

Математическое моделирование неравновесных процессов на кафедре физической механики СПбГУ.

Ч. 1. Моделирование процессов в газе, жидкости и твердом теле

В. А. Морозов, Т. А. Хантулева, А. Б. Яковлев

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Морозов В. А., Хантулева Т. А., Яковлев А. Б.* Математическое моделирование неравновесных процессов на кафедре физической механики СПбГУ. Ч. 1. Моделирование процессов в газе, жидкости и твердом теле // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 419–454. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.302>

В статье дан обзор работ сотрудников кафедры и лаборатории физической механики СПбГУ с момента ее основания в 1968 г. и до 2023 г. включительно, посвященных моделированию неравновесных процессов в газе, жидкости и твердом теле. Основное внимание уделено нескольким важнейшим результатам: 1) создание модели адсорбционного слоя для описания движения летательных аппаратов в ближнем космосе и верхних слоях атмосферы; 2) теоретическое и экспериментальное обоснование общего подхода к моделированию высокоскоростных и быстропотекающих процессов в различных средах; 3) применение указанного общего подхода к изучению ударно-индуцированных волновых процессов в твердом теле. Дано подробное обоснование необходимости интегро-дифференциальной формы уравнений переноса для неравновесных процессов. Показано, что временная эволюция системы, к которой приводит взаимодействие структурных элементов среды на мезоуровне, описывается кибернетическими методами, разработанными А. Л. Фрадковым в рамках теории управления адаптивными системами с обратной связью. Другие результаты изложены достаточно кратко.

Ключевые слова: моделирование, неравновесный процесс, адсорбционный слой, уравнения переноса, мезоуровень.

Кафедра физической механики была создана в 1968 г. для обучения студентов и организации научных исследований в таких областях механики, где традиционные модели среды оказываются недостаточными из-за грубости описания реальных процессов. Традиционные модели реальных процессов опираются обычно на представления о локально-равновесных или близких к ним состояниях механических систем, о слабом влиянии на динамику процессов их термодинамической неравновесности. Процессы, возникшие при создании сверхзвуковой авиации и космической техники, современных химических технологий, в экологии потребовали рассмотрения таких процессов переноса, когда отклонение от локального равновесия и их необратимый характер существенно влияют на динамику рассматриваемых процессов. Конкретным побудительным мотивом к созданию кафедры стала необходимость расширения фундаментальных исследований в области аэродинамики тел в верхних

слоях атмосферы, начатых в ЛГУ по инициативе члена-корреспондента АН СССР С. В. Валандера [1].

1. Влияние процессов в адсорбционном слое на динамические характеристики. 1.1. Модель адсорбционного слоя. В качестве методической основы при решении задач обтекания космических аппаратов (КА) нейтральной компонентой разреженного газа верхней атмосферы использовалось кинетическое уравнение Больцмана, дополненное Б. В. Филиповым кинетическим уравнением адсорбционного слоя [2]. С помощью метода сжатых отображений доказаны теоремы существования и единственности решений граничных задач для нестационарного уравнения Больцмана [3]. Результаты проведенных на кафедре и в связанной с ней лаборатории физической кинетики теоретических и экспериментальных исследований [3–11] были обобщены в книге [12].

Для тел с размерами порядка 1 м, начиная с высот ~ 150 км движение происходит в режиме свободномолекулярного обтекания. В этом случае функцию распределения набегающего потока считают известной, если задано состояние невозмущенной атмосферы. Для определения аэродинамических коэффициентов выпуклых тел необходимо знать характер взаимодействия налетающих частиц с поверхностью. Взаимодействие определяется не только сортом газовых частиц и физической структурой тела, но и состоянием поверхности в рассматриваемый момент времени. При обычных условиях на поверхности имеется адсорбционный слой, который полностью определяет характер взаимодействия газового потока с поверхностью.

При свободномолекулярном обтекании тел с большими скоростями адсорбционный слой претерпевает изменения, поэтому необходимо исследование неравновесной адсорбции. Для описания процесса адсорбции было предложено ввести определенный набор функций, для которых при постановке конкретной задачи находят явное выражение. При кинетическом подходе важно отделять частицы, которые находятся в процессе взаимодействия с поверхностью, от адсорбированных, так как их последующее поведение определяется разными факторами и параметрами [12]. Предполагается, что ударившаяся о поверхность частица адсорбируется, если ее состояние перестало коррелировать с состоянием до столкновения.

В [12] сформулированы основные предположения для моделирования процесса адсорбции:

1. Формирование каждого следующего слоя начинается после заполнения предыдущего.
2. Отсутствие процессов разложения и соединения на поверхности, т. е. последняя не является катализатором и нет диссоциации и ионизации в результате удара.
3. Адсорбированные частицы основное время находятся в квазиравновесных условиях с поверхностью. Выполнение этого условия позволяет разделить процессы десорбции (вылета частицы с поверхности) в результате тепловых флуктуаций и «выбивания» и считать процессы релаксации мгновенными.

Сформулированные предположения справедливы для большинства практически интересных случаев адсорбции атмосферных газов на твердых поверхностях [11]. Указанные предположения позволили получить уравнение баланса адсорбированных частиц. Предполагается, что $(n-1)$ -й адсорбированный слой заполнен, тогда указанное уравнение имеет вид

$$\frac{d\theta_n}{dt} = N_{1n} - N_{2n}, \quad (1)$$

где θ_n — плотность числа адсорбированных частиц; N_{1n} — число частиц, адсорбирующихся на единице площади поверхности за единицу времени; N_{2n} — число десорбировавшихся частиц с той площади за то же время. Падающий на поверхность поток частиц определяется через функцию распределения f

$$N_{1n} = \int \int \int_{u_{n'} < 0} |u_{n'}| f(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}, t) k_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \quad (2)$$

где n' — направление местной внешней нормали; \mathbf{r}_s — радиус-вектор точки поверхности тела; \mathbf{u} — скорость в потоке; $k_n(\mathbf{u})$ — вероятность адсорбции частицы в n -м слое. Функция N_{2n} определяется спонтанной десорбцией и «выбиванием» и может быть задана как $N_{2n} = \theta_n \cdot \psi_n$, где ψ_n — плотность вероятности десорбции частицы в n -м слое. Таким образом, для замыкания уравнения (1) необходимо было научиться определять функции k_n и ψ_n .

Эксперименты [13] указывают на существенную зависимость вероятности адсорбции от конкретных условий и, в частности, от скорости газовой частицы \mathbf{u} . Явление адсорбции расщепляется на два физически различных процесса:

- 1) попадание на свободные участки поверхности в рассматриваемом слое в процессе релаксации;
- 2) попадание на свободные участки после адсорбции на занятых участках поверхности и последующей миграции.

Тогда общая вероятность адсорбции в n -м слое сталкивающейся с поверхностью частицы может быть записана в виде

$$k_n = (1 - \theta_n \sigma_n) k'_n(u) + \theta_n \sigma_n k''_n(u), \quad (3)$$

где σ_n — площадь, приходящаяся на одну частицу, при максимальном заполнении n -го слоя; k'_n — вероятность адсорбции при попадании на незанятый участок в n -м слое; k''_n — вероятность адсорбции в n -м слое при попадании на занятый участок поверхности. В свою очередь k''_n можно представить в виде

$$k''_n = \zeta_n + \chi_n, \quad (4)$$

где ζ_n — вероятность адсорбции в процессе релаксации, χ_n — вероятность адсорбции в результате миграции из $(n + 1)$ -го слоя, и рассмотреть отдельно каждый из этих процессов.

При движении тел в верхних слоях атмосферы обычно выполняются неравенства

$$\tau_d \ll \tau_{m,n+1} \ll \tau_{a,n+1} \ll \tau_{a,n}, \quad (5)$$

где τ_d , $\tau_{m,n}$, $\tau_{a,n}$ — характерные времена динамического, миграционного и адсорбционного взаимодействия в $(n + 1)$ -м и n -м слоях соответственно. Неравенство (5) позволяет изучать процессы релаксации, миграции и адсорбции отдельно, а также считать, что число частиц в $(n + 1)$ -м слое пренебрежимо мало по сравнению с числом частиц в n -м слое до практически полного заполнения последнего. В процессе релаксации в $(n + 1)$ -м слое частица либо покидает поверхность (десорбируется), либо попадает в n -й слой, теряет свою энергию и вступает в фазу миграционной эволюции.

Поведение индивидуальной частицы во времени при рассмотрении взаимодействия газового потока с адсорбционным слоем определяется некоторым законом

флуктуаций относительно среднего закона релаксации. Для описания среднего состояния релаксирующей частицы вводятся функции: $\overline{P}_{\tau,n+1}(t)$ — касательная составляющая среднего импульса; $\overline{E}_{\tau,n+1}(t)$ — средняя энергия колебательного движения в касательной плоскости; $\overline{E}_{norm,n+1}(t)$ — средняя энергия колебательного движения по нормали к поверхности в момент времени t при попадании частицы в $(n+1)$ -й слой в момент времени $t=0$. Для них справедливы следующие уравнения:

$$\frac{d}{dt}\overline{P}_{\tau,n+1} = -\alpha_{n+1}(\overline{P}_{\tau,n+1} - \overline{P}_{\tau,n}), \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{E}_{norm,n} = -\alpha_{norm,E} \left(\overline{E}_{norm,n} - \frac{kT_w}{2} \right), \quad (7)$$

где $\alpha_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}}{l_{n+1}}\delta_{n+1}$ — коэффициент диффузии касательного импульса; ε_{n+1} — энергия миграционного барьера; δ_{n+1} — толщина адсорбционного слоя в виде ступенчатой функции; l_n — размер миграционной ячейки; $\alpha_{norm,E}$ — коэффициент диффузии средней энергии частицы, который определяется энергией связи, структурой газовых частиц и подложки; k — постоянная Больцмана; T_w — температура поверхности.

Для нормального закона флуктуации энергии $E_{norm,n}$ относительно среднего значения $\overline{E}_{norm,n}$ плотность вероятности десорбции имеет вид

$$\mathcal{P}_n'' = \tau_0^{-1} \exp\left(\frac{-2Q_n}{\overline{E}_{norm,n}}\right), \quad (8)$$

где Q_n — энергия связи частицы в n -м слое; τ_0 по порядку величины совпадает со средним временем пребывания частицы в адсорбционном слое при средней энергии нормальных колебаний $\overline{E}_{norm,n}$. Тогда общая вероятность попадания частицы на незанятый узел в n -м слое в результате релаксации $\overline{P}_{\tau,n+1}$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{P} = \sum_{N=1}^{N_n^*} \mathcal{P}_N = (1 - \nu'_n) \sum_{N=1}^{N_n^*} (\nu'_n)^{N-1} \exp\left(-\int_0^{t_{N_n}} \mathcal{P}_n''(\tau) d\tau\right), \quad (9)$$

где $N_n^* = \frac{L_{n+1}^*}{l_n}$, σ_n , $L_{n+1} = L_{n+1}(t) = \frac{1}{m} \int_0^t \overline{P}_{\tau,n+1}(\tau) d\tau$, l_n — линейный размер площадки, $L_{n+1}^* = L_{n+1}(\infty)$, $t = t_{n+1}(L)$ — обращение закона $L_{n+1} = L_{n+1}(t)$, $t_{N_n} = t_{n+1}(Nl_n)$, $\nu'_n = \theta_n \sigma_n$, m — масса частицы.

Аналогично можно показать, что общая вероятность χ_n попадания в n -й слой в результате миграционных переходов после того, как релаксация закончилась, записывается в виде

$$\chi_n = \frac{\gamma_{n+1}(1 - \nu'_n)(\nu'_n)^{N_n^*} \exp\left(-\int_0^{t_{N_n^*}} \mathcal{P}_n''(\tau) d\tau\right)}{1 - \gamma_{n+1}\nu'_n}, \quad (10)$$

где $\gamma_{n+1} = \frac{\mathcal{P}_{m,n+1}}{\mathcal{P}_{m,n+1} + \mathcal{P}_{out,n+1}}$, $\mathcal{P}_{m,n+1}$ — плотность вероятности миграционного перехода, $\mathcal{P}_{out,n+1}$ — плотность вероятности вылета в результате тепловых флуктуаций. Таким образом, общее выражение можно получить, используя выражения (3), (4), (9) и (10).

Скорость десорбции существенно определяется энергией связи адсорбированной частицы. Величина этой энергии зависит от структуры поверхности, свойств газовой частицы, рода связи и степени заполнения адсорбционного слоя в окрестности

рассматриваемой точки. Если энергия колебательного движения в перпендикулярном направлении в какой-либо момент времени становится больше энергии связи, то частица покидает поверхность. Необходимую для освобождения энергию частица может получить 1) за счет энергетических флуктуаций в системе решетка тела — адсорбированные частицы и 2) за счет непосредственного воздействия ударяющихся о поверхность частиц потока.

Так как время обмена квантом энергии в системе решетка тела — адсорбированный атом много меньше характерного времени изменения температуры тела, то система находится в квазиравновесных условиях. Следовательно, ее состояние в произвольный момент времени можно описать каноническим распределением. Десорбция частицы происходит, если энергия нормальных к поверхности колебаний частицы превышает энергию связи Q . Поэтому вероятность спонтанной (тепловой) десорбции есть вероятность обладания частицей энергией больше, чем Q . Обозначим через $\psi(T_w, Q)\Delta t$ вероятность обладания частицей хотя бы раз энергией $\geq Q$ за промежуток времени Δt . Функцию ψ можно найти, если известно среднее время пребывания τ_a адсорбированной частицы на поверхности при равновесной адсорбции. Так как среднее время колебательных переходов адсорбированной частицы на много порядков меньше среднего времени адсорбции τ , то временной корреляцией состояний при построении ψ можно пренебречь. Поэтому вероятностный процесс десорбции можно считать чисто разрывным и при равновесии адсорбционного слоя с газовой средой $\psi = 1/\tau$. Для равновесной адсорбции хорошим приближением является такое выражение для τ [13, 14]:

$$\tau = \tau_0 \exp(Q/kT), \quad (11)$$

где $\tau_0 = \frac{h}{kT} f_{a,norm} \frac{f_{a,forw}}{f_{a,freeforw}} \cdot \frac{f_{a,rot}}{f_{g,rot}}$; h — постоянная Планка; $f_{a,norm}$ — статистическая сумма для колебаний адсорбированной молекулы по нормали к поверхности; $f_{a,forw}$, $f_{a,freeforw}$ — статистические суммы по поступательным степеням свободы в реальном и идеальном двумерном газе; $f_{a,rot}$, $f_{g,rot}$ — статистические суммы по вращательным степеням свободы в адсорбированной и газовой фазах. В частности, при выполнении условий $Q \gg kT \gg h\nu_{norm}$ соотношение для ψ существенно упрощается:

$$\psi = \nu_{norm} \exp(-Q/kT), \quad (12)$$

где ν_{norm} — частота нормальных к поверхности колебаний.

Ввиду сложности уравнения адсорбционного заполнения его решение в аналитическом виде удастся найти только в относительно простых случаях. Для малых скоростей движения тела (потока) можно пренебречь релаксационными процессами в адсорбционном слое и зависимостью вероятности адсорбции K' от скорости. При этих условиях уравнение адсорбционного слоя будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \nu'_n = I \sigma_n (1 - \nu'_n) \left(K' + \frac{\gamma_{n+1} \nu'_{n+1}}{1 - \gamma_{n+1} \nu'_n} \right) - \nu'_n \psi, \quad (13)$$

где $I = \int \int_{(u_{n'} < 0)} |u_{n'}| f(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}) d\mathbf{u}$.

