица по переменной y*

$$\|h(t, y_1) - h(t, y_2)\| \leqslant \|y_1 - y_2\|.$$

Любое решение, располагающееся на поверхности h, при $t \to -\infty$ стремится к $(0, 0)$ так, что выполняется оценка

$$\|z(t)\| \leqslant \|z(t_0)\| \left(1 - \left(\frac{\sigma}{k} - c_4\right) k||z(t_0)||^k (t - t_0)\right)^{-1/k}.$$

Решения, начинающиеся в H и не лежащие на поверхности h, с убыванием t обязательно покидают H. Если система (13) является ω-периодической по t, то и функция h будет ω-периодической по t. Если система (13) — автономная, то h не зависит от t.

Литература

1. Бегун Н. А., Васильева Е. В., Звягинцева Т. Е., Ильин Ю. А. Обзор исследований по качественной теории дифференциальных уравнений в Санкт-Петербургском университете. I. Устойчивые периодические точки диффеоморфизмов с гомоклиническими точками и системы со слабо гиперболическими инвариантными множествами. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 2, 211–227 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.201

2. Пуанкаре А. *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.* Москва, ГИТТЛ (1947).

3. Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения.* Москва; Ленинград, ГИТТЛ (1950).

4. Hadamard J. Sur l'iteration et les solutions asymptotiques des equations differentielles. *Bull. Soc. Math. France* **29**, 224–228 (1903).

5. Lewis P. D. Invariant manifolds near an invariant point of unstable type. *Amer. J. Math.* **60**, 577–587 (1938).

6. Гробман Д. М. О гомоморфизме систем дифференциальных уравнений. *Доклады Академии наук СССР* **128** (5), 880–881 (1959).

7. Гробман Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве. *Матем. сборник* **56** (1), 77–94 (1962).

8. Hartman P. On the local linearization of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **14**, 568–573 (1963).

9. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. *Math. Zs.* **32**, 703–728 (1930).

10. Малкин И. Г. *Теория устойчивости движения.* Москва; Ленинград, ГИТТЛ (1952).

11. Майзель А. Д. Об устойчивости решений систем дифференциальных уравнений. *Труды Уральского политехн. ин-та* **52**, 20–50 (1954).

12. Плисс В. А. Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений. В: *Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний.* Киев, Наукова думка, 168–173 (1977).

13. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* Москва, Наука (1970).

14. Плисс В. А. *Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений.* Москва, Наука (1977).

15. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. *Новые методы нелинейной механики.* Москва; Ленинград, ГТТИ (1934).

16. Плисс В. А. Принцип сведения в теории устойчивости движения. *Изв. АН СССР. Сер. Математика* **28** (6), 1297–1324 (1964).

17. Плисс В. А. К теории инвариантных поверхностей. *Дифференц. уравнения* **2** (9), 1139–1150 (1966).

18. Wazewski T. Sul la limitation des integrales des systems d'equations differentielles lineaires ordinaires. *Studia Math.* **10**, 48–59 (1948).

19. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости.* Москва, Наука (1967).

20. Красовский Н. Н. Об устойчивости при больших начальных возмущениях. *Прикладная матем. и механика* **21** (3), 309–319 (1957).

21. Лубих В. Л. Существование локальной инвариантной поверхности при отсутствии линейного приближения. *Дифференц. уравнения* **7** (8), 1410–1418 (1971).

22. Монаков В. Н. Принцип сведения для некоторых сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. *Дифференц. уравнения* **8** (12), 2255–2256 (1972).

23. Монаков В. Н. О существовании локально инвариантной поверхности у некоторых сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. *Дифференц. уравнения* **8** (10), 1772–1778 (1972).

24. Монаков В. Н. Аналог теоремы Перрона для сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. *Дифференц. уравнения* **8** (11), 2096–2097 (1972).

25. Лозинский С. М. Оценки погрешности численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. *Изв. высш. учебн. заведений. Математика* **5**, 52–90 (1958).

26. Dahlquist G. Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. Thesis. *Trans. Royal Inst. Technology* **130** (1959).

27. Ильин Ю. А. О применении логарифмических норм в дифференциальных уравнениях. В: *Нелинейные динамические системы. Вып. 2.* Леонов Г. А. (ред.), 103–121. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1999).

28. Ильин Ю. А. Аналог теоремы Ляпунова — Перрона для существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1** (1), 118–119 (1991).

29. Волков Д. Ю., Ильин Ю. А. О существовании инвариантного тора у существенно нелинейной системы диференциальных уравнений. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4** (22), 27–31 (2007).

30. Ильин Ю. А. О существовании локально-интегральной поверхности нейтрального типа у существенно нелинейной системы дифференциальных уравнений. *Вестник Санкт-Петербургского университета Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1**, 43–54 (2007).

