Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3
УДК 517.925.51:517.93:531.36
MSC 93C10, 34H15

Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 3*

А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Тихонов А. А.* Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 3 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 455–476. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.303

Работа является продолжением обзора, посвященного 300-летию Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ) и представляющего собой попытку анализа научных достижений санкт-петербургской школы механики в области динамики твердого тела. Основное внимание в статье уделяется прикладным исследованиям, выполненным учеными СПбГУ в 1970-е годы и посвященным неуправляемому движению твердого тела относительно центра масс в гравитационном и магнитном полях Земли. Значительное место среди этих исследований занимает решение задач, относящихся к пассивной гравитационной стабилизации ИСЗ с использованием магнитного взаимодействия для создания восстанавливающих и демпфирующих моментов.

Ключевые слова: твердое тело, космический аппарат, искусственный спутник Земли (ИСЗ), динамика, вращательное движение, гравитационная стабилизация, погашение колебаний.

1. Введение. В первой части обзора [1] были представлены некоторые результаты научных исследований, выполненных учеными СПбГУ в области динамики твердого дела в первые 250 лет истории университета. Рассмотрены не только качественные и количественные результаты анализа движения тел, но и методы исследования, позволившие получить эти результаты.

Вторая часть обзора [2] посвящена сравнительно короткому, но чрезвычайно богатому на научные результаты 50-летнему периоду истории СПбГУ, завершившемуся в 2023 г. Если во второй части обзора основное внимание уделено работам, содержащим развитие методов исследования динамики твердого тела, то в нынешней — третьей части обзора — наоборот — работам, содержащим прикладные исследования неуправляемого движения твердого тела относительно центра масс в гравитационном и магнитном полях Земли. Значительное место среди этих исследований занимает решение задач, относящихся к пассивной гравитационной стабилизации искусственного спутника Земли (ИСЗ). Эти задачи, возникшие с началом космиче-

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00104.

Вторую часть статьи см.: *Тихонов А. А.* Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 2 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 259–302. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.203

ской эры, получили различные варианты развития в последующие годы, особенно в 1970-е, когда разрабатывались практические вопросы реализации гравитационных штанг для создания восстанавливающих моментов и магнитных успокоителей для создания демпфирующих моментов.

Естественно, разрабатывались и другие вопросы динамики твердого тела. В целом в начале 1970-х годов динамика твердого тела стала надежной теоретической базой и основой для моделирования широкого круга прикладных задач, среди которых особой актуальностью отличались разнообразные задачи космодинамики в связи с запросами практики освоения космического пространства. К решению этих задач были привлечены многие известные ученые СПбГУ, а также представители научных школ, сформировавшихся под их руководством, развившихся и со временем распространившихся, в том числе и за пределами СПбГУ.

Одну из самых сильных научных школ, причем не только в СПбГУ, но и в мире, создал В. И. Зубов. Среди его учеников свыше ста кандидатов и двадцать докторов наук. Основные направления исследований Зубова, его учеников и сотрудников — теория устойчивости движения и процессы управления. В то же время им получен ряд фундаментальных результатов в области динамики твердого тела, относящихся как к неуправляемому движению [1], так и к управляемому [2]. Обзор некоторых результатов В. И. Зубова, а также его учеников и последователей, в области динамики управляемого движения твердого тела содержится также в работе [3].

При этом прикладная сторона исследований, выполненных В. И. Зубовым, является не менее важной, чем теоретическая. Например, рассмотренные в [2] методы управления ориентацией твердого тела, разработанные Зубовым, были эффективно применены для решения следующих практических задач космодинамики: 1) проектирование систем точного управления ориентацией космических аппаратов системы «Протон»; 2) проектирование систем управления вращательным движением космических аппаратов для точной ориентации чувствительных осей приборов на базе магнитогидродинамических систем управления с применением проводящей жидкости в контурах обратной связи.

С образованием по инициативе В. И. Зубова нового факультета (ПМ–ПУ) и кафедр в его структуре, космодинамика как научное направление не перестала существовать на математико-механическом факультете СПбГУ. Оно развивалось на кафедре теоретической и прикладной механики сначала под руководством проф. Н. Н. Поляхова, а с 1978 г. — под руководством проф. П. Е. Товстика (1935–2020). Сотрудники кафедры, а также сотрудники лаборатории прикладной механики НИИ математики и механики СПбГУ продолжали развивать научные исследования по актуальным проблемам космодинамики в рамках госбюджетных и хоздоговорных работ совместно с профильными научно-исследовательскими институтами и конструкторскими бюро. Ведущую роль в выполнении этих научных работ сыграл канд. физ.-мат. наук, доцент Л. И. Кузнецов (1924–1993).