Интегрируя (13), получим

$$\left| \frac{\nu'_n - \nu'_{n1}}{\nu'_{n0} - \nu'_{n1}} \right|^{1 - \gamma_{n+1} \nu'_{n1}} \left| \frac{\nu'_n - \nu'_{n2}}{\nu'_{n0} - \nu'_{n2}} \right|^{\gamma_{n+1} \nu'_{n2} - 1} = \exp(-mt) \quad (14)$$

где $a = \gamma_{n+1} [\psi - I\sigma_n(1 - K')]$; $b = I\sigma_n [\gamma_{n+1} - K' - K'\gamma_{n+1}] - \psi$; $c = I\sigma_n K'$; $\nu'_{n1} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $\nu'_{n2} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$; $m = \sqrt{b^2 - 4ac}$; $\nu'_{n0} = \nu'_n(0)$.

Уравнение (14) имеет единственное решение в интервале $t \in [0, 1]$. Хотя для стационарного уравнения существует два решения, физически реализуется только одно из них, так как относительное заполнение должно быть положительным и не больше единицы.

1.2. Методика расчета аэродинамических коэффициентов тел в свободномолекулярном потоке из нейтральных частиц. Считая состояние адсорбционного слоя $\{\theta_n(\mathbf{r}_s, t)\}$ известным, рассчитаем функцию распределения вылетающих с поверхности частиц $f(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}, t)|_{u_n > 0}$. Вследствие возможного накопления частиц на поверхности или ее очищения в общем случае суммарные числа падающих и вылетающих частиц не совпадают, поэтому для определения $f(\mathbf{r}_s, \mathbf{u}, t)|_{u_n > 0}$ не нужно непосредственно связывать состояние вылетающих частиц с их состоянием до столкновения с поверхностью.

В соответствии с вышеизложенным все частицы, вылетающие с поверхности, можно разделить на следующие группы в зависимости от их истории:

- 1) частицы, сталкивающиеся с чистыми участками и сразу вылетающие с поверхности;
- 2) частицы, вылетающие в процессе релаксации в $(n + 1)$ -м слое;
- 3) частицы, вылетающие в процессе релаксации в n -м слое;
- 4) частицы, вылетающие в процессе миграции в $(n + 1)$ -м слое;
- 5) спонтанно-десорбированные частицы из n -го слоя.

Число частиц, вылетающих с площадки ds поверхности за промежуток времени dt и обладающих скоростью внутри $d\mathbf{u}$, можно представить в виде

$$dI = \sum_{i=1}^5 dI_i \quad (15)$$

где индекс i характеризует группы 1–5.

В [12] получены выражения для каждого dI_i , например для частиц из второй группы

$$dI_2 = ds dt d\mathbf{u} \int v_z f(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}, t) \sum_{N_n=1}^{N_n^*} \nu_n^{N_n+1} \exp\left(-\int_0^{t_{N_n}} \mathcal{P}''_{n+1}(\tau) d\tau\right) \times \times \frac{m l_n \mathcal{P}''_{n+1}(t_{N_n})}{\bar{P}_{\tau, n+1}(t_{N_n})} f_{out}(\mathbf{u}, t_{N_n}) d\mathbf{v}, \quad (16)$$

где

$$f_{out} = C u_z \exp\left\{\frac{m}{2kT_w} \left[\left(u_x - \frac{1}{m} \bar{P}_{\tau, n+1}(t) \sin \alpha\right)^2 + \left(u_y - \frac{1}{m} \bar{P}_{\tau, n+1}(t) \cos \alpha\right)^2 \right] - \frac{m}{4\bar{E}_{norm, n+1}(t)} \left(u_z^2 + \frac{2Q_{n+1}}{m}\right)\right\},$$

x, y, z — декартова система координат, у которой плоскость xOy является касательной к поверхности; плоскость yOz параллельна скорости v ; ось Oz направлена по

нормали к поверхности, $\cos \alpha = v_y / \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, $\sin \alpha = v_x / \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, $\frac{1}{m} \overline{P}_{\tau, n+1}(0) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, $\overline{E}_{norm, n+1}(0) = mv_z^2/2 + Q_{n+1}$, постоянная C определяется из условия нормировки f_{out} к единице.

Если обозначить через $\mathcal{J}(\mathbf{u})$ плотность потока частиц с поверхности

$$\mathcal{J} = \frac{dI}{ds dt d\mathbf{u}}, \quad (17)$$

то потоки основных макроскопических величин (массы, импульса, энергии) с поверхности можно представить в виде

$$\begin{aligned} I_{N_0} &= \int_{(u_z > 0)} \mathcal{J}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, & I_{p_0} &= m \int_{(u_z > 0)} \mathbf{u} \mathcal{J}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}, \\ I_{E_0} &= \frac{m}{2} \int_{(u_z > 0)} u^2 \mathcal{J}(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (18)$$

Существует ряд ситуаций, когда при заполнении n -го слоя можно пренебречь влиянием на аэродинамические характеристики релаксирующих частиц в n -м или $(n+1)$ -м слоях. Если при этом разница энергий в соседних слоях не влияет на энергетический спектр улетающих с поверхности частиц, то выражения для dI_i ($i = \overline{2, 5}$) объединяются. В этом случае мигрирующие частицы в $(n+1)$ -м слое следует считать адсорбирующимися в n -м слое, а зависимость $dI_2 + dI_4$ от ν' можно пренебречь. При отсутствии чистых участков поверхности улетающие с поверхности частицы разделяются только на две группы: релаксирующие и спонтанные.

При дальнейшем возрастании скорости пучка на индикатрису в первую очередь начинают влиять $\overline{P}_{\tau, n+1}$, а релаксацию по $\overline{E}_{norm, n+1}$ можно не учитывать. В более общем случае, когда начинает сказываться релаксация по нормали к поверхности, приближенным эквивалентом нестационарной схемы релаксации является стационарная с некоторой постоянной энергией $E'_{norm, n}$, удовлетворяющей некоторому стационарному уравнению диффузии с эффективным коэффициентом диффузии. В этом случае f_{out} можно записать в виде

$$f_{out} = C u_z \exp \left\{ \frac{m}{2kT_w} \left[u_x^2 + \left(u_y - \frac{\overline{P}_{ny}}{m} \right)^2 \right] - \frac{m}{4\overline{E}_n} \left(u_z^2 + \frac{2Q_n}{m} \right) \right\},$$

где C — нормировочная постоянная; \overline{P}_{ny} — средний импульс частицы слоя; \overline{E}_n — средняя кинетическая энергия движения частиц по нормали к поверхности.

Учитывая, что 1) потоки (18) должны рассчитываться на границе адсорбционного слоя, а не на границе адсорбирующего поля; 2) поток полной энергии изменяется вследствие увеличения нормальной к поверхности компоненты импульса; 3) коэффициенты диффузии для импульса и энергии в первом приближении можно считать постоянными для заданных газа и поверхности; 4) зависимость Q_n может быть получена суммированием ван-дер-ваальсовского притяжения материальной точки полупространственным континуумом, окончательная система уравнений для приближенной модели взаимодействия газового пучка с релаксирующим адсорбционным слоем принимает следующий вид:

$$\alpha_n \theta_n P_{ny} = I_{P_y}^0 - I_N^{(0)} P_{ny}; \quad (19)$$

$$\alpha_{nE} (\bar{E}_n - 1/2kT_w) = I_E^{(0)} - I_N (2\bar{E}_n + kT_w); \quad (20)$$

$$\theta_n \nu_{norm} [\exp(Q_n/2\bar{E}_n) - 1]^{-1} = I_N; \quad (21)$$

$$\sigma_n \theta_n \leq 1; \quad (22)$$

$$Q_n = Q_0/n^3. \quad (23)$$

Здесь $I_{P_y}^0$, $I_E^{(0)}$, I_N определяются через функцию распределения набегающего потока. Соотношение (22) представляет собой условие заполнения каждого слоя. Замена ступенчатую функцию δ_n непрерывной, можно легко перейти к модели непрерывного адсорбционного заполнения. Результаты проведенных на основе системы уравнений (19)–(23) численных расчетов индикатрисы рассеяния основных характеристик обмена для взаимодействия максвелловского пучка показали удовлетворительное соответствие экспериментальным данным.

Более 30 лет на кафедре выполнялись исследования [15–23] по моделированию конвективно-диффузионных процессов в неоднородных средах. В работах [24–34] построена и реализована процедура решения важной прикладной задачи о турбулентном неизотермическом движении реального многокомпонентного газа в трубопроводе с гладкими и шероховатыми стенками.

С. Н. Макаровым предложена интегральная вариационная формулировка задач гидродинамики, эквивалентная уравнениям Навье — Стокса с учетом излучения [35–49]. На ее основе решен ряд практически важных задач, в частности построены аналитические решения для коротких, нелинейных акустических и слабых ударных волн.

2. Единый подход к моделированию высокоскоростных и быстропротекающих процессов в различных средах. По мере проводимых на кафедре исследований [50–56] становилось все более очевидным, что процессы вдали от термодинамического равновесия во всех средах протекают по единым закономерностям, хотя и со своими специфическими особенностями. Более того, можно утверждать, что все реальные процессы в физических системах различной природы являются в той или иной степени неравновесными, тогда как классические разделы механики базируются на идеализированных моделях, справедливых в условиях, близких к термодинамическому равновесию.

Через полвека проблема теоретического описания неравновесных процессов переноса стала чрезвычайно актуальной. Развитие современной науки и техники требует описания высокоскоростных, быстропротекающих и тонких переходных процессов, протекающих на очень малых пространственно-временных масштабах (в том числе на наномасштабах), которые не описываются классической механикой сплошной среды. Долгое время считалось, что динамические процессы — это нелинейные диссипативные процессы, которые можно описать дифференциальными уравнениями в частных производных. Современное представление о характере протекания динамических процессов, основанное на экспериментальных данных, полученных с помощью новых высокоточных приборов, кардинально отличается от ранее общепринятого. Стало понятно, что процессы, протекающие при высоких скоростях и сильных пространственных неоднородностях, — неравновесные процессы — сопровождаются целым комплексом многостадийных и многомасштабных процессов обмена импульсом и энергией между различными степенями свободы. Попытки применять традиционные модели, связывающие воздействие на систему с ее реакцией в

одной и той же пространственной точке и в один и тот же момент времени, приводили к серьезным ошибкам при их использовании вдали от термодинамического равновесия. Для того чтобы избежать ошибок при построении математических моделей, надо понимать специфические особенности реакции систем на внешнее воздействие, сильно отклоняющее состояние системы от равновесия.

Экспериментальные исследования неравновесных процессов в различных областях механики (гидродинамика турбулентных течений и течений многофазных сред, механика волновых процессов в твердых телах и процессов в живых системах) обнаруживают множество общих черт, характеризующих неклассическую реакцию системы на внешнее воздействие. Вдали от термодинамического равновесия процессы переноса в разных средах часто сопровождаются формированием новых многомасштабных структур, таких как пристеночные слои, крупномасштабные пульсации массовой скорости, вихревые структуры, локализованные неоднородности и т. п. Наблюдаемые эффекты структурообразования на промежуточных масштабах между макро- и микроскопическими масштабами определяются не только самим веществом и его фазовым состоянием, но также режимом нагружения, граничными условиями и геометрией системы. Самоорганизация, проявляющаяся в реакции сложной системы на интенсивное внешнее воздействие, представляет собой процесс формирования многомасштабных вихреволновых турбулентных структур, не имеющих прямой связи с первичной структурой системы.

Высокоскоростной перенос в различных средах, самоорганизация, турбулентность, формирование мезоскопических структур, регуляция в живых системах — все эти, как казалось, разные явления тесно связаны друг с другом рядом общих закономерностей. Все процессы, в которых наблюдаются такие явления, протекают вдали от локального равновесия. Область сильнонеравновесных процессов до сих пор до конца не изучена. Именно поэтому отдельные попытки построения математических моделей неравновесных процессов в термодинамике, описания самоорганизации в синергетике, турбулентных течений в гидродинамике и образования дефектных структур в мезомеханике не обладали предсказательной способностью в требуемом диапазоне условий. Дело в том, что вся классическая наука основывалась на концепции термодинамического равновесия; многие определения термодинамических величин вдали от равновесия теряют свой физический смысл, а их использование для описания неравновесных процессов приводило к серьезным ошибкам. Поэтому применение высокоскоростных и быстропротекающих процессов в современной технике потребовало выхода за рамки моделей механики сплошных сред.

Основная трудность исследования сильнонеравновесных процессов заключается в том, что вдали от равновесия состояния физической системы быстро эволюционируют в направлении более устойчивых при данных условиях состояний за счет формирования внутреннего управления посредством обратной связи между структурой, ее эволюцией и изменением макроскопических свойств системы.

Проблема математического описания процессов в макроскопических системах вдали от локального термодинамического равновесия вместе с проблемой самоорганизации турбулентных структур остается важнейшей нерешенной проблемой современной механики, которую невозможно решить без привлечения таких смежных дисциплин, как статистическая физика, синергетика, теория информации и теория управления адаптивными системами.

Однако существующая далеко зашедшая дифференциация науки приводит к тому, что достижения одной дисциплины часто становятся недоступными для понима-

ния представителями других дисциплин. К сожалению, мировое научное сообщество оказалось неготовым не только к таким комплексным исследованиям неравновесных процессов, но и к восприятию представлений, выходящих за пределы традиционных концепций. Поэтому до сих пор не существует такой фундаментальной теории, на основе которой можно было бы описать все эффекты, наблюдаемые при высокоскоростном деформировании реальных сред.

Таким образом, разработка теоретических подходов к адекватному физически обоснованному моделированию неравновесных процессов переноса в реальных средах является важнейшей задачей механики. В отличие от «жестких» моделей механики сплошных сред для описания многомасштабных процессов в сложных системах необходимо строить «мягкие» математические модели интегрального типа, сохраняющие целостность системы и позволяющие ей адаптироваться к изменению условий внешнего воздействия, перестраивая свою структуру и таким образом уменьшая свои необратимые потери. Новые математические модели требуют новых методов решения задач — наука будущего должна ответить на новые вызовы. Именно такой принципиально новый междисциплинарный подход, указывающий возможные пути к решению задач, выходящих за пределы традиционной механики, и был разработан на кафедре физической механики.

Построение математической модели процесса в реальной системе возможно только на основании ее физической модели. В свою очередь физическая модель должна опираться на совокупность экспериментальных данных, полученных на данный момент времени и согласующихся между собой.

2.1. Экспериментальное обоснование физической модели сильнонеравновесных процессов переноса. Известные экспериментальные факты позволяют утверждать следующее: 1) с ростом скорости деформации конденсированной среды все меньшая часть механической энергии, полученной за счет внешнего воздействия, преобразуется в тепло [57–58]; 2) в реальных системах возмущения распространяются с конечной скоростью, и реакция системы, выведенной из равновесия, всегда отстает от самого воздействия; 3) многомасштабные коллективные эффекты характеризуют реакцию системы на внешнюю нагрузку, отклоняющую ее состояние далеко от равновесного; 4) турбулентные вихревые структуры были экспериментально обнаружены даже в твердых телах после прохождения ударных волн [59–60].