31. Ильин Ю. А. О гладкой эквивалености существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений в окрестности асимптотически устойчивой точки покоя. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* (60), 37–46 (2015).

32. Il'in Yu. Existence of an Invariant Foliation Near a Locally Integral Surface of Neutral Type. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **43** (2), 378–390 (2022).

33. Ильин Ю. А. О существовании интегральных поверхностей у существенно нелинейных систем общего вида. *Сборник тезисов докладов. Наука СПбГУ — 2023* (в печати).

Статья поступила в редакцию 20 января 2024 г.;
доработана 15 февраля 2024 г.;
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

К о н т а к т н а я и н ф о р м а ц и я:

Бегун Никита Андреевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; n.begun@spbu.ru
Васильева Екатерина Викторовна — д-р физ.-мат. наук, проф.; e.v.vasilieva@spbu.ru
Звягинцева Татьяна Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, доц.; t.zvyagintceva@spbu.ru
Ильин Юрий Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; y.a.iliin@spbu.ru

Review of research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. II. Locally qualitative analysis of essentially nonlinear systems*

N. A. Begun, E. V. Vasilieva, T. E. Zvyagintseva, Yu. A. Iljin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Begun N. A., Vasilieva E. V., Zvyagintseva T. E., Iljin Yu. A. Review of research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. II. Locally qualitative analysis of essentially nonlinear systems. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 401–418.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.301 (In Russian)

This article is the second one in a series of articles devoted to a review of the results of scientific research that have been carried out at the Department of Differential Equations of St. Petersburg University over the past three decades and continue to be carried out at the present time. The first article talked about studies of stable periodic points of diffeomorphisms with homoclinic points and systems of differential equations with weakly hyperbolic invariant sets. This paper presents the results of locally qualitative analysis of essentially nonlinear systems in the neighbourhood of the zero solution, obtained by employees and graduates of the department. A system is said to be essentially nonlinear if the Taylor series expansion of its right-hand sides does not contain linear terms. The study of such systems, firstly, is complicated by a more complex picture of the behavior of solutions compared to quasilinear systems. Secondly, there are not even theoretical formulas for the general solution of a nonlinear first-approximation system, the presence of which is so helpful in the quasi-linear case. All this complicates analysis and significantly limits technical capabilities. Therefore, almost any new results and any new methods of working with such systems are of great interest. One of the most effective tools for working with essentially nonlinear systems turned out to be the logarithmic Lozinsky norms. In a sense, they are an analogue of the characteristic exponents (eigenvalues) used in the theory of quasilinear systems. Research conducted at the department has demonstrated the wide possibilities of using logarithmic norms in a wide variety of problems.

Keywords: qualitative theory of differential equations, essentially nonlinear systems, logarithmic Lozinski norms, invariant surfaces, Lyapunov stability, smooth equivalence.

References

1. Begun N. A., Vasil'eva E. V., Zvyagintseva T. E., Iljin Yu. A. Review of research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. I. Stable periodic points of diffeormorphisms with homoclinic points, systems with weakly hyperbolic invariant sets. *Vestnik of*

*See first part: Begun N. A., Vasilieva E. V., Zvyagintseva T. E., Iljin Yu. A. Review of research on the qualitative theory of differential equations at St. Petersburg University. I. Stable periodic points of diffeomorphisms with homoclinic points, systems with weakly hyperbolic invariant sets. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 211–227. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.201 (In Russian)

Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy **11** (69), issue 2, 211–227 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.201 (In Russian)

2. Poincare H. *On curves defined by differential equations.* Moscow; Leningrad, GITTL Publ. (1947). (In Russian)

3. Lyapunov A. M. *Stability of Motion.* New York; London, Academic Press (1966) [Rus. ed.: Lyapunov A. M. *Obshchaia zadacha ob ustoichivosti dvizheniia.* Moscow; Leningrad, GITTL Publ. (1950)].

4. Hadamard J. Sur l'iteration et les solutions asymptotiques des equations differentielles. *Bull. Soc. Math. France* **29**, 224–228 (1903).

5. Lewis P. D. Invariant manifolds near an invariant point of unstable type. *Amer. J. Math.* **60**, 577–587 (1938).

6. Grobman D. M. On homomorphism of systems of differential equations. *Doklady Akademii nauk USSR.* **128** (5), 880–881 (1959). (In Russian)

7. Grobman D. M. Topological classification of neighborhoods of a singular point in n-dimensional space. *Matematicheskii sbornik* **56** (1), 77–94 (1962). (In Russian)

8. Hartman P. On the local linearization of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.* **14**, 568–573 (1963).

9. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. *Math. Zs.* **32**, 703–728 (1930).