В результате активной научной работы ученых двух вышеупомянутых факультетов динамика космических аппаратов стала хорошо развитым научным направлением в СПбГУ, а увеличение числа публикаций по темам, связанным с этим научным направлением, приобрело взрывной характер. Стали появляться новые научные издания, соответствующие профильной тематике. Так, в 1974 г. по постановлению редакционно-издательского совета СПбГУ был опубликован первый выпуск сборника статей под названием «Прикладная механика». Редколлегия сборника располагалась на математико-механическом факультете СПбГУ. Ответственным редактором сборника стал проф. Н. Н. Поляхов. Характерно, что из двадцати статей, опубликованных в первом выпуске сборника, семь статей относятся к космическим приложениям динамики твердого тела.

Рассмотрим кратко наиболее характерные из публикаций 1970-х годов, отличающихся прикладной направленностью и отражающих разнообразие исследований.

2. ИСЗ с «быстрым» вращением. В работе [4] решается задача прогнозирования вращательного движения динамически несимметричного быстро вращающегося ИСЗ. Механическая модель задачи строится на базе рассмотренных в [2] уравнений Белецкого — Черноусько [5]:

$$\dot{L} = M_3, \qquad \dot{\rho} = M_1/L, \qquad \dot{\sigma} = M_2/(L\sin\rho), \tag{1}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = L\cos\vartheta\left(\dfrac{1}{C} - \dfrac{\sin^2\varphi}{A} - \dfrac{\cos^2\varphi}{B}\right) + \dfrac{M_1\cos\psi + M_2\sin\psi}{L\sin\vartheta}, \\ \dot{\psi} = L\left(\dfrac{\sin^2\varphi}{A} + \dfrac{\cos^2\varphi}{B}\right) - \dfrac{M_1\cos\psi + M_2\sin\psi}{L}\operatorname{ctg}\vartheta - \dfrac{M_2}{L}\operatorname{ctg}\rho, \\ \dot{\vartheta} = L\left(\dfrac{1}{A} - \dfrac{1}{B}\right)\sin\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \dfrac{M_2\cos\psi - M_1\sin\psi}{L}. \end{cases} \tag{2}$$

При этом требуется найти достаточно близкое к реальному выражение главного момента возмущающих сил, а затем проинтегрировать систему (1), (2) на достаточно большом интервале времени с достаточной точностью. В качестве возмущающих авторы учитывают гравитационный момент, аэродинамический момент, момент от нескомпенсированного кинетического момента, а также моменты, обусловленные взаимодействием ИСЗ с геомагнитным полем посредством магнитотвердого и магнитомягкого железа и вихревых токов. Проанализированы два подхода к прогнозированию вращательного движения ИСЗ: на коротком промежутке времени по уравнениям (1), (2) и на большом промежутке времени по уравнениям, полученным путем усреднения (1), (2) по «быстрым» переменным φ и ψ. Изложены соответствующие алгоритмы и описаны результаты численного интегрирования.

Близкая по сути задача рассмотрена в статье [6]. В ней предполагается, что ИСЗ снабжен устройством, способным обеспечить закрутку ИСЗ вокруг главной центральной оси инерции Cz. Ставится вопрос об определении углового положения и угловой скорости ИСЗ в конце интервала времени, в течение которого активным образом изменяется угловая скорость ИСЗ под действием момента $\vec{M}_p$. Поскольку кинетическая энергия вращательного движения ИСЗ намного больше работы внешних моментов, то вращательное движение ИСЗ не будет существенно отличаться от невозмущенного движения, в котором вектор кинетического момента $\vec{L}$ постоянен. В этих условиях вводится в рассмотрение принимаемая за неподвижную система координат L_1, L_2, L_3 так, что ось L_3 направлена вдоль вектора $\vec{L}$. Положение главных центральных осей инерции $Cxyz$ относительно осей L_1, L_2, L_3 определяется с помощью углов Эйлера ψ, θ, φ по формулам

$$I_x\omega_x = L\sin\theta\sin\varphi, \quad I_y\omega_y = L\sin\theta\cos\varphi, \quad I_z\omega_z = L\cos\theta.$$

Если путем интегрирования динамических уравнений Эйлера найти значения $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ в конце активного участка изменения угловой скорости ИСЗ, то значения углов на тот же момент времени t_k будут получены из соотношений

$$\psi = \psi_0 + L\int\limits_{t_0}^{t_k} \frac{I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2}{I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2}\,dt, \quad \cos\theta = \frac{I_z\omega_z}{L}, \quad \sin\varphi = \frac{I_x\omega_x}{\sqrt{I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2}}.$$

Анализ динамических уравнений Эйлера позволил установить, что распределение масс ИСЗ, при котором $I_y \geqslant I_z$, делает конструкцию ИСЗ непригодной для эксплуатации в заданном режиме. Рабочим вариантом может быть только случай $I_y < I_z$. Исследование этого случая проведено численно.