Отсюда следует такая физическая модель процессов вдали от равновесия. На малых характерных временах полученная за счет внешнего воздействия механическая энергия не успевает диссипировать в тепловую форму на микроуровне и формирует на некотором промежуточном мезоскопическом масштабе определенные структурные элементы, которые являются носителями массы, импульса и энергии. Поэтому диссипативные эффекты вытесняются инерционными. Инерция в свою очередь приводит к необходимости учитывать не только запаздывание отклика системы на возмущение, но и в общем случае память об истории воздействия на систему. В результате на малых временах возникают коллективные эффекты, связанные с формированием мезоскопических образований, которые могут двигаться относительно друг друга как некоторые частицы. Движение таких частиц за счет взаимодействия друг с другом и инерции, особенно сильной в конденсированных средах, может стать турбулентным при достаточной энергии извне. Все это вместе говорит о турбулентности как о неотъемлемом атрибуте сильнонеравновесных процессов в реальных средах.

Перечисленные экспериментальные факты и вытекающая из них физическая модель сильнонеравновесных процессов позволяют сделать однозначный вывод: дифференциальные модели сплошных сред не могут корректно описать высокоскоростные и быстротекущие процессы в реальных средах.

2.2. Теоретическое обоснование нелокального моделирования процессов вдали от локального равновесия. Альтернативой концепции сплошной среды может служить лишь интегральное описание, учитывающее эффекты пространственной нелокальности и памяти об истории воздействия на систему. Попытки включить интегральные эффекты в макроскопическое описание поведения системы вне равновесия предпринимались давно. Критический анализ ситуации, сложившейся в настоящее время с описанием неравновесных процессов переноса позволяет сделать вывод, что для описания процессов вдали от локального термодинамического равновесия надо переходить на более глубокий уровень описания по сравнению с усредненным, макроскопическим уровнем описания. Такое описание на основе первых принципов дает неравновесная статистическая механика.

Еще во второй половине прошлого века в рамках неравновесной статистической механики Д. Н. Зубарев [61] из первых принципов доказал, что вдали от равновесия макроскопические уравнения переноса не могут быть локализованы ни в пространстве, ни во времени. Методом неравновесного статистического оператора он вывел обобщенные интегро-дифференциальные макроскопические уравнения переноса, справедливые вдали от локального равновесия. С точки зрения неравновесной статистической механики в случае произвольного отклонения от равновесного состояния системы фактически любой уровень усредненного описания будет заведомо неполным. Эффекты нелокальности и памяти — это плата за неизбежную неполноту описания процесса в открытой неравновесной системе. Характерной особенностью обобщенного описания является сохранение в обобщенных макроскопических уравнениях переноса интегральной информации о системе при описании ее локальных свойств. Согласно его результатам, реакция среды на высокоскоростную деформацию должна быть нелинейной, нелокальной и зависящей от предыстории.

Термодинамические потоки $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ и силы $\mathbf{X}(\mathbf{r}_1, t_1)$ связаны интегральными соотношениями, в которых интегральные ядра переноса $\mathbf{R}_{P,P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t, t_1)$ являются пространственно-временными корреляционными функциями потоков в процессе их эволюции в соответствии с оператором Лиувилля L :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^t dt_1 \int d\mathbf{r}_1 \mathbf{R}_{P,P}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, t, t_1) \mathbf{X}(\mathbf{r}_1, t_1), \\ \mathbf{R}_{P,P}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) &= (\mathbf{P}(p, r, \mathbf{r})', e^{-iLt} \mathbf{P}(p, r, \mathbf{r}_1)')'. \end{aligned} \quad (24)$$

Из полученных Зубаревым обобщенных соотношений между термодинамическими силами и потоками следует, что предельные случаи замороженной и завершенной релаксации по поступательным степеням свободы характеризуют упругую и гидродинамическую реакцию среды соответственно, которая описывается дифференциальными уравнениями переноса механики сплошной среды, тогда как в переходных режимах уравнения переноса становятся интегро-дифференциальными.

Интересные следствия вытекают из полученных Зубаревым результатов относительно поведения энтропии вдали от равновесия. С помощью метода неравновесного статистического оператора он вывел обобщенный критерий эволюции, физическое содержание которого заключается в том, что в реальном неравновесном

процессе происходит убыль части производства энтропии по сравнению с производством энтропии в линейной термодинамике необратимых процессов. Ю. Л. Климонтович [62] считал, что эта убыль энтропии соответствует сохранению некоторой части информации о начальном воздействии на систему, а носителем этой информации является внутренняя структура системы. На завершающем этапе релаксации вблизи локального равновесия диссипативные процессы постепенно компенсируют эту убыль, пока энтропия, наконец, не достигнет максимума в равновесном состоянии. В этих условиях обобщенный критерий эволюции макроскопических систем совпадает с критерием Пригожина и Глансдорфа [63], а для слабонеравновесного стационарного состояния получается теорема Пригожина о минимальном производстве энтропии. При этом локальное производство энтропии всегда неотрицательно $\sigma(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, t) \geq 0$.

Вдали от локального равновесия, как показано, нельзя утверждать, что 2-е начало термодинамики можно распространить не только на локальное производство энтропии, но и на интегральное производство энтропии во всей системе до тех пор, пока все процессы в ней не завершатся $S(+\infty) - S(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int d\mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}, t) \geq 0$. Это означает, что на разных стадиях неравновесного процесса в некоторых частях системы уровень ее энтропии может колебаться.

Однако разработанное Зубаревым обобщенное описание неравновесных процессов оставалось незамкнутым, поскольку релаксационные ядра в нелокальных уравнениях переноса с памятью представляли собой неизвестные нелинейные функционалы макроскопических градиентов. Это обстоятельство стало препятствием для использования нелокальных моделей в практических задачах на несколько десятилетий. Попытки строить эмпирические модели интегральных ядер приводили к очень грубым моделям и не позволяли удовлетворить естественным граничным условиям, наложенным на систему. Хотя нелокальные уравнения переноса, полученные Зубаревым, являются единственными принципиально новыми универсальными математическими моделями, полученными в науке за последние 200 лет, дальнейшего развития они не получили до сих пор.

Поэтому было необходимо на основе обобщенных нелокальных уравнений Зубарева разработать новый междисциплинарный подход к описанию неравновесных процессов за пределами концепции механики сплошной среды, который органично включал бы все эффекты, сопровождающие неравновесный перенос.

Однако тот факт, что динамика пространственно-временных корреляций в обобщенных уравнениях определяет макроскопическое поведение системы вдали от равновесия, указывает на возможность их использования для математического моделирования самоорганизации динамических, и в том числе турбулентных структур. Эти структуры должны вносить в систему дополнительную информацию об эволюции системы вдали от равновесия. Эта идея была использована в новом подходе, разработанном на кафедре физической механики [64–69].

На основе нелокальных и запаздывающих уравнений переноса, полученных методами неравновесной статистической механики, автором работы предложена *самосогласованная нелокальная теория неравновесных процессов переноса*, которая является принципиально новым, универсальным и экономичным способом описания комплекса процессов переноса в открытых системах [65, 69]. В рамках разработанного подхода введены теоретически обоснованные принципы структурирования неопределенности, связанной с видом корреляционных функций в нелокальных термодинамических соотношениях.

2.3. Моделирование неравновесной функции пространственных корреляций. Разработанный подход позволяет перейти от неизвестных интегральных ядер переноса к неравновесным корреляционным функциям, связывающим термодинамические потоки и градиенты макроскопических полей, и использовать динамику пространственно-временных корреляций как основу самоорганизации турбулентных структур на промежуточных мезомасштабах [69, 70].

В отличие от статистико-механического описания, включающего два масштабных уровня, — микро- и макроскопический, новая теория через корреляционные функции $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t', \mathbf{s}) = Sp\mathbf{R}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ (сферическая часть тензорного интегрального ядра) подключает мезоскопический масштаб, на котором и происходит эволюция системы вдали от термодинамического равновесия:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int d\mathbf{r}' K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t', \mathbf{s}) \mathbf{X}(\mathbf{r}', t') \xrightarrow{\mathbf{s} \rightarrow 0} k\mathbf{X}(\mathbf{r}, t). \quad (25)$$

Здесь \mathbf{s} — вектор, характеризующий масштабы пространственных корреляций, а также характерное время их существования. В предельном случае при $\mathbf{s} \rightarrow 0$, когда пространственно-временные корреляции затухают, определяющие термодинамические соотношения переходят в локальные соотношения линейной термодинамики (25).

В работах [69–71] было показано, что даже без знания явного вида неравновесных корреляционных функций можно построить модели нелокальных термодинамических соотношений между силами и потоками, которые позволяют замкнуть нелокальное описание неравновесных процессов. Эти модели включают первые моменты неизвестных корреляционных функций $K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t', \mathbf{s})$ в качестве параметров \mathbf{s} , которые связывают их с пространственно-временными масштабами динамической структуры среды, реализующей перенос массы, импульса и энергии.

Момент функции пространственных корреляций $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ 0-го порядка $k_0(\mathbf{r}) = \int_V \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$ обобщает коэффициенты переноса на неравновесные условия, момент 1-го порядка $\mathbf{k}_1(\mathbf{r}) = \int_V \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{r}' = \beta(\mathbf{r})$ задает вектор, поляризующий среду за счет больших градиентов скорости, а второй момент $\int_V \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')(\mathbf{r}' - \mathbf{r})^2 d\mathbf{r}' = \varepsilon^2(\mathbf{r}) - 2\mathbf{r} \cdot \beta(\mathbf{r})$ определяет дисперсию распределения пространственных корреляций ε^2 .

Согласно физическому смыслу первых моментов пространственного распределения корреляций, в процессе сглаживания градиентов макроскопических полей в системе будут формироваться динамические структуры в виде кластеров с практически одинаковыми значениями макроскопических плотностей. Кластеры конечного размера движутся как почти твердые частицы, которые могут взаимодействовать и вращаться. Частица среды с характерным радиусом движется почти как твердое тело, центр инерции которого сдвинут на вектор $\beta(\mathbf{r})$. В неоднородном поле скоростей на нее со стороны других таких квазичастиц действует сила, заставляющая ее вращаться $\mathbf{S} = \varepsilon \times \mathbf{F}$. За счет сдвига возникает орбитальный момент вращения $\mathbf{M} = (\beta + \varepsilon) \times \mathbf{F}$, который искривляет траекторию движения такой мезочастицы.

Асимметричное распределение пространственных корреляций конечного размера на конечных интервалах времени можно трактовать как турбулентные структуры, порожденные взаимодействием высокоскоростного движения среды с границами, вблизи которых градиенты велики, сопровождающееся неравновесным обменом импульсом, моментом количества движения и энергией между ними. Важно отметить, что турбулентность порождается конечными размерами пространствен-

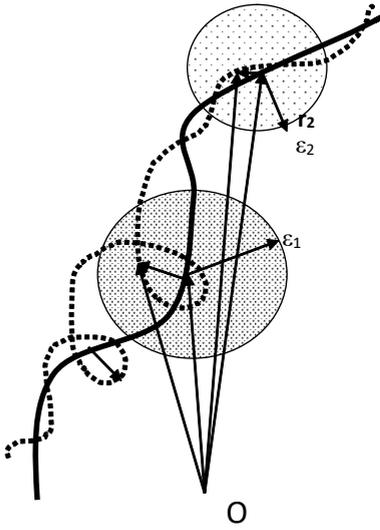


Рис. 1. Наглядная интерпретация физического смысла параметров нелокальной модели неравновесной функции пространственных корреляций.

ных корреляций, которые в свою очередь возникают при высокоскоростном переносе импульса.

Выявление взаимосвязей между пространственно-временными корреляциями и динамической структурой системы на промежуточном уровне между макро и микро было большим шагом в область сильнонеравновесных процессов.

Построенная математическая модель пространственных корреляций для квазистационарных процессов переноса содержит зависимость от параметров, которые представляют собой три первых статистических момента неравновесной корреляционной функции, обеспечивая переход к механике сплошной среды с уменьшением макроскопических градиентов

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \varepsilon) = \frac{k(\mathbf{r})}{\varepsilon} \Omega \left\{ -\frac{(|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \beta(\mathbf{r})|^2)}{\varepsilon} \right\} \xrightarrow{\varepsilon, \beta \rightarrow 0} k\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (26)$$

Физический смысл формирования турбулентного движения за счет пространственных корреляций конечного размера можно понять из рис. 1.

Жидкая частица в рамках классической гидродинамики движется по траектории, отвечающей ламинарному режиму течения и обозначенной на рисунке сплошной кривой. Возникающие при высоких скоростях за счет пространственных корреляций кластеры радиуса ε со смещенным центром вращаются и закручивают траекторию движения, вызывая переход к турбулентному режиму.

Параметры модели k , β , ε , если считать их постоянными для некоторой области среды, должны определяться дополнительной информацией в наложенных на систему извне ограничениях, которые поддерживают данное состояние системы. Если этой информации достаточно для их определения, то эти ограничения можно записать в виде некоторых нелинейных функциональных соотношений относительно этих параметров:

$$\Phi_i[\mathbf{P}(\mathbf{r}), \mathbf{X}(\mathbf{r}), k, \varepsilon, \beta]_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots m. \quad (27)$$

Здесь Φ_i — нелинейные относительно параметров модели функционалы, полученные из граничных условий для нелокальных уравнений переноса; m — число этих

условий. Совместное решение нелокальных уравнений переноса и функциональных соотношений для параметров полностью решает задачу самоорганизации в системе и определяет спектр размеров турбулентных структур при заданном внешнем воздействии на систему.

Как при решении обратных задач в квантовой механике, для ограниченной пространственной области спектр размеров структуры должен быть дискретный, а вдали от границ, где справедлива механика сплошной среды, должен переходить в непрерывный.

2.4. Термодинамическая эволюция вдали от локального равновесия.

Однако вдали от локального равновесия информации в наложенных на систему ограничениях всегда недостаточно для поддержания стационарного состояния системы. Согласно результатам Зубарева [61], самое полное макроскопическое описание системы включает всю информацию об истории системы. Поскольку, согласно гипотезе Боголюбова [72], со временем система эту информацию забывает, то в общем случае описание неравновесного состояния всегда неполно. Эксперименты показывают, что сильнонеравновесные состояния живут лишь конечное время, после чего теряют устойчивость и начинают эволюционировать.

Временная эволюция системы, к которой приводит взаимодействие структурных элементов среды на мезоуровне, описывается кибернетическими методами, разработанными в рамках теории управления адаптивными системами с обратной связью [73–75]. Принцип скоростного градиента (СГ) Фрадкова [75] определяет наискорейший путь к более устойчивому состоянию при наложенных на систему ограничениях и играет роль двигателя эволюции системы в механизме внутреннего управления. Модель системы, включающая замкнутый контур управления между эволюцией структуры на мезоуровне и макроскопическим поведением системы, позволяет прогнозировать ее динамические свойства, прослеживая траектории эволюции системы во время неравновесного процесса.

Для описания временной эволюции формирующихся структур необходимо определить цель эволюции в соответствии с принципом максимальной энтропии (МЭП) Джейнса [76]. Но в отличие от МЭП мы выбираем в качестве цели временной эволюции $Q(t)$ максимизацию полного производства энтропии в системе

$$\Delta S(t) = \int_0^t dt \int_V dr \sum_i \mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{X}_i(\mathbf{r}, t) \quad (28)$$

при наличии наложенных на систему ограничений следующим образом:

$$Q(t) = \Delta S(t) + \sum_m \lambda_m \Phi_m [\mathbf{r} = \Gamma_m t; k, \beta(t), \varepsilon(t)], \quad (29)$$

где $\mathbf{X}_i(\mathbf{r}, t)$ — термодинамические силы, а $\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t)$ — сопряженные им потоки; λ_m — множители Лагранжа; m — число граничных условий. В неравновесной статистической термодинамике [61] Зубарев показал, что полное производство энтропии, сильно флуктуирующее на конечных промежутках времени, должно иметь неотрицательное значение, когда все процессы будут завершены.