10. Malkin I. G. *Theory of stability of motion.* Moscow; Leningrad, GITTL Publ. (1952). (In Russian)

11. Maizel A. D. On the stability of solutions to systems of differential equations. *Trudy Ural'skogo politekhnicheskogo instituta* **52**, 20–50 (1954). (In Russian)

12. Pliss V. A. Bounded solutions of inhomogeneous linear systems of differential equations. In: *Problems of the asymptotic theory of nonlinear oscillations.* Kyiv, Naukova dumka Publ., 168–173 (1977). (In Russian)

13. Daletsky Yu. L., Krane M. G. *Stability of solutions to differential equations in Banach space.* Moscow, Nauka Publ. (1970). (In Russian)

14. Pliss V. A. *Integral sets of periodic systems of differential equations.* Moscow, Nauka Publ. (1977). (In Russian)

15. Krylov N. M., Bogolyubov N. N. *New methods of nonlinear mechanics.* Moscow; Leningrad, GITTL Publ. (1934). (In Russian)

16. Pliss V. A. Principle of Reduction in the Theory of Stability of Motion. *Izvestiia Akademii nauk SSSR*, *Seriia matematicheskaia* **28** (6), 1297–1324 (1964). (In Russian)

17. Pliss V. A. To the Theory of Invariant Surfaces. *Differential Equations* **2** (9), 1139–1150 (1966). (In Russian)

18. Wazewski T. Sul la limitation des integrales des systems d'equations differentielles lineaires ordinaires. *Studia Math.* **10**, 48–59 (1948).

19. Demidovich B. P. *Lectures on the mathematical theory of stability.* Moscow, Nauka Publ. (1967). (In Russian)

20. Krasovsky N. N. On stability under large initial disturbances. *Prikladnaia matematika i mekhanika* **21** (3), 309–319 (1957). (In Russian)

21. Lubikh V. L. Existence of a local invariant surface in the absence of linear approximation. *Differential Equations* **7** (8), 1410–1418 (1971). (In Russian)

22. Monakov V. N. The reduction principle for some strongly nonlinear systems of differential equations. *Differential Equations* **8** (12), 2255–2256 (1972). (In Russian)

23. Monakov V. N. On the existence of a locally invariant surface for some strongly nonlinear systems of differential equations. *Differential Equations* **8** (10), 1772–1778 (1972). (In Russian)

24. Monakov V. N. An analogue of Perron's theorem for strongly nonlinear systems of differential equations. *Differential Equations* **8** (11), 2096–2097 (1972). (In Russian)

25. Lozinskii S. M. Error estimate for numerical integration of ordinary differential equations. *Izvestiia vysshykh uchebnykh zavedenii. Matematika* **5**, 52–90 (1958). (In Russian)

26. Dahlquist G. Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations. Thesis. *Trans. Royal Inst. Technology* **130** (1959).

27. Il'in Yu. A. On the Application of Logarithmic Norms to Nonlinear Systems of Differential Equations. In: *Nonlinear Dynamic Systems. Iss. 2.* Leonov G. A. (ed.), 103–121. St Petersburg, St Petersburg University Press (1999). (In Russian)

28. Il'in Yu. A. An analogue of the Lyapunov — Perron theorem for systems of strongly nonlinear differential equations. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy Ser. 1.* **1** (1), 118–119 (1991) [Eng. transl.: *Vestnik of Leningrad University. Mathematics* **24** (1), 97–99 (1991)].

29. Volkov D. Yu., Il'in Yu. A. On the existence of an invariant torus for an essentially nonlinear system of differential equations *Vestnik of Saint Petersburg University Mathematics. Mechanics. Astronomy. Ser. 1.* **4** (22), 27–31 (2007) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **25** (4), 7–10 (1992)].

30. Il'in Y. A. On the existence of a local-integral manifold of neutral type for an essentially nonlinear system of differential equations. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1* **1**, 43–54 (2007) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **40** (1), 36–45 (2007)].

31. Il'in Y. A. On the C^1-equivalence of essentially nonlinear systems of differential equations near an asymptotically stable equilibrium point. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1**, 2 (60), 37–46 (2015). (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **48** (1), 9–17 (2015)].

32. Il'in Yu. Existence of an Invariant Foliation Near a Locally Integral Surface of Neutral Type. *Lobachevskii Journal of Mathematics* **43** (2), 378–390 (2022).

33. Il'in Y. A. On the existence of integral surfaces for essentially nonlinear systems of general form, *Science of St Petersburg State University — 2023*, collection of abstracts (2023) (in print).

Received: January 20, 2024
Revised: February 15, 2024
Accepted: February 22, 2024

Authors' information:

Nikita A. Begun — n.begun@spbu.ru
Ekaterina V. Vasilieva — e.v.vasilieva@spbu.ru
Tatiana E. Zvyagintseva — t.zvyagintceva@spbu.ru
Yuriy A. Iljin — y.a.iliin@spbu.ru