3. Определение ориентации ИСЗ по показаниям приборов. Для построения законов управления вращательным движением ИСЗ, обеспечивающих решение задачи сканирования по заданной программе, необходимо сначала выявить искомые элементы движения ИСЗ. Поэтому в трудах ученых СПбГУ также решались задачи определения ориентации ИСЗ и локализации движений по показаниям приборов. В работах [7–15] предложены новые подходы к определению ориентации ИСЗ по двум известным физическим векторам (например, направление на Землю или Солнце, вектор магнитной индукции геомагнитного поля и др.).

В работе [10], посвященной спектральной наблюдаемости углового положения ориентированного ИСЗ по вектору напряженности геомагнитного поля, рассмотрена задача определения углового положения ориентированного ИСЗ на круговой орбите в виде тригонометрических полиномов по кратным аргумента широты на основании измерения вектора напряженности геомагнитного поля. Показано, что ранее полученные автором по методу приравнивания членов с одинаковыми гармониками соотношения для начального приближения не могут быть дополнены использованием точных наблюдений вектора напряженности магнитного поля Земли в отдельных опорных точках.

В работе [12] в связи с задачей наблюдаемости углового положения ИСЗ анализируется спектральное представление магнитного поля типичной планеты, совершающей равномерное вращение вокруг своей оси. Получено развернутое спектральное представление для проекций напряженности магнитного поля планеты на оси, жестко связанное с ИСЗ.

В серии статей [16–18] рассматривается ИСЗ, находящийся на круговой орбите. Для определения углового положения ИСЗ используется магнитометр. Изучается вопрос о выборе нулевого приближения углового положения ИСЗ при различных аппроксимациях геомагнитного поля. ИСЗ функционирует в режиме ориентированного движения. Это позволяет аппроксимировать «самолетные» углы ориентации ИСЗ тригонометрическими полиномами с неизвестными постоянными коэффициентами D_{pq} по дугам, кратным аргументу широты. Исходя из того, что в случае низких орбит ИСЗ спектральное представление возмущающих моментов не содержит членов более 2-й кратности [19], в работе [16] предложен метод выбора нулевого приближения для определения углового положения ИСЗ в виде упомянутых тригонометрических полиномов, содержащих члены 2-й кратности включительно. Показано, что при дипольной аппроксимации геомагнитного поля можно построить алгоритм выбора нулевого приближения углов ориентации при наличии дополнительной информации о значениях углов ориентации в некоторых точках орбиты ИСЗ или о направлении какого-либо второго вектора также в некоторых точках орбиты ИСЗ.

Для ИСЗ на высоких орбитах весьма существенное значение приобретает возмущающий момент сил светового давления. Спектральное представление этого момента имеет сравнительно большие члены 3-й и 4-й кратности. Поскольку на участке ориентированного движения ИСЗ, снабженный демпфером, находится в режиме вынужденных колебаний, то и аппроксимирующие формулы для углов ориентации также должны иметь в этом случае немалые коэффициенты при гармониках 3-й и 4-й кратности. Поэтому в работе [18] решается задача о выборе на основании показаний магнитометра тригонометрических полиномов до 4-й кратности, аппроксимирующих углы ориентации ИСЗ. Показано, что при дипольной аппроксимации геомагнитного поля, как и в работе [16], использование аппроксимирующих тригонометрических полиномов высокой кратности также требует в общем случае дополнительных условий, независимых от показаний магнитометра.

Для повышения точности и надежности определения нулевого приближения в работе [17] используется более точная — недипольная модель, учитывающая в разложениях проекций напряженности геомагнитного поля гармоники 3-й кратности. Показано, что задача выбора нулевого приближения по показаниям магнитометра как по дипольной, так и по недипольной моделям геомагнитного поля является математически не вполне корректной в том смысле, что главные члены уравнений не определяют углы однозначно. Предложен оригинальный метод оптимизации не вполне корректной задачи выбора нулевого приближения.