Физический смысл обобщенного производства полной энтропии (28) — это работа, совершаемая системой над внешними телами или наоборот. Согласно основному закону термодинамики взаимное превращение работы и внутренней энергии системы E друг в друга происходит необратимо, с некоторой потерей $TdS =$

$dE + \sum_k A_k da_k$. Это означает, что работа идет как на обратимое преобразование энергии, так и на ее диссипацию $\sum_k A_k da_k = TdS - dE$, и невозможно определить, какой из процессов, вызванных внешним воздействием, будет необратимым вдали от равновесия, пока он полностью не завершится. Поэтому вдали от равновесия невозможно заранее разделять тензор напряжений на обратимое давление и вязкую девиаторную часть или упругие и пластические компоненты.

Для описания пути к выбранной цели эволюции выбран алгоритм скоростного градиента (СГ) [74–75], разработанный А. Л. Фрадковым в теории управления адаптивными системами с обратной связью. В качестве параметров управления $\mathbf{s}(t)$ берутся параметры структуры k, β, ε , которые для квазистационарных процессов могут зависеть от времени. Для достижения цели в кратчайшие сроки и снижения необратимых потерь энергии параметры управления эволюционируют согласно алгоритму скоростного градиента, который для квазистационарной эволюции совпадает с алгоритмом градиентного спуска по поверхности скорости производства энтропии

$$\frac{d\mathbf{s}(t)}{dt} = -\mathbf{g} \nabla_{\mathbf{s}} \Omega(t, \mathbf{s}(t)), \quad \Omega(t, \mathbf{s}(t)) = \frac{d}{dt} Q(t, \mathbf{s}(t)). \quad (30)$$

Согласно алгоритму СГ (вектор \mathbf{g} определяет скорость эволюции структурных параметров), траекторией эволюции является градиентный спуск по гиперповерхности интегрального производства энтропии системы, построенной над фазовым пространством управляющих параметров $\mathbf{s}(t)$ при наложенных ограничениях. Такая графическая интерпретация метода скоростного градиента [77, 78] в соответствии с общим принципом эволюции Пригожина — Гландорфа [63] позволяет прогнозировать будущие состояния системы с учетом сохраненной в ограничениях информации, прослеживая траектории эволюции динамических структур в неравновесных процессах.

В процессе эволюции системы между реакцией макроскопической системы на внешнюю нагрузку и динамическими структурными преобразованиями на промежуточном, мезоскопическом уровне, формируются информационно-управляющие обратные связи, что делает поведение системы вдали от локального равновесия более устойчивым. Закрытый контур внутреннего управления между эволюцией структуры и режимом нагружения, включенный в математическую модель, приводит к самосогласованности между изменением интегрального производства энтропии и трансформацией динамической структуры системы. Таким образом, понятно, что саморегуляция, по-видимому, присуща не только живым системам, но и в той или иной степени всем процессам вдали от равновесия.

В результате получаем замкнутую постановку задачи о процессах переноса в широком диапазоне условий вдали от локального равновесия. В отличие от традиционных «жестких» моделей механики сплошных сред, где тип математической модели задается заранее, нелокальные модели являются «мягкими» [79], способными менять свой тип в зависимости от внешних условий и приспосабливаться к изменяющимся механизмам взаимодействия на мезоуровне. Итак, включение процессов самоорганизации и внутреннего управления через обратные связи необходимо для адекватного моделирования неравновесных процессов.

3. Моделирование процессов в твердом теле. Проводимые на кафедре теоретические исследования процессов в жидкости и газе сопровождалось разработкой новых методов экспериментальных исследований. Применение специальных кера-

мических и пленочных датчиков для регистрации быстрых процессов потребовало изучения явлений, сопровождающих воздействие коротких импульсов на твердое тело. Так возникло новое направление исследований — экспериментальное и теоретическое изучение высокоскоростных процессов в твердом теле. Одними из первых в СССР на кафедре физической механики и в лаборатории физической кинетики были проведены экспериментальные и теоретические исследования сильнонеравновесных процессов при импульсном нагружении твердых тел с длительностями в интервале 10–100 нс. Для этого были созданы экспериментальные установки на основе сильноточного электронного ускорителя, импульсного лазера и электрического взрыва проводников.

Подробный обзор работ по математическому моделированию процессов в твердых телах, выполненных на кафедре физической механики В. А. Морозовым и его учениками, дан в [80], поэтому ограничимся только кратким изложением результатов этих исследований.

Наиболее важными являются следующие направления математического моделирования высокоскоростного нагружения материалов: моделирование ударно нагружаемых сред с использованием динамики дислокаций; моделирование высокоскоростного нагружения сред с учетом релаксационных явлений в приповерхностной области; моделирование распространения короткого упругопластического импульса в среде в условии воздействия слабого магнитного поля; построение математических моделей деформирования и разрушения тонких металлических колец магнитно-импульсным методом.

В работах [81–84] рассмотрен подход, основанный на использовании динамических свойств дислокаций в записи определяющего уравнения. Закрытая система уравнений, используемая для описания упругопластических волн в случае одноосного нагружения (вдоль оси x), имеет вид

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \rho c^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -F, \end{aligned} \tag{31}$$

где u — скорость смещения частиц материала; ε — полная деформация в направлении распространения волны; σ — напряжение; ρ — плотность материала; c — скорость звука (адиабатическая); t — время; F — функция релаксации, вид которой определяет зависимость скорости пластической деформации материала от плотности подвижных дислокаций и их скорости.

В частности, в работе [81] получено аналитическое решение системы (31) для функции релаксации F поликристаллического материала. На его основе показано, что напряжение на пластическом фронте волны, начиная от координаты $x = c_p t$, экспоненциально спадает от величины σ_0 , равной начальному напряжению, прикладываемому на границе $x = 0$ в момент $t = 0$, до некоторого постоянного значения σ_m , определяемого параметрами материала, а также определена начальная плотность дислокаций N_0 . Координата начала спада пластического фронта перемещается в положительном направлении оси x со скоростью c_p . Также в [81] приведено численное решение системы уравнений (31) при различных значениях входящих в уравнения параметров дислокационной структуры с использованием метода конеч-

ных разностей и с введением искусственной вязкости по Нейману и Рихтмайеру. Введение искусственной вязкости вызвано необходимостью сглаживания решений [83, 84].

Аномальный характер зависимостей скорости распространения волны и величины продольного и поперечного напряжений от расстояния вблизи поверхности ударного нагружения [85] позволил сделать вывод о высокой динамической жесткости материала вблизи ударяемой поверхности. Следствием ангармонизма колебаний решетки за счет большой скорости ввода энергии является нелинейный отклик среды на воздействующую нагрузку. В работах [86, 87] система одномерных уравнений движения твердотельной релаксирующей среды вдоль оси x с уравнением состояния, полученным по методу Мандельштама — Леонтовича [88], сводится в линейном приближении к одному интегро-дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{m}{2c_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\tau_p}\right) \frac{dv}{d\tau'} d\tau', \quad (32)$$

где v — массовая скорость; c_0 — продольная скорость звука; m — параметр релаксации; $\tau = t - x/c_0$; τ_p — время релаксации. В общем случае под интегралом могут стоять функции более сложного вида. Решение уравнения (32) осуществлялось численно методом сеток.

В случае, когда время релаксации много меньше длительности воздействующего импульса, задача сводится к решению хорошо известного уравнения Кортевега — де-Вриза — Бюргерса. При отсутствии диссипации его решение описывает процесс распада начального возмущения произвольной формы на ряд слабо взаимодействующих между собой одиночных импульсов — солитонов. Наличие очень сильной диссипации приводит к сглаживанию процесса распада, и солитоны могут не образоваться. Именно этот случай реализуется для волн в релаксирующей среде. Получающееся в этом случае решение описывает одиночный импульс несимметричной колоколообразной формы, который чаще всего реализуется на практике при воздействии лазерного или электронного пучкового излучения.

Если время релаксации много больше длительности воздействующего импульса, задача сводится к решению дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Его решение для произвольного возмущения показывает, что для больших значений амплитуды массовой скорости нелинейные эффекты сначала преобладают над эффектами диссипации и формируется ударная волна. Разрыв сохраняется достаточно долго (до больших расстояний). При этом существует некоторая критическая величина амплитуды, ниже которой разрыв сформироваться не может ни при каких расстояниях.

В рамках обнаруженного в 1985 г. магнитоэластического эффекта установлено, что слабое магнитное поле создает условия для открепления дислокаций от локальных магниточувствительных дефектов. При этом, если продолжительность жизни пары, образованной дислокацией и точечным дефектом, короче времени спин-решеточной релаксации, возможно наблюдение магнитного резонанса. В связи с этим было проведено исследование поведения кристаллов при комбинированном воздействии коротких механических и магнитных импульсов с точки зрения влияния магнитного поля на параметры дислокационной структуры материалов и через них на распространение коротких механических импульсов. В [89] осуществлено численное моделирование (на основе системы уравнений (31)) движения среды под действием высокоскоростного нагружения в присутствии магнитного поля с целью выявления

для конкретного материала (кристаллов NaCl) и конкретных условий нагружения параметров дислокационной структуры, ответственных за изменение функции релаксации при воздействии магнитного поля. В результате численного расчета выяснилось, что из трех управляющих параметров только один является определяющим — дислокационная вязкость B . Именно он отражает зависимость напряжения в упругопластической волне от магнитного поля.

В работе [90] на основе механизма вязкого деформирования предложена математическая модель процесса нагружения металлического кольца. Из уравнения энергетического баланса выведено уравнение его движения. При этом было использовано определяющее уравнение Соколовского — Мальверна с функцией релаксации в правой части, записанное с использованием динамики дислокаций. Совместное решение уравнений движения кольца и уравнения Соколовского — Мальверна позволило определить временной профиль окружного напряжения. С помощью сформулированного в [91] структурно-временного подхода в [92] было промоделировано разрушение алюминиевых кольцевых образцов и получена аналитическая зависимость предельных напряжений от времени разрушения, которая находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

Более подробно остановимся на результатах, не отраженных в [80].

3.1. Ударно-индуцированные процессы в конденсированной среде.

Ударно-индуцированные волновые процессы в конденсированных средах являются наиболее неравновесными из тех, что относятся к области механики. Особенностью отклика твердого тела на ударное нагружение является очень сильное взаимодействие атомов друг с другом, что соответствует очень высокой степени пространственной корреляции и памяти об истории нагружения.

Согласно современным представлениям, в деформируемом твердом теле существует определенная иерархия масштабных уровней, при которой реализация того или иного кинематического механизма деформирования зависит от скорости деформации, граничных и начальных условий и нелинейных свойств материала [93]. В настоящее время убедительно показано, что именно процессы, протекающие на мезоуровне, ответственны за макроскопические, в том числе и прочностные свойства материалов [60].

В отличие от процессов квазистатического деформирования и разрушения, в условиях динамических нагружений важную роль играет не только исходная неоднородность материала, но также временные и пространственные корреляции между силовыми и деформационными полями, создаваемыми движущимися дефектными структурами. Вследствие изначальной, в том числе металлургической, неоднородности реального материала, а также из-за нелинейности самих процессов динамического деформирования и разрушения, протекание этих процессов осуществляется в условиях существенной скоростной неоднородности элементов структуры [60]. Кинетика мезоструктуры в реальном масштабе времени определяет большинство процессов локализации (или делокализации) высокоскоростного деформирования и разрушения.

Эксперименты по ударному нагружению твердых материалов [60] показали, что при высокоскоростном нагружении реакция среды определяется не только начальной структурой среды, но также динамическими мезоструктурами, которые образуются в процессе переноса импульса за счет резонансных эффектов. Изменение внутренней структуры среды влияет на процесс распространения ударных импульсов в

ней за счет перехода импульса с макроскопического на более глубокие масштабные уровни. Возникают многомасштабные обменные процессы, в ходе которых образуются как обратимые динамические пульсации скорости внутри фронта волны, так и новые необратимые структуры за фронтом волны.

При высоких скоростях деформации в переходном режиме между пределом упругости и пластической областью, когда неравновесные процессы переноса массы, импульса и энергии сопровождаются процессами самоорганизации на мезоскопических масштабах, модели механики сплошной среды непригодны. Характеристики среды в этих моделях, такие как модули упругости, коэффициенты переноса, начинают зависеть от скорости деформации, граничных условий и геометрии системы, а в общем случае, согласно результатам Зубарева, становятся функционалами истории процесса нагружения системы [94]. Поэтому поведение среды с точки зрения механики сплошных сред кажется аномальным. В таких переходных режимах априорное разделение деформации и напряжения на упругие и пластические части некорректно, поскольку предел упругости начинает зависеть от скорости деформации [94].

Дифференциальные соотношения, которые связывают напряжение, деформацию и скорости их изменения в одной точке и в один момент времени не учитывают пространственные корреляции, связанные с процессами структурообразования, и последовательность стадий переходных процессов, эффекты памяти, которые для коротких воздействий являются определяющими.

Именно в неравновесном характере процессов переноса импульса и энергии, обусловленном коротковолновым и высокочастотным нагружением среды и заключается специфика динамических процессов, отличающая их от медленных квазистатических процессов, где работают традиционные модели сплошной среды.

Стало очевидным, что для разработки предсказательных математических моделей необходимо критически рассмотреть основные постулаты, используемые для интерпретации явлений ударного сжатия, и описать весь комплекс неравновесных процессов в динамически деформируемой среде. Для этой цели была сформулирована задача о распространении индуцированной ударом упругопластической волны в конденсированных средах.

3.2. Неравновесный перенос импульса в конденсированной среде. Рассмотрим волновой процесс переноса короткого импульса, индуцированный плоским ударом умеренной интенсивности и распространяющийся вдоль одной оси x . Для твердых материалов при умеренном нагружении отклонение состояния среды от невозмущенного мало, а величины, характеризующие это отклонение $v/C \ll 1$, $\rho_1/\rho_0 \ll 1$, (v — массовая скорость, C — скорость продольного звука в среде, ρ_1 — поправка к плотности, $\rho_0 = \text{const}$, $\rho = \rho_0 + \rho_1$), имеют одинаковый порядок малости. В линейном приближении по параметру $v/C \ll 1$ уравнения переноса массы и импульса сводятся к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \frac{1}{\rho_0} (C^2 \rho_1 - J). \quad (33)$$

Если продольная составляющая тензора напряжений $J = C^2 \rho_1$, то уравнение (33) сводится к волновому уравнению для массовой скорости v , которое описывает обратимый процесс сжатия и расширения в упругой волне без изменения свойств среды.

Экспериментально наблюдаемые волны, индуцированные ударом по металлической мишени в диапазоне скоростей от 100 до 600 м/с, меняют свою форму при

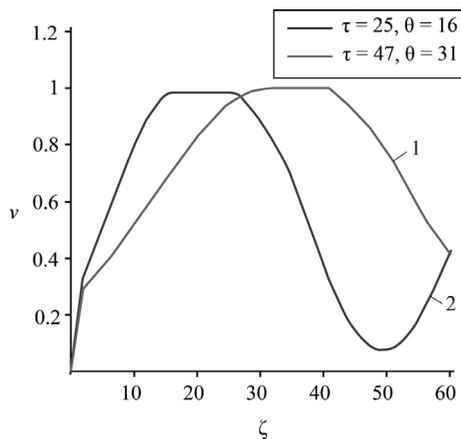


Рис. 2. Форма временного профиля массовой скорости в волне, индуцированной плоским ударом по твердому материалу, зарегистрированная на мишенях толщиной 3 мм (1) и 5 мм (2).

распространении по мишени вдоль направления удара [95] и переносят массу, что приводит к необратимой деформации металла. Это означает, что распространение короткого импульса в среде сопровождается неравновесными процессами, которые не описываются волновым уравнением, а возникшее напряжение сжатия не является упругим.

В работах [95–97] рассмотрен процесс распространения коротких импульсов умеренной интенсивности в конденсированной среде, возникший в результате плоского удара со скоростью $V_0 \ll C$. Экспериментально измеряемый на задней стороне мишени в реальном времени профиль массовой скорости внутри волнового импульса имеет сложную форму (рис. 2).

Задача о распространении индуцированной коротким ударом волновой формы в конденсированной среде решается в рамках нелокальной теории переноса [95]. Полученное явное приближенное решение задачи позволяет построить волновые формы, очень близкие к экспериментально измеряемым профилям, и дать им совершенно новую интерпретацию, принципиально отличную от традиционной.

В отличие от квазистатического медленного нагружения ударно индуцированная волновая форма образуется релаксационными процессами, которые протекают уже после окончания воздействия силы во время удара. Поэтому важнейшую роль в этом случае играет длительность передачи импульса от ударника к мишени t_R [96–97].

Процесс распространения волны характеризуется тремя относительными масштабными параметрами: $\tau = t_r/t_R$ — параметром релаксации напряжения; $\theta = t_m/t_R$ — параметром запаздывания; $\varepsilon = Ct_r/L$ — параметром длины релаксации.

Перейдем в систему координат, связанную с упругим предвестником, который движется с постоянной скоростью, равной скорости продольного звука C , вводя безразмерные переменные: $\zeta = (t - x/C)/t_R$, $\xi = x/L$. Соотношение между характерными масштабами задачи $\varepsilon/\tau = Ct_r/L$ определяет роли новых переменных. Если удар короткий и $\varepsilon/\tau \ll 1$, то масштабы волны и эволюции ее формы в процессе

распространения разделяются: $\tau\partial/\partial\zeta \gg \varepsilon\partial/\partial\xi$. Эволюция формы волны с расстоянием, пройденным вдоль оси x , считается медленной по сравнению с релаксацией внутри волнового импульса. Разделение характерных масштабов следует считать неотъемлемым признаком неравновесного процесса импульса и энергии, которые сопровождаются самоорганизацией новых структур в среде [63].

В новых переменных в первом приближении по малому параметру $V_0 \ll C$ (V_0 — скорость ударника) уравнения переноса массы и импульса принимают вид

$$\frac{\partial\rho_1/\rho_0}{\partial\zeta} - \frac{V_0}{C} \frac{\partial v}{\partial\zeta} + \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{V_0}{C} \frac{\partial v}{\partial\xi} = 0, \quad (34a)$$

$$\rho_0 V_0 \frac{\partial v}{\partial\zeta} - \frac{1}{C} \frac{\partial J}{\partial\zeta} + \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{\partial J}{\partial\xi} = 0. \quad (34б)$$

Из уравнения неразрывности в (34a) видно, что в первом порядке по малому параметру $v/C \ll 1$ и в нулевом приближении по параметру $\varepsilon/\tau \ll 1$ продольная деформация e определяется массовой скоростью среды $e = \rho_1/\rho_0 = (V_0/C)v$. Строго говоря, за пределами этих допущений само понятие деформации становится некорректным. В этом же приближении из уравнения переноса импульса (34б) получаем выражение для продольной компоненты напряжения как в упругом пределе $J = (\rho_0 C V_0)v$.

В рамках нелокальной теории переноса определяющее выражение для продольного напряжения является нелокальным по волновой переменной [95, 98]:

$$J = \rho_0 C V_0 \int_0^\omega d\zeta' K(\zeta, \zeta') \left[\frac{\partial v}{\partial\zeta'} - \frac{\varepsilon}{\tau} \frac{\partial v}{\partial\xi} \right], \quad \omega(\zeta) = \begin{cases} \zeta, & \zeta < 1, \\ 1, & \zeta \geq 1. \end{cases} \quad (35)$$

В этом выражении вместо неизвестного тензорного ядра переноса берется только его сферическая часть, представляющая собой неравновесную временную корреляционную функцию. Момент 0-го порядка скалярной корреляционной функции $k_0 = \int_V K(\zeta, \zeta') d\zeta' = 1$ в силу условия нормировки, момент 1-го порядка $k_1 = \int_V K(\zeta, \zeta') \cdot (\zeta - \zeta') d\zeta' = \theta$ определяет время задержки пластического фронта, а второй момент $\int_V K(\zeta, \zeta') (\zeta - \zeta')^2 d\zeta' = \tau^2 - 2\zeta\theta$ — время жизни турбулентной структуры движущейся среды τ . Физический смысл этих параметров определяет модельный вид корреляционной функции $K(\zeta, \zeta'; k, \tau, \theta)$, где δ -образная форма функции Λ соответствует условию перехода к механике сплошных сред

$$K(\zeta, \zeta'; \tau, \theta) = \Lambda \left\{ -\frac{\pi(\zeta - \zeta' - \theta)^2}{\tau^2} \right\} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \tau\delta(|\zeta' - \zeta|). \quad (36)$$

Уравнение переноса импульса в (34б) без учета членов порядка $\varepsilon/\tau \ll 1$ при интегрировании при нулевых начальных условиях и с модельным интегральным ядром принимает вид

$$v = \int_0^\omega d\zeta' \exp \left\{ -\frac{\pi(\zeta - \zeta' - \theta)^2}{\tau^2} \right\} \frac{\partial v}{\partial\zeta'}. \quad (37)$$

Производная массовой скорости под знаком интеграла в (37), характеризующая волновой профиль на некотором расстоянии ξ_0 , пройденном волной, преобразуется интегральным оператором в новый профиль скорости уже на другом расстоянии $\xi_1 > \xi_0$. Тогда получается, что параметры τ , θ зависят от расстояния ξ , а скорость

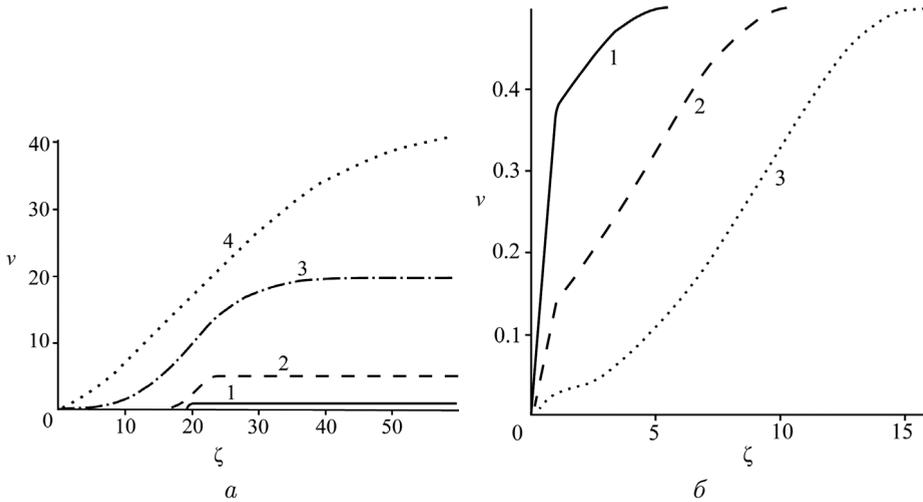


Рис. 3. Профили массовой скорости в волне сжатия для значений параметров: $a - \theta = 20, \tau = 1(1), 3(2), 5(3), 10(4)$; $b - \tau = 15, \theta = 1(1), 3(2), 15(3)$.

деформации среды и индуцированное напряжение связаны в различных пространственных точках и запаздывают друг относительно друга, эволюционируя вместе с волновой формой. На рис. 2 видно, что при распространении волновые формы расплываются. В упругом пределе при $\tau \rightarrow \infty, \zeta < 1$ уравнение (37) обращается в тождество.

Явное приближенное решение уравнения (37) получается в первой итерации при подстановке под интеграл начального профиля скорости $v(\zeta; \tau_0, \theta_0)$ с постоянным ускорением на переднем фронте заданной длительности $\partial v / \partial \zeta = 1$ [95, 98, 99]:

$$v(\zeta; \tau, \theta) = \frac{\tau}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{\sqrt{\pi}(\zeta - \theta)}{\tau} + \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\pi}\theta}{\tau} \right) \begin{matrix} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \zeta = \zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} = v(\zeta), \\ \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \tau \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \end{matrix} \quad \zeta < 1. \quad (38)$$

Последствие определяется по формуле, согласно которой в упругом пределе скорость и напряжение не затухают, а в гидродинамическом пределе после прекращения действия силы скорость и напряжение исчезают:

$$v(\zeta; \tau, \theta) = C \frac{\tau \dot{\epsilon}}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{\sqrt{\pi}(\zeta - \theta)}{\tau} + \operatorname{erf} \frac{\sqrt{\pi}(k - \zeta + \theta)}{\tau} \right) \begin{matrix} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 1, \\ \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0, \end{matrix} \quad \zeta > 1. \quad (39)$$

При небольших значениях параметров θ, τ волновые профили имеют вид, характерный для жидких сред, тогда как с ростом θ, τ начинает формироваться упругий предвестник, а за ним пластический фронт, что характерно для твердых тел (рис. 3).

Непосредственное сравнение теоретических и экспериментально регистрируемых волновых профилей при одинаковых значениях параметров θ, τ показало очень близкое их совпадение.

Корреляционная функция в уравнении (37) связывает вид профилей массовой скорости в волне на разных расстояниях от поверхности удара посредством зависимости параметров от пройденного волной расстояния $\tau(\xi), \theta(\xi)$ и, таким образом,

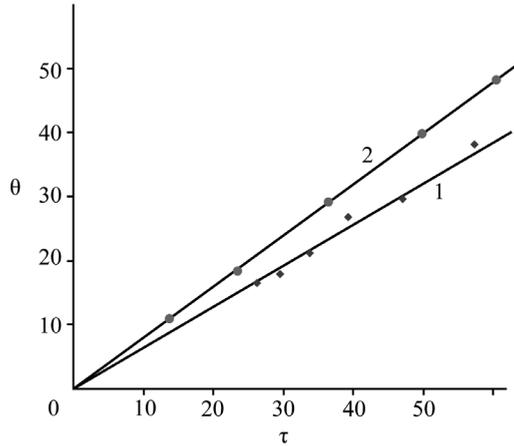


Рис. 4. Фазовые траектории эволюции фронта волны для стали (1) и алюминия (2).

описывает эволюцию профиля скорости и релаксацию напряжений при распространении волны по конденсированной среде.

Траектории эволюции волнового фронта квазистационарной волны на плоскости параметров τ, θ оказываются прямыми линиями, исходящими из начала координат под разными углами для материалов с разными упругими модулями (рис. 4). Все экспериментальные точки, полученные из регистрируемых профилей скорости, легли на эти прямые [95].

Полученное соответствие теоретических результатов и экспериментальных данных указывает на адекватность математической модели, построенной на основе нелокальной теории переноса. Полученный результат позволяет предложить принципиально новую трактовку процессов внутри волны, которые и формируют ее волновой профиль.

3.3. Производство энтропии внутри фронта волны. В классической термодинамике изменение энтропии обусловлено необратимыми потерями в процессе взаимного преобразования работы сил деформирования и внутренней энергии. В волновом процессе выделить необратимые потери механической энергии можно только после прохождения волны. Для модельного волнового импульса (26)–(27) интегральное производство энтропии внутри фронта можно определить из основного термодинамического тождества, где ни внутренняя энергия, ни напряжение не разделяются на обратимые и необратимые части [100–101]:

$$T\Delta S - \Delta E = \int_0^\lambda d\zeta J(\zeta) \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad J(\zeta) = \int_0^\omega d\zeta' \exp \left\{ -\frac{\pi(\zeta - \zeta' - \theta(\xi)^2)}{\tau^2(\xi)} \right\} \frac{\partial v}{\partial \zeta'}. \quad (40)$$

Для упругой волны ($\tau \rightarrow \infty$) выражение (40) обращается в нуль, что означает обратимость процесса распространения волны $T\Delta S = 0$ и, следовательно, отсутствие его влияния на свойства среды

$$-\Delta E = \int_0^\lambda d\zeta J(\zeta) \frac{\partial v}{\partial \zeta} \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\lambda d\zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} v = \frac{v^2(\lambda) - v^2(0)}{2} = 0. \quad (41)$$

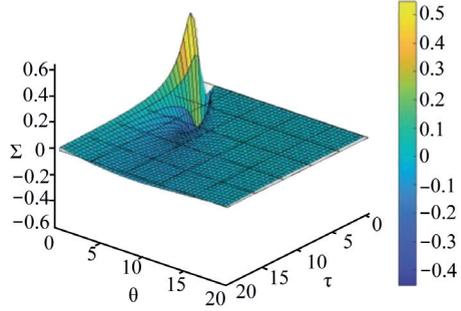


Рис. 5. Рельеф поверхности производства энтропии $Q(\tau, \theta)$ в ударно-индуцированной волновой форме.

В гидродинамическом пределе, когда эффектами памяти можно пренебречь ($\tau \rightarrow 0$), выражение (40) представляет собой интегральное производство энтропии при гидродинамическом течении среды, отвечающее законам линейной термодинамики необратимых процессов переноса (нет обратимого изменения энергии $\Delta E = 0$) и принятое в механике сплошной среды

$$T\Delta S = \int_0^\lambda d\zeta \frac{\partial v}{\partial \zeta} \int_0^\omega d\zeta' \exp \left\{ -\frac{\pi(\zeta - \zeta' - \theta(\xi))^2}{\tau^2(\xi)} \right\} \frac{\partial v}{\partial \zeta'} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \tau \int_0^\lambda d\zeta \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} \right)^2 \geq 0. \quad (42)$$

Выражение (42) учитывает только диссипативные потери механической энергии волны. Однако для динамических процессов обнаружены потери механической энергии, которые не связаны с диссипацией [57, 58, 101].

В отличие от квазистатики, в волновых процессах переноса с учетом запаздывания по фазе термодинамические силы и сопряженные им потоки могут быть разнонаправленными, что может приводить к отрицательному обобщенному производству энтропии за фронтом волны, что соответствует условию $T\Delta S < \Delta E$. Если совсем пренебречь диссипацией, то возникает потеря энергии, которую можно объяснить только ее затратами на формирование мезоскопических структур. Такая ситуация может реализоваться только в твердом материале после распространения импульса, малая длительность которого обусловлена быстрым приходом фронта разгрузки.

Производство энтропии в импульсе малой, но конечной длительности принимает вид

$$Q(\tau, \theta) = \int_0^1 d\zeta \int_0^\zeta d\zeta' \exp \left\{ -\frac{\pi(\zeta - \zeta' - \theta)^2}{\tau^2} \right\} - \int_{2l_s/C_s t_R}^{2l_s/C_s t_R + 1} d\zeta \times \left[\int_0^1 d\zeta' \exp \left\{ -\frac{\pi(\zeta - \zeta' - \theta)^2}{\tau^2} \right\} - \int_{2l_s/C_s t_R}^\zeta d\zeta' \exp \left\{ -\frac{\pi(\zeta - \zeta' - \theta)^2}{\tau^2} \right\} \right]. \quad (43)$$

Таким образом, при коротких импульсах нагрузки, когда есть перенос массы, а диссипация энергии еще не началась, возможны процессы самоорганизации новых динамических структур на промежуточных масштабах. Этот эффект можно продемонстрировать, проследив траектории эволюции волновой формы на поверхности производства в ней энтропии (рис. 5).