4. ИСЗ, снабженные системами управления. В рассматриваемый период времени в СПбГУ продолжались упомянутые в первой части обзора [1] исследования динамики вращательного движения ИСЗ, снабженного маховиками. Так, в статьях [20, 21] рассматривается стационарный ИСЗ, снабженный быстро закрученным маховиком с кинетическим моментом H. Ось маховика в рабочем состоянии ориентирована ортогонально плоскости орбиты ИСЗ. Решается задача об оптимальном по расходу топлива гашении колебаний ИСЗ около центра масс. Линеаризованные дифференциальные уравнения колебаний ИСЗ с маховиком по каналам рысканья ψ и крена φ имеют вид

$$I_x\ddot{\psi} + H\dot{\varphi} + H\omega_0\psi = u_x, \quad I_y\ddot{\varphi} - H\dot{\psi} + H\omega_0\varphi = u_y, \tag{3}$$

где ω_0 — орбитальная угловая скорость; u_x и u_y — управления. С учетом обозначения $\omega = H/\sqrt{I_x I_y}$ корни характеристического уравнения системы (3) равны

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega + O(\omega_0^2, \omega_0(I_x + I_y)/H), \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_0[1 + O(\omega_0(I_x + I_y)/H)].$$

Поскольку на основании общих требований к конструкции ИСЗ имеет место соотношение $\omega_0/\omega \approx 10^{-3}$, то собственные колебания ИСЗ состоят из суперпозиции быстрых колебаний с частотой ω и медленных колебаний с частотой, близкой к ω_0.

В [20] изучается погашение быстрых линейных колебаний ИСЗ. Показано, что оптимальное управление в смысле принципа максимума Понтрягина представляет собой дискретный периодический процесс. Построена функция управления для случая, когда спутник снабжен реактивными двигателями на осях x и y.

Статья [21] является продолжением статьи [20]. В ней рассматривается задача погашения медленных колебаний ИСЗ, если время гашения ограничено и, для примера не превышает четверти периода колебаний. Решение уравнений (17) ищется в виде

$$\varphi = \varphi_1(\tau_1) + \varphi_2(\tau_2), \quad \psi = \psi_1(\tau_1) + \psi_2(\tau_2), \tag{4}$$

где φ_1 и ψ_1 — некоторые функции «быстрого» времени $\tau_1 = \omega t + \delta_1$, $\delta_1 = \text{const}$; φ_2 и ψ_2 — функции «медленного» времени $\tau_2 = \omega_0 t + \delta_2$, $\delta_2 = \text{const}$. Подстановка (4) в (17) с учетом большого различия в величинах ω и ω_0 позволяет приравнять нулю как низкочастотные, так и высокочастотные члены. В результате после введения обозначений $x = \dot{\psi}$, $y = \dot{\varphi}$, $a = H/I_x$, $b = H/I_y$ получаются уравнения вида

$$\frac{dx}{d\tau_1} + ay = \frac{u_x}{I_x}, \quad \frac{dy}{d\tau_1} - bx = \frac{u_y}{I_y}$$

для быстрочастотных колебаний ИСЗ, а также уравнения

$$\frac{d\varphi_2}{d\tau_2} + \psi_2 = \frac{u_x}{H\omega_0}, \quad \frac{d\psi_2}{d\tau_2} - \varphi_2 = \frac{u_y}{H\omega_0}$$

для низкочастотных колебаний ИСЗ. Применение теории оптимизации процессов с использованием принципа максимума Понтрягина приводит к выводу о дискретности и 2π-периодичности по τ оптимального процесса управления, не стесненного ограничениями по времени. Построены управляющие функции u_x и u_y.

5. ИСЗ с гибким гравитационным стабилизатором. В 1960–1970-е годы в СПбГУ под руководством Л. И. Кузнецова был выполнен ряд исследований, посвященных анализу динамики ИСЗ с гравитационным стабилизатором, служащим для обеспечения ориентации и стабилизации углового положения ИСЗ относительно местной вертикали. Основными элементами гравитационного стабилизатора являются выдвижная гравитационная штанга, прикрепленная к основному телу ИСЗ в точке O, с балансировочным грузом на конце и демпфер, рассеивающий энергию либрационного углового движения ИСЗ. При выдвижении штанги с грузом существенно изменяется конфигурация эллипсоида инерции ИСЗ, благодаря чему в гравитационном поле Земли создается ориентирующий гравитационный момент, обеспечивающий стремление оси $O\xi$, направленной вдоль недеформированной штанги, к устойчивому положению в направлении местной вертикали [22].

Однако в условиях, когда штангу, имеющую большую длину, нельзя считать жестким стержнем, требуется дополнительное исследование вопроса — в постановке задачи о движении гибкого ИСЗ, состоящего из основного твердого тела и прикрепленного к нему деформируемого упругого стержня переменного сечения с грузом на конце. Такое исследование было выполнено в статье [23]. Вводится система координат C_0xyz (орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) с началом в центре масс системы с жестким прямым стержнем, ориентация которой относительно орбитальной системы координат задается углами тангажа ϑ, крена φ и рыскания ψ. Предполагается, что вектор $\vec{u}(\xi, t)$, определяющий смещение точки стержня от оси ξ, можно разложить на две составляющие: $\vec{u}(\xi, t) = x(\xi, t)\vec{i} + y(\xi, t)\vec{j}$. С использованием метода приведения, позволяющего положить

$$x(\xi, t) = f_1(\xi)q_1(t), \quad y(\xi, t) = f_2(\xi)q_2(t), \tag{5}$$

где функции $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ задаются заранее, вводятся новые неизвестные функции $q_1(t)$ и $q_2(t)$, подлежащие определению. Таким образом, в качестве обобщенных координат принимаются переменные $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$.