На поверхности производства энтропии видно, что холм с положительным производством энтропии в области очень малых размеров корреляций соответствует области механики сплошной среды. На плоской части поверхности упругие волны

распространяются без трансформации структуры. Энтропийная яма с отрицательными значениями энтропии возникает в результате наложения волны разгрузки на запаздывающую часть волны нагрузки. Если траектория эволюции волновой формы приводит в эту яму, процесс эволюции согласно принципу скоростного градиента прекращается. При этом уменьшение энтропии на фоне обратимого нулевого ее уровня должно соответствовать процессу самоорганизации структуры системы и возникновению новой информации, носителем которой она является.

Это можно интерпретировать следующим образом. Отрицательным обобщенное производство энтропии становится тогда, когда $T\Delta S < \Delta E$, и потенциальная энергия кристаллической решетки твердого материала в некотором месте мишени становится больше кинетической энергии движущейся мезочастицы. Тогда, как в квантовой механике [102], происходит захват мезочастицы потенциальной ямой решетки. При этом должен возникать дискретный энергетический спектр, число уровней которого растет с глубиной ямы. Мелкая яма может и не захватить мезочастицу. Максимальная глубина ямы достигается, когда приход разгрузки совпадает с запаздыванием волнового плато по отношению к предвестнику. Размеры и тип образующихся структур должны определяться глубиной и формой энтропийной ямы, образуемой волной разгрузки.

Поскольку мезочастица, несущая энергию, обладает массой, то при заданной плотности она обладает еще и объемом и размерами. Поэтому можно говорить о дискретном спектре размеров структуры среды, которая остается в материале после прохождения волны и может быть экспериментально обнаружена.

При встрече фронтов нагрузки и разгрузки мезочастицы могут сталкиваться, а их движение в волновой форме может стать турбулентным. Вращательные моды в мезоструктуре были обнаружены при микроструктурных исследованиях материала мишени при увеличении скорости удара и росте потери массовой скорости на плато импульса сжатия. В жидкости, где диссипативными эффектами пренебречь нельзя, переход к турбулентности тоже понижает производство энтропии, но не может сделать его отрицательным.

Наличие обратной связи между макро- и мезоэволюцией посредством целевой функции производства энтропии приводит ее поверхность в движение, искривляет траекторию спуска и изменяет конечное состояние среды. Поэтому скорость спуска должна играть очень важную роль в конечном результате. Можно показать, что дополнительные, даже слабые воздействия, на эволюцию структуры в волновой форме способны существенно влиять на конечные состояния системы. Управление таким процессом может привести к созданию структуры материала требуемого размера и типа (в том числе на наномасштабах) и таким образом послужить основой для разработки новых технологий получения материалов с заданными свойствами.

Описанные результаты позволяют сделать вывод что, такой междисциплинарный подход на стыке механики, физики и кибернетики [65, 103] может описать ударные и высокоскоростные процессы в открытых системах различной природы, включая живые и интеллектуальные системы.

Литература

1. Морозов В. А. Научные достижения кафедры физической механики за 50 лет (1967–2017). В: *Сильно неравновесные процессы в механике неоднородных сред: межвуз. сб. Серия Физическая механика* **9**, 3–47. Санкт-Петербург (2018).
2. Филиппов Б. В. Кинетическое уравнение адсорбционного монослоя. *ДАН СССР* **150** (2), 290–293 (1963).

3. Филиппов Б. В. Система приближенных интегральных кинетических уравнений плазмы. *Труды Международной научной конференции по новой технике (Москва — 1964)*, 57–62 (1964).
4. Филиппов Б. В., Сорокин И. Л., Манохин С. П. Исследование неравновесных процессов на поверхностях твердых тел с помощью молекулярного пучка на основе автоэлектронной микроскопии. В: *Физическая механика* **3**, 59–68. Ленинград (1978).
5. Филиппов Б. В. К теории адсорбционного слоя на поверхностях тел в разреженном газе. В: *Аэродинамика разреженных газов* **2**, 272–281. Ленинград (1965).
6. Манохин С. П., Сорокин И. Л., Филиппов Б. В. Взаимодействие свободно-молекулярного потока ионов калия с поверхностью вольфрама. В: *Физическая механика* **3**, 69–77. Ленинград (1978).
7. Филиппов Б. В., Антонов А. А., Манохин С. П. Особенности адсорбции высокоскоростных ионов калия на поверхности вольфрама. *Тезисы докладов XVII Всесоюзной конференции по эмиссионной электронике (Ленинград — 1978)*, Ленинград, 44 (1978).
8. Филиппов Б. В., Христинич В. Б. Кинетические уравнения динамики разреженного газа в дивергентной форме. В: *Динамические процессы в газах и твердых телах: межвуз. сб. Серия Физическая механика* **4**, 7–18. Ленинград (1980).
9. Филиппов Б. В., Цителов И. М. Взаимодействие молекулярного пучка с релаксирующим адсорбционным слоем. I. В: *Аэродинамика разреженных газов* **4**, 30–36. Ленинград (1969).
10. Цителов И. М. Взаимодействие молекулярного пучка с релаксирующим адсорбционным слоем. II. В: *Аэродинамика разреженных газов* **4**, 37–40. Ленинград (1969).
11. Мурзова Э. Н., Филиппов Б. В., Цителов И. М. Одна уточненная схема взаимодействия молекулярного пучка с чистой поверхностью. В: *Аэродинамика разреженных газов* **4**, 41–45. Ленинград (1969).
12. Филиппов Б. В. *Аэродинамика тел в верхних слоях атмосферы*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1973).
13. Де Бур Я. X. *Динамический характер адсорбции*, пер. с англ. Москва, Иностранная литература (1962).
14. Frenkel Ya. I. Theorie der adsorption und verwandter erscheinungen. *Zeit. Physik* **117**, 117–138 (1924).
15. Курбатова Г. И. Постановка и решение задач фильтрации и динамики сорбции газов в пористых средах. В: *Физическая механика* **1**, 20–31. Ленинград (1974).
16. Курбатова Г. И., Суворов В. И. Неустановившееся течение в многофазных средах при наличии фазовых переходов. В: *Проблемы динамических процессов в гетерогенных средах: Всесоюз. межвуз. сб. научн. тр.*, 132–140. Калинин (1987).
17. Курбатова Г. И., Филиппов Б. В. *Основы моделирования движущихся сплошных сред. Термодинамика*. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1997).
18. Филиппов Б. В., Курбатова Г. И., Никольская Н. А. Динамика высокотемпературного газа в мерзлой пористой среде. *Вестник Ленинградского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 57–62 (1993).
19. Курбатова Г. И., Филиппов Б. В. Диффузно-конвективные процессы в структурных вязких средах. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **2**, 62–66 (1996).
20. Филиппов Б. В., Курбатова Г. И., Таганцев Д. К. О постановке задач расчета полей концентрации, плотности, напряжений в щелочно-силикатном стекле при ионном обмене. *Физика и химия стекла* **22** (1), 60–69 (1996).
21. Филиппов Б. В. Неравновесные процессы в механике неоднородных сред. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **3**, 127–131 (1998).
22. Филиппов Б. В. Модели неравновесных процессов при горении и взрыве. В: *Химия горения и взрыва*, 23–29. Санкт-Петербург (2001).
23. Курбатова Г. И., Филиппов Б. В. Интегральный вариационный принцип в начально-краевых задачах для неравновесных течений механики сплошных сред. В: *Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского* **16**, 26–34. Казань (2002).
24. Скробач А. В., Филиппов Б. В. Турбулентное стационарное движение газа в трубопроводе круглого сечения. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **3**, 88–94 (1998).
25. Скробач А. В., Филиппов Б. В. Модель Праудтля — Никурадзе для неизотермического турбулентного движения неидеального газа в круглой трубе. В: *Модели механики сплошной среды. Межвуз. сб. Серия Физическая механика* **7**, 9–21. Санкт-Петербург (1998).

26. Скробач А. В., Филиппов Б. В., Шевцов В. Д. Турбулентное неизоэтермическое движение неидеального газа в трубопроводе с песчано-зернистой шероховатостью. В: *Модели механики сплошной среды: межвуз. сб. Серия Физическая механика* **7**, 35–49. Санкт-Петербург (1998).
27. Скробач А. В., Курбатова Г. И., Филиппов Б. В. Турбулентное неизоэтермическое движение газа в трубопроводе. *Труды конференции «Новожиловские чтения» (С.-Петербург — 1998)*, Санкт-Петербург, 225–230 (1998).
28. Скробач А. В., Курбатова Г. И., Филиппов Б. В., Шевцов В. Д., Неизвестнов Я. В. Программа по расчету развитого турбулентного неизоэтермического движения природного газа по подводным трубопроводам. *Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 980535 от 09.09.1998 г.*
29. Филиппов Б. В., Филиппов В. Б. Профиль скорости турбулентного течения сжимаемого газа в шероховатых трубах. В: *Нелинейные проблемы механики и физики* **4**, 73–84. Санкт-Петербург (2001).
30. Скробач А. В., Филиппов Б. В. Математическая модель турбулентного нестационарного неизоэтермического движения реального газа в трубопроводах круглого сечения. В: *Модели неоднородных сред: межвуз. сб. Серия Физическая механика* **8**, 18–44. Санкт-Петербург (2004).
31. Скробач А. В., Курбатова Г. И. Процедура решения задачи о развитом турбулентном нестационарном движении газа в трубопроводе. *Труды XV сессии международной школы по моделям механики сплошной среды (СПбГУ — 2001)*, 1–10 июля 2000 г., Санкт-Петербург, 90–105 (2001).
32. Скробач А. В., Филиппов Б. В. Задача о развитом турбулентном нестационарном неизоэтермическом движении газа в трубопроводе круглого сечения. Постановка и общая процедура решения. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 74–83 (2002).
33. Скробач А. В. Приближенная постановка задачи о развитом турбулентном нестационарном неизоэтермическом движении газа в трубопроводе круглого сечения. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **1**, 122–131 (2003).
34. Курбатова Г. И., Филиппов Б. В., Филиппов В. Б. Неизоэтермическое турбулентное течение сжимаемого газа. *Математическое моделирование* **15** (3), 92–108 (2003).
35. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. Приближенное решение уравнений переноса на основе интегрального вариационного принципа линейной термодинамики. В: *Динамические процессы в газах и твердых телах. Межвуз. сб. Серия Физическая механика* **5**, 3–16. Ленинград (1984).
36. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. О разделении вязких и нелинейных членов в одномерной интегральной системе уравнений переноса. *Вестник Ленинградского университета. Математика. Механика. Астрономия* **19**, 69–72 (1983).
37. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. Решение одной из задач теории волн конечной амплитуды на основе интегральной вариационной постановки. *Вопросы судостроения* **42**, 109–114 (1985).
38. Ватрушина Е. В., Макаров С. Н., Хамзина Б. С. Расчет неравновесных течений газа прямыми вариационными методами газа. В: *Проблемы динамики процессов в гетерогенных средах: Всесоюз. межвуз. сб. научн. тр.*, 101–107. Калинин (1987).
39. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. Акустика течений, содежащих большое число коротких волн конечной амплитуды. *Акустический журнал* **33** (4), 720–723 (1987).
40. Бенсон Ю. Е., Макаров С. Н. Влияние вязкости и нелинейности на плоскую стоячую волну. *Вестник Ленинградского университета. Математика. Механика. Астрономия* **3**, 39–42 (1989).
41. Макаров С. Н., Смирнов В. Е., Филиппов Б. В. Прямые вариационные методы расчета одномерных задач о взрыве. В: *Динамические процессы в газах и твердых телах. Межвуз. сб. Серия Физическая механика* **6**, 7–12. Ленинград (1990).
42. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. Об асимптотической структуре ударных волн в вязком теплопроводном газе. *Численные методы механики сплошной среды* **16** (6), 102–109 (1985).
43. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. Эволюция цилиндрических волн конечной амплитуды, расходящихся по нагретому газу. *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа* **4**, 150–153 (1985).
44. Макаров С. Н., Филиппов Б. В. К расчету волн конечной амплитуды в газодинамическом приближении. *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа* **2**, 184–187 (1986).
45. Макаров С. Н., Назаров А. Ю., Филиппов Б. В. Применение интегрального принципа к выводу нового эволюционного уравнения для неизэнтропических бегущих волн. *Моделирование в механике* **3** (3), 104–110 (1989).
46. Макаров С. Н. Определение средних параметров звука в задаче Ирншоу на стадии пилообразной волны. *ДАН СССР* **306** (6), 1325–1327 (1989).
47. Makarov S. N., Nazarov A. Yu. Parametric acoustic nondirectional radiator. *Acustica* **77**, 240–242 (1992).

48. Makarov S.N. Self-reflection in nonlinear acoustics. Theoretical ground and possible applications. *Acustica* **80**, 1–13 (1994).
49. Beissner K., Makarov S.N. Acoustic energy quantities and radiation force in higher order. *Journal of Acoustic Society of America* **97**, 898–905 (1995).
50. Хантулева Т. А. Нелокально-гидродинамическое описание неравновесных процессов переноса в неоднородных средах. *Численные методы механики сплошной среды* **2** (3), 153–162 (1980).
51. Филиппов Б. В., Хантулева Т. А. *Граничные задачи нелокальной гидродинамики*. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1984).
52. Хантулева Т. А. Нелокальный подход в задачах гидродинамики сред с внутренней структурой. В: *Молекулярная газодинамика и механика неоднородных сред*, 157–162. Москва (1990).
53. Khantuleva T. A. Nonlocal hydrodynamical models of gas flows in the transition regime. In: *Rarefied Gas Dynamics*. Vol. 1, 229–236. New York; London (1982).
54. Хантулева Т. А. Нелокальная модель пограничного слоя при конечных числах Кнудсена. В: *Динамические процессы в газах и твердых телах: межвуз. сб. Серия Физическая механика* **4**, 19–31. Ленинград (1980).
55. Хантулева Т. А. Многофазные струйные течения. Нелокально гидродинамический подход. *Моделирование в механике* **1** (18), вып. 2, 146–163 (1987).
56. Родионов А. А., Хантулева Т. А. Нелокальная модель ламинарного течения суспензий. *Вестник Ленинградского университета. Серия 1. Математика, механика, астрономия* **13**, 100–106 (1980).
57. Ravichandran G., Rosakis A. J., Hodovany J., Rosakis P. On the Conversion of Plastic Work into Heat during High-Strain-Rate Deformation. Proceedings. *Proceedings of International conference «Shock Compression of Condensed Matter» (AIP-2001)*, 2001, Atlanta, 557–562 (2002).
58. Bever M. B., Holt D. L., Tichener A. L. The Storied Energy of Cold Work. *Progress in Materials Science* **17**, 1 (1973).
59. Lee J. The Universal Role of Turbulence in the propagation of Strong Shocks and Detonation Waves. In: *High Pressure Compression of solids VI: Old Paradigms and New Challenges*, 121–144, Springer (2003).
60. Meshcheryakov Yu. *Multiscale Mechanics of Shockwave Processes*. Singapore, Springer Nature (2021). <https://doi.org/10.1007/978-981-16-4530-3>
61. Зубарев Д. Н. *Неравновесная статистическая термодинамика*. Москва, Наука (1971).
62. Климонтович Ю. Л. Энтропия и информация в открытых системах. *УФН* **169** (4), 443–452 (1999).
63. Glansdorff P., Prigogine I. *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. Wiley Interscience (1972).
64. Хантулева Т. А. Самоорганизация мезоуровня при высокоскоростном деформировании конденсированных сред. *Химическая физика* **24** (11), 36–47 (2005).
65. Хантулева Т. А. *Нелокальная теория неравновесных процессов переноса*. Санкт-Петербург, Изд-во Изд-во С.-Петерб. ун-та (2013).
66. Khantuleva T. A. Thermodynamic evolution far from equilibrium. *AIP Conference Proceedings* **1959**, 100003-1–100003-4 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034750>
67. Хантулева Т. А. Нелокальная механика неравновесных процессов. В кн.: *Сильно неравновесные процессы в механике неоднородных сред: межвуз. сб. Серия Физическая механика*. Вып. 9, 70–87. Санкт-Петербург (2018).
68. Хантулева Т. А. Об описании неравновесных процессов переноса и формировании динамических структур в жидких средах. *Фундаментальная и прикладная гидрофизика* **13**, 1, 3–14 (2020). <https://doi.org/10.7868/S2073667320010013>
69. Khantuleva T. A. New Approach to Modeling Non-equilibrium Processes. In: *Mathematical Modeling of Shock-Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 137–173. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_5
70. Khantuleva T. A., Meshcheryakov Yu. I. Shock-Induced Mesoparticles and Turbulence Occurrence. *Particles* **5** (3), 407–425 (2022). <https://doi.org/10.3390/particles5030032>
71. Khantuleva T. A. High rate deformation of condensed matter followed by self organization on the mesoscale. *Intern. J. of Thermodynamics and Chemical Kinetics* **8** (2), 13–38 (2022). <https://doi.org/10.37628/IJТСК>
72. Боголюбов Н. Н. *Проблемы динамической теории в статистической физике*. Москва; Ленинград, Гостехиздат (1946).
73. Фрадков А. Л. *Адаптивное управление в сложных системах*. Москва, Наука (1990).
74. Фрадков А. Л. *Кибернетическая физика*. Санкт-Петербург, Наука (2003).

75. Fradkov A. L. Speed gradient entropy principle for non-stationary processes. *Entropy* **10**, 757–764 (2008).
76. Jaynes E. *The Maximum Entropy Formalism*. Cambridge, MIT (1979).
77. Khantuleva T. A., Shalymov D. S. Modelling non-equilibrium thermodynamic systems from the speed–gradient principle. *Philosophical Transactions of the Royal Society A. Theme issue. Horizons of cybernetical physics* **375**, iss. 2088, 2016220 (2017).
78. Khantuleva T. A. Description of the Structure Evolution Using Methods of Control Theory of Adaptive Systems. In: *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 175–208. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_6
79. Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» модели. Москва, МЦНМО (2004).
80. Морозов В. А., Богатко В. И., Яковлев А. Б. О математическом моделировании процессов высокоскоростного нагружения материалов на кафедре физической механики СПбГУ. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 4, 699–713 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.411>
81. Мещеряков Ю. И., Морозов В. А. Об использовании дислокационной модели для описания ударно-нагружаемых жесткопластических сред с упрочнением. *Журнал прикладной механики и технической физики* **3**, 121–129 (1978).
82. Белоцерковский О. М. *Численное моделирование в механике сплошных сред*. Москва, Наука (1984).
83. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. *Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент*. Москва, Наука (1982).
84. Мещеряков Ю. И., Морозов В. А. О структуре волн сжатия в упругопластических средах. В: *Физическая механика* **3**, 109–132. Ленинград (1978).
85. Судьенков Ю. В. Релаксация упругих постоянных алюминия вблизи поверхности ударного нагружения. *Письма в ЖТФ* **9** (23), 1418–1422 (1983).
86. Морозов В. А., Семенюк О. В. Решение интегро-дифференциальных уравнения для слабонеравновесной релаксирующей среды. *Тезисы докладов Международной научной конференции по механике «Третьи Поляховские чтения»*, 4–6 февраля 2003 г., Санкт-Петербург, 205–206 (2003).
87. Морозов В. А., Семенюк О. В. Моделирование движения слабонеравновесной релаксирующей среды при кратковременном импульсном нагружении. В: *Модели неоднородных сред: межвуз. сб. Серия Физическая механика* **8**, 183–195. Санкт-Петербург (2004).
88. Манделштам Л. И., Леонтович М. А. К теории поглощения звука в жидкостях. *Журнал экспериментальной и теоретической физики* **7** (3), 438–449 (1937).
89. Кац В. М., Морозов В. А. Моделирование распространения короткого упругопластического импульса в кристаллах NaCl в условиях воздействия слабого импульсного магнитного поля. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **1**, 115–121 (2011).
90. Зайченко О. К., Морозов В. А. Построение модели расчета напряжения при динамическом деформировании металлических колец магнитно-импульсным методом. *Актуальные проблемы прикладной математики и механики. Сб. тр. Междунар. науч. конф. (Воронеж — 2018)*, 17–19 декабря 2018 г., Воронеж, 1130–1135 (2019).
91. Petrov Yu. V. Incubation time criterion and the pulsed strength of continua: fracture, cavitation and electrical breakdown. *Doklady Physics* **49** (4), 246–249 (2004).
92. Морозов В. А., Петров Ю. В., Сухов В. Д. Экспериментальная оценка структурно-временных характеристик разрушения материала на основе магнитно-импульсного нагружения кольцевых образцов. *Журнал технической физики* **89** (5), 692–696 (2019).
93. Панин В. Е., Егорушкин В. Е., Панин А. В. Физическая мезомеханика деформируемого твердого тела как многоуровневой системы. I. Физические основы многоуровневого подхода. *Физическая мезомеханика* **9** (3), 9–22 (2006).
94. Морозов В. А. Особенности нагружения, деформирования и разрушения материалов в субмикросекундном и наносекундном диапазонах длительностей. *Доклады и лекции 14-й Международной школы по моделям механики сплошной среды*, 17–24 августа 1997 г., Жуковский, 105–117 (1997).
95. Мещеряков Ю. И., Хантулева Т. А. Неравновесные процессы в конденсированных средах. Ч. I. Экспериментальные исследования в свете нелокальной теории переноса. *Физическая мезомеханика* **17** (5), 21–37 (2014).
96. Хантулева Т. А. Распространение коротких импульсов в конденсированной среде на основе нелокальной гидродинамики. *Труды Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики»*, 21–24 сентября 2020 г., Санкт-Петербург, 40–45 (2020).

97. Khantuleva T. A., Kats V. M. Special features of short duration processes in condensed media. *J. Phys. Conf. Ser* **2056**, 012031 (2021).
98. Khantuleva T. A. The Shock Induced Planar Wave Propagation in Condensed Matter. In: *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 209–249. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_7
99. Khantuleva T. A. Abnormal Loss or Growth of the Wave Amplitude. In: *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 283–309. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_9
100. Khantuleva T. A. Thermodynamic Concepts Out of Equilibrium. In: *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 95–136. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_4
101. Khantuleva T. A. Evolution of Waveforms During Propagation in Solids. In: *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 251–281. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_8
102. Khantuleva T. A., Kats V. M. Quantum Effects on the Mesoscale. *Particles* **3**, 562–575 (2020).
103. Khantuleva T. A. *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*. Singapore, Springer (2022). <https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0>

Статья поступила в редакцию 21 октября 2023 г.;
доработана 16 февраля 2024 г.;
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

Контактная информация:

Морозов Виктор Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.morozov@spbu.ru
Хантулева Татьяна Александровна — д-р физ.-мат. наук, проф.; t.khantuleva@spbu.ru
Яковлев Андрей Борисович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.; a.b.yakovlev@spbu.ru

Mathematical modeling of nonequilibrium processes on chair of physical mechanics of St. Petersburg State University. Part 1. Modeling of processes in gas, fluid and solid

V. A. Morozov, T. A. Khantuleva, A. B. Yakovlev

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Morozov V. A., Khantuleva T. A., Yakovlev A. B. Mathematical modeling of nonequilibrium processes on chair of physical mechanics of St. Petersburg State University. Part 1. Modeling of processes in gas, fluid and solid. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 419–454. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.302> (In Russian)

The article gives the review of works of employees of chair and laboratory of physical mechanics of St. Petersburg State University from the moment of its establishment in 1986 and till 2023 inclusive, that are devoted to modeling of the non-equilibrium processes in gas, fluid and solid. The basic attention is given several major results: 1) creation of model of adsorption layer for the description of locomotion of flying vehicles in near space and an upper atmosphere; 2) a theoretical and experimental substantiation of the general approach to modeling high-speed and short-duration processes in various mediums; 3) application of the specified general approach to studying of shock-induced processes in solid. The detailed substantiation of necessity of the integro-differential form of the transport equations for nonequilibrium processes is given. That is shown that time's evolution of system, to which interaction of structural elements of medium on the mesoscale leads, is described by the cybernetic methods developed by A. L. Fradkov within the limits of the Control Theory of adaptive systems with feedback. Other results are given short enough.

Keywords: modeling, non-equilibrium process, adsorption layer, transport equations, mesoscale.

References

1. Morozov V. A. Scientific achievements of chair of physical mechanics for 50 years (1967–2017). In: *Strongly non-equilibrium processes in mechanics of inhomogeneous media: Interuniversity collection of scientific papers. Series Physical mechanics* **9**, 3–47. St Petersburg (2018). (In Russian)
2. Filippov B. V. Kinetic equation of an adsorption monolayer. *DAN USSR* **150** (A202), 290–293 (1963). (In Russian)
3. Filippov B. V. System of approximate integral kinetic equations of plasma. *Proceedings of the International Scientific Conference on New Technology (Moscow — 1964)*, Moscow, 57–62 (1964). (In Russian)
4. Filippov B. V., Sorokin I. L., Manokhin S. P. Study of non-equilibrium processes on solid surfaces using a molecular beam based on field electron microscopy. In: *Physical mechanics* **3**, 59–68. Leningrad (1978). (In Russian)
5. Filippov B. V. On adsorption layer's theory on solid surfaces in rarefied gas. In: *Aerodynamics of rarefied gases* **2**, 272–281. Leningrad (1965). (In Russian)
6. Manokhin S. P., Sorokin I. L., Filippov B. V. Interaction of free-molecular flow of potassium ions with tungsten surface. *Physical mechanics* **3**, 69–77. Leningrad (1978). (In Russian)
7. Filippov B. V., Antonov A. A., Manokhin S. P. Features of adsorption of high-speed potassium ions on the surface of tungsten. In: *XVII All-Union Conference on Emission Electronics Abstracts of Reports (Leningrad — 1978)*, 44. Leningrad (1978). (In Russian)
8. Filippov B. V., Khristinich V. B. Kinetic equations of rarefied gas dynamics in divergent form. In: *Dynamic processes in gases and solids: interuniversity collection of scientific papers. Series Physical mechanics* **4**, 7–18. Leningrad (1980). (In Russian)
9. Filippov B. V., Tsitelov I. M. Interaction of a molecular beam with a relaxing adsorption layer I. In: *Aerodynamics of rarefied gases* **4**, 30–36. Leningrad (1969). (In Russian)
10. Tsitelov I. M. Interaction of a molecular beam with a relaxing adsorption layer II. In: *Aerodynamics of rarefied gases* **4**, 37–40. Leningrad (1969). (In Russian)
11. Murzova E. N., Filippov B. V., Tsitelov I. M. One refined scheme of interaction of a molecular beam with a clean surface. In: *Aerodynamics of rarefied gases* **4**, 41–45. Leningrad (1969). (In Russian)
12. Filippov B. V. *Aerodynamics of bodies in the upper layers of the atmosphere*. Leningrad, Leningrad University Press (1973). (In Russian)
13. De Boer J. H. von. *The dynamical character of adsorption*. Oxford, Clarendon Press (1953) [Rus. ed.: De Boer J. H. *Динамический характер адсорбции*. Moscow, Innostranaia literatura Publ. (1962)].
14. Frenkel Ya. I. Theorie der adsorption und verwandter erscheinungen. *Zeit. Physic* **117**, 117–138 (1924).
15. Kurbatova G. I. Statement and solution of problems of filtration and dynamics of gas sorption in porous media. In: *Physical mechanics* **1**, 20–31. Leningrad (1974). (In Russian)
16. Kurbatova G. I., Suvorov V. I. Unsteady flow in multiphase media in the presence of phase transitions. In: *Problems of dynamic processes in heterogeneous environments: All-Union interuniversity collection of scientific papers*, 132–140. Kalinin (1987). (In Russian)
17. Kurbatova G. I., Filippov B. V. *Fundamentals of modeling moving continuous media. Thermodynamics*. St Petersburg, St Petersburg University Press (1997). (In Russian)
18. Filippov B. V., Kurbatova G. I., Nikolskaya N. A. Dynamics of high-temperature gas in a frozen porous medium. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 57–62 (1993). (In Russian)
19. Kurbatova G. I., Filippov B. V. Diffuse-convective processes in structural viscous media. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2**, 62–66 (1996). (In Russian)
20. Filippov B. V., Kurbatova G. I., Tagantsev D. K. On the formulation of problems for calculating fields of concentration, density, stress in alkali-silicate glasses during ion exchange. *Physics and chemistry of glass* **22** (1), 60–69 (1996). (In Russian)
21. Filippov B. V. Nonequilibrium processes in the mechanics of inhomogeneous media. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3**, 127–131 (1998). (In Russian)
22. Filippov B. V. Models of nonequilibrium processes during combustion and explosion. In: *Chemistry of combustion and explosion*, 23–29. St Petersburg (2001). (In Russian)
23. Kurbatova G. I., Filippov B. V. Integral variational principle in initial-boundary value problems for nonequilibrium flows of continuum mechanics. In: *Proceedings of the Mathematical Center named after. N. I. Lobachevsky*. Vol. **16**, 26–34. Kazan (2002). (In Russian)
24. Skrobach A. V., Filippov B. V. Turbulent stationary gas movement in a circular pipeline. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3**, 88–94 (1998). (In Russian)