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии гравитационных Π_1 и упругих Π_2 сил:

$$\Pi_1 = -\mu\left(\int_{m_1} \frac{dm_1}{r_1} + \int_{m_2} \frac{dm_2}{r_2} + \frac{m_3}{r_3}\right), \quad \Pi_2 = \frac{E}{2}\int_0^L I(\xi)\left[\left(\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}\right)^2\right] d\xi.$$

Здесь μ — гравитационная постоянная; m_1 — масса основного тела; m_2 — масса стержня; m_1 — масса груза; E — модуль упругости материала стержня; $I(\xi)$ — момент инерции сечения стержня. С учетом (5) Π_2 примет вид

$$\Pi_2 = \frac{1}{2}(C_1 q_1^2 + C_2 q_2^2), \quad \text{где} \quad C_k = E\int_0^L I(\xi)(f_k''(\xi))^2 d\xi.$$

Затем выводится кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}\left(I_{C_1x}\omega_x^2 + I_{C_1y}\omega_y^2 + C\omega_z^2 + m_1 v_{C_1}^2 + \int_{m_2} v_2^2 dm_2 + m_3 v_3^2\right)$$

и записываются уравнения Лагранжа II рода. В линейном приближении эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
B\ddot{\vartheta} - d_1\ddot{q}_1 + 3(A-C)\omega_0^2\vartheta - 3a_1\omega_0^2 q_1 &= 0,\\
-d_1\ddot{\vartheta} + b_1\ddot{q}_1 - 3a_1\omega_0^2\vartheta + C_1 q_1 &= 0,\\
C\ddot{\psi} - \omega_0(A+C-B)\dot{\varphi} + (B-A)\omega_0^2\psi &= 0,\\
A\ddot{\varphi} + d_2\ddot{q}_2 + \omega_0(A+C-B)\dot{\psi} + 4\omega_0^2(B-C)\varphi + (3a_2+d_2)\omega_0^2 q_2 &= 0,\\
d_2\ddot{\varphi} + b_2\ddot{q}_2 + (3a_2+d_2)\omega_0^2\varphi + (C_2+\omega_0^2 b_2)q_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Нулевое решение системы (6) отвечает равновесному положению ИСЗ. Первые два уравнения системы (6) отделяются и допускают интеграл

$$V_1(\vartheta,\dot{\vartheta},q_1,\dot{q}_1) = B\dot{\vartheta}^2 - 2d_1\dot{\vartheta}\dot{q}_1 + b_1\dot{q}_1^2 + 3(A-C)\omega_0^2\vartheta^2 - 6a_1\omega_0^2\vartheta q_1 + C_1 q_1^2.$$

Условия положительной определенности функции V_1, записанные в соответствии с критерием Сильвестра, дают в явном виде достаточные (в первом приближении) условия устойчивости нулевого решения первой подсистемы из (6).

Для устойчивости нулевого решения второй подсистемы из (6) (в первом приближении) достаточно, чтобы функция

$$\begin{aligned}
V_2(\varphi,\dot{\varphi},\psi,\dot{\psi},q_2,\dot{q}_2) = {} & A\dot{\varphi}^2 + C\dot{\psi}^2 + b_2\dot{q}_2^2 + 2d_2\dot{\varphi}\dot{q}_2 + \\
& + 4(B-C)\omega_0^2\varphi^2 + (B-A)\omega_0^2\psi^2 + (C_2+\omega_0^2 b_2)q_2^2 + 2(3a_2+d_2)\varphi q_2
\end{aligned}$$

была определенно положительной, откуда по теореме Сильвестра следуют еще четыре неравенства. Произведен анализ полученных условий устойчивости положения равновесия гибкого ИСЗ. Показано, что если учитывать рассеяние энергии в материале стержня путем введения в первое уравнение системы (6) члена $k_1\dot{q}_1$ ($k_1 > 0$), а в пятое уравнение системы (6) — члена $k_2\dot{q}_2$ ($k_2 > 0$), то положение равновесия ИСЗ устойчиво асимптотически.

Полученные в [23] достаточные условия устойчивости накладывают ограничения на параметры ИСЗ и, в частности, на первую собственную частоту колебаний жестко закрепленного на основном теле стержня с массой m_3 на конце. Поэтому принципиально важным было изучить вопрос об оценке первой собственной частоты колебаний гравитационной штанги. Этот вопрос, вместе с разработкой приближенных аналитических методов для его анализа, рассмотрен в работах [24, 25], упомянутых в 1-й части обзора [1]. Кроме того, при моделировании системы гравитационной стабилизации ИСЗ необходимо учитывать влияние различного рода возмущений, действующих на штангу. Для низкоорбитальных ИСЗ (на высотах от 400 до 800 км) существенно влияние атмосферы Земли, вызывающей вынужденные колебания гравитационной штанги. Разработке метода для анализа этих колебаний посвящена работа [26], также упомянутая в [1].

Анализу влияния температурных деформаций стержня на плоское движение соединенного с ним ИСЗ посвящена работа [27]. В ней рассматривается гравитационно стабилизированный ИСЗ, движущийся по круговой орбите в центральном ньютоновском гравитационном поле. Изучается влияние температурных деформаций штанги стабилизатора на движение ИСЗ. Считается, что плоскость орбиты ИСЗ параллельна потоку солнечных лучей. Это предположение дает возможность ограничиться рассмотрением плоского движения ИСЗ. Штанга рассматривается как тонкостенный круговой цилиндр достаточно большой протяженности по сравнению с его диаметром. Вследствие тонкостенности штанги можно считать, что градиент температур по ее толщине отсутствует. При сделанных предположениях задача о распределении температур в штанге стабилизатора сводится к одномерной задаче о распределении температуры по наружному контуру сечения цилиндра. Выведены дифференциальные уравнения, определяющие закон распределения температуры T в штанге:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2T}{d\vartheta^2} - AT^4 = -B\sin\varphi\cos\vartheta, \qquad && \vartheta \in [-\pi/2, \pi/2], \\ &\frac{d^2T}{d\vartheta^2} - AT^4 = 0, && \vartheta \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{aligned}$$

Здесь ϑ — полярный угол в поперечном сечении штанги; $\varphi = \omega_0 t$ — угол, определяющий положение ИСЗ на траектории; A и B — параметры ИСЗ, зависящие от его геометрических размеров и физических свойств.

Решение этих уравнений построено по методу Бубнова — Галеркина в виде $T = a + b\cos\vartheta$. После этого найдены температурные деформации штанги, защемленной на одном конце и свободной на другом конце. Найдено относительное смещение конца штанги, вызванное ее температурной деформацией, как функции времени. Составлено дифференциальное уравнение плоских колебаний ИСЗ. Анализ этого уравнения показал, что влияние температурных деформаций стержня на плоские колебания связанного с ним ИСЗ эквивалентно действию некоторой возмущающей силы, определенным образом зависящей от времени.

В отличие от рассмотренных выше публикаций, где рассматривались вопросы динамики ИСЗ с развернутой системой гравитационной стабилизации, в работе [28] изучается вращательное движение ИСЗ при выдвижении стабилизатора. Выводятся дифференциальные уравнения для отыскания составляющих x и y смещения груза относительного основного тела. Предполагается, что время выдвижения стержня намного больше периода собственных колебаний груза при полностью выдвинутом стержне. На этом основании вводится малый параметр, присутствующий множителем в правых частях нелинейных дифференциальных уравнений для отыскания x и y. Для построения приближенного решения полученных уравнений применяется асимптотический метод Крылова — Боголюбова.

Изгибные колебания гравитационного стабилизатора в режиме ротационного движения ИСЗ, близкого к регулярной прецессии динамически симметричного твердого тела, изучались в работе [29]. Для изучения движения сначала применялся метод приведения. Затем для нерезонансного случая применялся метод уточнения решения и выведена формула, по которой точно найдено среднее отклонение гравитационного стабилизатора от положения равновесия.

6. ИСЗ с системой гравитационной стабилизации и демпфером. Ряд публикаций, выполненных учеными СПбГУ, относится к продолжению исследований динамики ИСЗ с системой гравитационной стабилизации и посвящен учету влияния диссипативных факторов, обусловленных разного рода демпферами (гистерезисными, магнитными, жидкостными и др.), установленными на ИСЗ.

В работе [30] рассматривается ИСЗ, снабженный демпфером, выполненным в виде шара с магнитом, помещенным в сферическую полость. Зазор между шаром и стенкой полости заполнен вязкой жидкостью. После вывода шара на орбиту шар «плавает» внутри полости, отслеживая силовую линию магнитного поля Земли (МПЗ). Предполагается, что магнитная ось шара во все время движения расположена вдоль вектора напряженности МПЗ. Взаимодействие шара с корпусом ИСЗ сводится к моменту, пропорциональному угловой скорости шара относительно корпуса. В дипольной аппроксимации МПЗ, на круговой полярной орбите, могут иметь место плоские колебания ИСЗ, описываемые дифференциальным уравнением

$$\vartheta'' + n^2 \sin\vartheta \cos\vartheta = h\left(\frac{2}{1+3\sin^2\tau} - \vartheta'\right), \tag{7}$$