25. Skrobach A. V., Filippov B. V. Prandtl—Nikuradze model for non-isothermal turbulent motion of non-ideal gas in a round pipe. In: *Models of continuum mechanics: Interuniversity collection of scientific papers. Series Physical mechanics* **7**, 9–21. St Petersburg (1998). (In Russian)
26. Skrobach A. V., Filippov B. V., Shevtsov V. D. Turbulent non-isothermal movement of non-ideal gas in a pipeline with sand-grained roughness. In: *Models of continuum mechanics: interuniversity collection of scientific papers. Series Physical mechanics* **7**, 35–49. St Petersburg (1998). (In Russian)
27. Skrobach A. V., Kurbatova G. I., Filippov B. V. Turbulent non-isothermal gas movement in a pipeline. *Proceedings of conference “Novozhilov Readings” (St Petersburg — 1998)*, St Petersburg, 225–230 (1998). (In Russian)
28. Skrobach A. V., Kurbatova G. I., Filippov B. V., Shevtsov V. D., Neizvestnov Ya. V. Program for calculating the developed turbulent non-isothermal movement of natural gas through underwater pipelines. *Certificate of official registration of the computer program*, no. 980535 dated 09.09.1998. (In Russian)
29. Filippov B. V., Filippov V. B. Velocity profile of turbulent flow of compressible gas in rough pipes. In: *Nonlinear problems of mechanics and physics* **4**, 73–84. St Petersburg (2001). (In Russian)
30. Skrobach A. V., Filippov B. V. Mathematical model of turbulent non-stationary non-isothermal movement of real gas in circular pipelines. In: *Models of inhomogeneous media: interuniversity collection of scientific papers. Series Physical mechanics* **8**, 18–44. St Petersburg (2004). (In Russian)
31. Skrobach A. V., Kurbatova G. I. Procedure for solving the problem of developed turbulent unsteady gas movement in a pipeline. *Proceedings of the XV session of the international school on models of continuum mechanics (St Petersburg — 2001)*, St Petersburg, 90–105 (2001). (In Russian)
32. Skrobach A. V., Filippov B. V. The problem of developed turbulent non-stationary non-isothermal gas movement in a pipeline of circular cross-section. Statement and general solution procedure. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 74–83 (2002). (In Russian)
33. Skrobach A. V. Approximate formulation of the problem of developed turbulent non-stationary non-isothermal gas movement in a circular pipeline. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1**, 122–131 (2003). (In Russian)
34. Kurbatova G. I., Filippov B. V., Filippov V. B. Non-isothermal turbulent flow of compressible gas. *Mathematical modeling* **15** (3), 92–108 (2003). (In Russian)
35. Makarov S. N., Filippov B. V. Approximate solution of transport equations based on the integral variational principle of linear thermodynamics. In: *Dynamic processes in gases and solids: interuniversity collection of scientific papers. Series Physical mechanics* **5**, 3–16. Leningrad (1984). (In Russian)
36. Makarov S. N., Filippov B. V. On the separation of viscous and nonlinear terms in a one-dimensional integral system of transport equations. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **19**, 69–72 (1983). (In Russian)
37. Makarov S. N., Filippov B. V. Solution of one of the problems in the theory of waves of finite amplitude based on the integral variational formulation. *Issues of shipbuilding* **42**, 109–114 (1985). (In Russian)
38. Vatrushina E. V., Makarov S. N., Khamzina B. S. Calculation of nonequilibrium gas flows using direct gas variation methods. In: *Problems of dynamics of processes in heterogeneous media: All-Union interuniversity collection of scientific papers*, 101–107. Kalinin (1987). (In Russian)
39. Makarov S. N., Filippov B. V. Acoustics of flows containing a large number of short waves of finite amplitude. *Acoustic magazine* **33** (4), 720–723 (1987). (In Russian)
40. Benson Yu. E., Makarov S. N. The influence of viscosity and nonlinearity on a plane standing wave. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3**, 39–42 (1989). (In Russian)
41. Makarov S. N., Smirnov V. E., Filippov B. V. Direct variational methods for calculating one-dimensional explosion problems. In: *Dynamic processes in gases and solids: Interuniversity collection of scientific papers. Series Physical mechanics* **6**, 7–12. Leningrad (1990). (In Russian)
42. Makarov S. N., Filippov B. V. On the asymptotic structure of shock waves in a viscous heat-conducting gas. *Numerical methods of continuum mechanics* **16** (6), 102–109 (1985). (In Russian)
43. Makarov S. N., Filippov B. V. Evolution of cylindrical waves of finite amplitude diverging through a heated gas. *News of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas* **4**, 150–153 (1985). (In Russian)
44. Makarov S. N., Filippov B. V. To the calculation of waves of finite amplitude in the gas-dynamic approximation. *News of the USSR Academy of Sciences. Mechanics of liquid and gas* **2**, 184–187 (1986). (In Russian)

45. Makarov S.N., Nazarov A.Yu., Filippov B.V. Application of the integral principle to the derivation of a new evolutionary equation for non-isentropic traveling waves. *Modeling in mechanics* **3** (3), 104–110 (1989). (In Russian)
46. Makarov S.N. Determination of average sound parameters in the Earnshaw problem at the sawtooth wave stage. *Doklady Akademii nauk USSR* **306** (6), 1325–1327 (1989). (In Russian)
47. Makarov S.N., Nazarov A.Yu. Parametric acoustic nondirectional radiator. *Acustica* **77**, 240–242 (1992).
48. Makarov S.N. Self-reflection in nonlinear acoustics. Theoretical ground and possible applications. *Acustica* **80**, 1–13 (1994).
49. Beissner K., Makarov S.N. Acoustic energy quantities and radiation force in higher order. *Journal of Acoustic Society of America* **97**, 898–905 (1995).
50. Khantuleva T. A. Nonlocal-hydrodynamic description of non-equilibrium transport processes in heterogeneous media. *Numerical methods of continuum mechanics. Novosibirsk* **2** (3), 153–162 (1980). (In Russian)
51. Filippov B. V., Khantuleva T. A. *Boundary problems of nonlocal hydrodynamics*. Leningrad, Leningrad University Press (1982). (In Russian)
52. Khantuleva T. A. Nonlocal approach to problems of hydrodynamics of media with internal structure. In: *Molecular gas dynamics and mechanics of heterogeneous media*, 157–162. Moscow (1990). (In Russian)
53. Khantuleva T. A. Nonlocal hydrodynamical models of gas flows in the transition regime. In: *Rarefied Gas Dynamics* **1**, 229–236. New York; London (1982).
54. Khantuleva T. A. Nonlocal model of the boundary layer at finite Knudsen numbers. Dynamic processes in gases and solids. In: *Dynamic processes in gases and solids: Interuniversity collection of scientific papers. Series Physical mechanics* **4**, 19–31. Leningrad (1980). (In Russian)
55. Khantuleva T. A. Multiphase jet flows. Nonlocal-hydrodynamic approach. *Modeling in mechanics. Novosibirsk* **1** (18), iss. 2, 146–163 (1987). (In Russian)
56. Rodionov A. A., Khantuleva T. A. Nonlocal model of laminar suspension flow. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **13**, 100–106 (1980). (In Russian)
57. Ravichandran G., Rosakis A. J., Hodovany J., Rosakis P. On the Conversion of Plastic Work into Heat during High-Strain-Rate Deformation. *Proceedings of International conference "Shock Compression of Condensed Matter" (AIP – 2001)*, 2001, Atlanta, USA, 557–562 (2002).
58. Bever M. B., Holt D. L., Tichener A. L. The Storied Energy of Cold Work. *Progress in Materials Science* **17**, 1 (1973).
59. Lee J. The Universal Role of Turbulence in the propagation of Strong Shocks and Detonation Waves. In: *High Pressure Compression of solids VI: Old Paradigms and New Challenges*, 121–144, Springer (2003).
60. Meshcheryakov Yu. *Multiscale Mechanics of Shockwave Processes*. Singapore, Springer Nature (2021). <https://doi.org/10.1007/978-981-16-4530-3>
61. Zubarev D. N. *Non-equilibrium statistical thermodynamics*. Berlin, Springer (1974) [Rus. ed.: Zubarev D. N. Neravnovesnaia statisticheskaiia termodinamika. Moscow, Nauka Publ. (1971)].
62. Klimontovich Yu. L. Entropy and information of open systems. *Uspekhi fizicheskikh nauk* **169** (4), 443–452 (1999). <https://doi.org/10.1070/PU1999v042n04ABEH000568> (In Russian)
63. Glandsdorff P., Prigogine I. *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. Wiley Interscience (1972).
64. Khantuleva T. A. Self-organization at the mesolevel at high-rate deformation of condensed media. *Khimicheskaiia fizika* **24** (11), 36–47 (2005). (In Russian)
65. Khantuleva T. A. *Nonlocal theory of non-equilibrium transport processes*. St Petersburg, St Petersburg University Press (2013). (In Russian)
66. Khantuleva T. A. Thermodynamic evolution far from equilibrium. *AIP Conference Proceedings* **1959**, 100003-1–100003-4 (2018). <https://doi.org/10.1063/1.5034750>
67. Khantuleva T. A. Nonlocal mechanics of non-equilibrium processes. In: *Highly non-equilibrium processes in mechanics of inhomogeneous media: interuniversity collection of scientific papers. Series Physical mechanics* **9**, 70–87. St Petersburg (2018). (In Russian)
68. Khantuleva T. A. On the description of non-equilibrium transport processes and formation of dynamic structures in liquid media. *Fundamental'naia i prikladnaia gidrofizika* **13** (1), 3–14 (2020). (In Russian)
69. Khantuleva T. A. New Approach to Modeling Non-equilibrium Processes. In: *Mathematical Modeling of Shock-Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 137–173. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_5

70. Khantuleva T. A., Meshcheryakov Yu. I. Shock-Induced Mesoparticles and Turbulence Occurrence. *Particles* **5** (3), 407–425 (2022). <https://doi.org/10.3390/particles5030032>
71. Khantuleva T. A. High rate deformation of condensed matter followed by self organization on the mesoscale. *Intern. J. of Thermodynamics and Chemical Kinetics* **8** (2), 13–38 (2022). <https://doi.org/10.37628/IJTCK>
72. Bogoliubov N. N. *Problems of dynamic theory in statistical physics*. Moscow; Leningrad, Gostechizdat Publ. (1946). (In Russian)
73. Fradkov A. L. *Adaptive control in complex systems*. Moscow, Nauka Publ. (1990). (In Russian)
74. Fradkov A. L. *Cybernetic physics*. St Petersburg, Nauka Publ. (2003). (In Russian)
75. Fradkov A. L. Speed gradient entropy principle for non-stationary processes. *Entropy* **10**, 757–764 (2008).
76. Jaynes E. *The Maximum Entropy Formalism*. Cambridge, MIT (1979).
77. Khantuleva T. A., Shalymov D. S. Modelling non-equilibrium thermodynamic systems from the speed–gradient principle. *Philosophical Transactions of the Royal Society A. Theme issue. Horizons of cybernetical physics* **375**, iss. 2088, 2016220 (2017).
78. Khantuleva T. A. Description of the Structure Evolution Using Methods of Control Theory of Adaptive Systems. In: *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 175–208. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_6
79. Arnold V. I. *Hard and soft mathematical models*. Moscow, MTsNMO Publ. (2004). (In Russian)
80. Morozov V. A., Bogatko V. I., Yakovlev A. B. On the Mathematical Modeling of Loading High-Speed Material at the Department of Physical Mechanics, St Petersburg State University. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 4, 699–713 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.411> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **53**, iss. 4, 450–458 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1063454120040081>].
81. Meshcheryakov Yu. I., Morozov V. A. Use of a dislocation model for description of shock-loaded rigidly plastic media with hardening. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **3**, 121–129 (1978). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **19**, 380–386 (1978). <https://doi.org/10.1007/BF00850825>].
82. Belotserkovskii O. M. *Numerical Simulation in Continuum Mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ. (1994). (In Russian)
83. Belotserkovskii O. M., Davydov Yu. M. *Large Particles Method in Gas Dynamics. Computational Experiment*. Moscow, Nauka Publ. (1982). (In Russian)
84. Meshcheryakov Yu. I., Morozov V. A. On the structure of the pressure waves in visco-plastic media. In: *Physical mechanics* **3**, 168–180. Leningrad (1978). (In Russian)
85. Sud'enkov Yu. V. Relaxation of elastic constants of aluminum near a surface of shock loading. *Pis'ma v zhurnal tekhnicheskoi fiziki* **9** (23), 1418–1422 (1983). (In Russian)
86. Morozov V. A., Semenyuk O. V. Solution to an integro-differential equation for a slightly nonequilibrium relaxing medium. *Proc. Int. Sci. Conf. on Mechanics — 3rd Polyakhov's Reading (SPbGU — 2004)*, 4–6 February, 2003, St Petersburg, 205–206 (2003). (In Russian)
87. Morozov V. A., Semenyuk O. V. Simulation of a motion of faint non-equilibrium relaxing media at short-term pulse loading. In: *Models of Inhomogeneous Media: interuniversity collection of scientific papers. Series Physical mechanics* **8**, 183–195. St Petersburg (2004). (In Russian)
88. Mandel'shtam L. I., Leontovich M. A. To the theory of sound absorption in fluids. *Zhurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* **7**, 438–449 (1937). (In Russian)
89. Kats V. M., Morozov V. A. Modeling of short elastoplastic pulses propagating in NaCl crystals under a weak pulsed magnetic field. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1**, 115–121 (2011). (In Russian)
90. Zaychenko O. K., Morozov V. A. Construction of a model for calculation of strain at dynamic deforming of metal rings by a magnetic-pulse method. In: *Actual Problems of Applied Mathematics and Mechanics: proceedings of the International Scientific Conference (Voronezh — 2018)*, 17–19 December, 2018, Voronezh, 1130–1135 (2019). (In Russian)
91. Petrov Yu. V. Incubation time criterion and the pulsed strength of continua: Fracture, cavitation and electrical breakdown. *Doklady Physics* **49** (4), 246–249 (2004).
92. Morozov V. A., Petrov Y. V., Sukhov V. D. Experimental evaluation of structural and temporal characteristics of material fracture based on magnetic pulse loading of ring samples. *Tech. Phys.* **89** (5), 692–696 (2019). (In Russian) [Eng. transl.: *Tech. Phys.* **64**, 642–646 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1063784219050165>].
93. Panin V. E., Egorushkin V. E., Panin A. V. Physical mesomechanics of a deformed solid as a multilevel system. 1. Physical fundamentals of the multilevel approach. *Phys. Mesomech.* **9** (3), 9–22. (2006). (In Russian)

94. Morozov V. A. Features of loading, deformation and fracture of materials in the sub-microsecond and nanosecond ranges of durations. In: *Proceedings of 14th international school on continuum mechanics models (Phys Tech Inst — 1997)*, Dolgoprudny, 105–117 (1997). (In Russian)
95. Meshcheryakov Y. I., Khantuleva T. A. Nonequilibrium processes in condensed media. Part 1. Experimental studies in light of nonlocal transport theory. *Phys. Mesomech.* **17** (5), 21–37 (2014). (In Russian) [Eng. transl.: *Phys. Mesomech.* **18** (3), 228–243 (2015)].
96. Khantuleva T. A. The short impulses propagation in condensed matter on the basis of not local hydrodynamics. *Proceedings of the All-Russia conference “Applied technologies of hydroacoustics and hydrophysics”*, 21–24 September, 2020, St Petersburg, 40–45 (2020). (In Russian)
97. Khantuleva T. A., Kats V. M. Special features of short duration processes in condensed media. *J. Phys. Conf. Ser* **2056**, 012031 (2021).
98. Khantuleva T. A. The Shock Induced Planar Wave Propagation in Condensed Matter. In: *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 209–249. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_7
99. Khantuleva T. A. Abnormal Loss or Growth of the Wave Amplitude. In: *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 283–309. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_9
100. Khantuleva T. A. Thermodynamic Concepts Out of Equilibrium. In: *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 95–136. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_4
101. Khantuleva T. A. Evolution of Waveforms During Propagation in Solids. In: *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*, 251–281. Singapore, Springer (2022). https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0_8
102. Khantuleva T. A., Kats V. M. Quantum Effects on the Mesoscale. *Particles* **3**, 562–575 (2020).
103. Khantuleva T. A. *Mathematical Modeling of Shock Wave Processes in Condensed Matter. Shock Wave and High Pressure Phenomena*. Singapore, Springer (2022). <https://doi.org/10.1007/978-981-19-2404-0>

Received: October 21, 2023
 Revised: February 16, 2024
 Accepted: February 22, 2024

Authors' information:

Viktor A. Morozov — v.morozov@spbu.ru
 Tat'iana A. Khantuleva — t.khantuleva@spbu.ru
 Andrey B. Yakovlev — a.b.yakovlev@spbu.ru