где дифференцирование производится по безразмерной переменной $\tau = \omega_0 t$, $n^2 = 3(1-C/A)$; $h = \dfrac{\varkappa}{A\omega_0}$; $\varkappa$ — коэффициент пропорциональности. После введения новой переменной $v = (\vartheta'^2 + n^2 \sin^2\vartheta)/2$, представляющей собой интеграл дифференциального уравнения (7) при $h = 0$ и изменяющейся медленно по сравнению с ϑ, произведено усреднение по «быстрой» переменной ϑ и получено дифференциальное уравнение $v' = -hv$, из которого следует, что v убывает и, следовательно, убывают максимальные отклонения оси ИСЗ от вертикали, и он будет приведен в ориентированное движение. Далее это движение построено в виде тригонометрического ряда.

При исследовании динамики гравитационно стабилизированного ИСЗ с шаровым магнитным демпфером предполагается, что ось демпфера отслеживает силовую линию геомагнитного поля. Однако в действительности имеет место отставание среднего движения оси сердечника от силовой линии геомагнитного поля. Это явление обнаружено в работе [31], где построено приближенное решение для движения оси сердечника магнитного успокоителя кругового ИСЗ с точностью до членов второго порядка относительно приведенного коэффициента демпфирования. Положение вектора $\vec{B}$ магнитной индукции сердечника в системе главных центральных осей инерции ИСЗ $Cxyz$ можно задать с помощью сферических углов β и γ так, что

$$B_x = B\sin\gamma\sin\beta, \quad B_y = B\cos\gamma, \quad B_z = B\sin\gamma\cos\beta.$$

Тогда изменение углов β и γ описывается дифференциальными уравнениями

$$\mu\frac{d\gamma}{du} = \sin i \sin u \cos\gamma \sin\beta - \cos i \sin\gamma - 2\sin i \cos u \cos\gamma\cos\beta, \tag{8}$$

$$\mu\frac{d\beta}{du} = (\sin u\cos\beta + 2\cos u \sin\beta)\sin i \sin^{-1}\gamma, \tag{9}$$

где i — наклонение орбиты; u — аргумент широты; μ — малый приведенный коэффициент демпфирования. Так как по теории сингулярно возмущенных уравнений наблюдается асимптотическое затухание собственных колебаний, то необходимо построить какое-либо частное решение системы (6), (7) в виде

$$\gamma = \gamma_0 + \mu\gamma_1 + \mu^2\gamma_2 + O(\mu^3), \quad \beta = \beta_0 + \mu\beta_1 + \mu^2\beta_2 + O(\mu^3).$$

Найденные значения функций β_k и γ_k $(k = 0, 1, 2)$ свидетельствуют о том, что в нулевом приближении ось сердечника отслеживает магнитную силовую линию, однако в более точных приближениях обнаруживается колебательное движение проекций оси сердечника на плоскость орбиты и на нормаль к плоскости орбиты, а также отставание от соответствующих проекций на те же направления напряженности геомагнитного поля.

Продолжение исследований динамики ИСЗ с шаровым магнитным демпфером содержится в работе [32]. Отмечается, что предположение о том, что магнитная ось шара «следит» за вектором напряженности МПЗ, можно обосновать лишь в том случае, если момент инерции шара достаточно мал, а собственный магнитный момент шара — достаточно велик. С учетом справедливости такого предположения рассматривается ИСЗ со сферическим эллипсоидом инерции на круговой полярной орбите при дипольной аппроксимации МПЗ. Угловая скорость ИСЗ относительно орбитальной системы координат обозначается $\vec{\omega}$, а угловая скорость шара относительно орбитальной системы координат — $\vec{\omega}_1$. Считается, что момент взаимодействия шара со сферической полостью ИСЗ пропорционален угловой скорости шара относительно полости $(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega})$ с коэффициентом k. Тогда из теоремы об изменении кинетического момента ИСЗ следуют уравнения

$$A(\dot{\omega}_x + \omega_0\omega_z) = k(\omega_{1x} - \omega_x),\ A\dot{\omega}_y = k(\omega_{1y} - \omega_y),\ A(\dot{\omega}_z - \omega_0\omega_x) = k(\omega_{1z} - \omega_z),$$

которые на круговой полярной орбите принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_x' + \omega_z &= -\varepsilon[a_{11}(u)\omega_x + a_{12}(u)\omega_z], \\ \omega_z' - \omega_x &= -\varepsilon[a_{12}(u)\omega_x + a_{22}(u)\omega_z], \\ \omega_y' &= -\varepsilon[\omega_y - b(u)]. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon = k/(A\omega_0)$, штрих означает дифференцирование по аргументу широты u,

$$a_{11}(u) = \frac{4\sin^2 u}{1 + 3\sin^2 u},\ a_{12}(u) = \frac{\sin 2u}{1 + 3\sin^2 u},\ a_{22}(u) = \frac{\cos^2 u}{1 + 3\sin^2 u},\ b(u) = \frac{2\omega_0}{1 + 3\sin^2 u}.$$

Из 3-го уравнения следует, что при $t \to \infty$

$$\omega_y \to \omega_0 \left[1 + 2\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1/3)^k}{4k^2 + \varepsilon^k} (\varepsilon \cos 2ku + 2k \sin 2ku)\right].$$

Для компонент ω_x и ω_z доказана асимптотическая устойчивость нулевого решения на основании теоремы Н. Н. Красовского и получены оценки для скорости затухания ω_x и ω_z с течением времени. Таким образом, получены формулы, полезные для предварительных расчетов.

В работе [33] рассматривался вопрос о плоском движении ИСЗ с магнитным демпфером на полярной слабоэллиптической орбите. Получено дифференциальное уравнение тангажных колебаний ИСЗ:

$$\ddot{\theta} + n^2 \sin\theta = \varepsilon\left[-\varkappa_1\dot{\theta} - 3\varkappa n^2 \cos\tau \sin\theta + 4\varkappa \sin\tau + 2\varkappa_1\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(1/3)^k \cos 2ku\right)\right]. \quad (10)$$

Здесь τ — безразмерное время; ε — малый параметр; $\varepsilon\varkappa$ — эксцентриситет орбиты; $\varepsilon\varkappa_1$ — коэффициент демпфирования; u — аргумент широты; $n^2 = 3(I_y - I_z)/I_x$. Исследованы 2π-периодические колебательные движения ИСЗ.

Вращательные плоские движения ИСЗ с магнитным демпфером на полярной слабоэллиптической орбите рассмотрены в работе [34]. Исследование базируется на анализе дифференциального уравнения (8). Найдены периодические вращения и исследована их устойчивость.

В работе [35] рассматривались малые свободные колебания гравитационно стабилизированного ИСЗ с магнитным демпфером на полярной слабоэллиптической орбите по углам крена и рысканья. Задача сводится к исследованию системы двух линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с периодическими коэффициентами. Для исследования используется метод малого параметра. Установлено, что решения системы устойчивы при $I_x < I_y < I_z$, но так как уравнения имеют периодические коэффициенты, то рассматривается вопрос о параметрических и комбинационных резонансах. Построены границы областей устойчивости.

В работе [36] предложена асимптотическая теория магнитного успокоителя колебаний ИСЗ.

В работе [37] рассматриваются пространственные малые колебания ИСЗ, снабженного системами гравитационной стабилизации и гистерезисного демпфирования и находящегося на круговой орбите произвольного наклонения. В проекциях на главные центральные оси инерции $Cxyz$ динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z &= M_x + L_x, \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_x\omega_z &= M_y + L_y, \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y &= M_z + L_z, \end{aligned} \tag{11}$$

где ω_x, ω_y, ω_z — проекции угловой скорости ИСЗ на оси x, y, z; M_x, M_y, M_z — проекции гравитационного момента, а L_x, L_y, L_z — проекции моментов взаимодействия гистерезисных стержней с МПЗ, характеризующимся напряженностью $\vec{H}$. В случае круговой орбиты [5]

$$M_x = 3\omega_0^2(C - B)\gamma_2\gamma_3, \quad M_y = 3\omega_0^2(A - C)\gamma_1\gamma_3, \quad M_z = 3\omega_0^2(B - A)\gamma_1\gamma_2, \tag{12}$$

где γ_1, γ_2, γ_3 — направляющие косинусы местной вертикали в осях x, y, z; ω_0 — орбитальная угловая скорость ИСЗ.

Как известно [5], при выполнении неравенств $B > A > C$ и условий $L_x = L_y = L_z = 0$ ИСЗ имеет в орбитальной системе координат устойчивое положение равновесия, которому соответствуют нулевые значения «самолетных» углов ориентации φ, θ, ψ. Для гистерезисных стержней, имеющих объем v и параллельных главным центральным осям инерции ИСЗ,

$$\vec{L} = \frac{v}{4\pi}\left[(\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3) \times \vec{H}\right], \tag{13}$$

где $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ — векторы магнитной индукции стержней, расположенных параллельно осям x, y, z соответственно. Гистерезисный характер зависимости $\vec{B}$ от $\vec{H}$ описывается моделью В. К. Аркадьева:

$$B_{1x} = \mu\left(H_x - h\frac{dH_x}{dt}\right), \; B_{1y} = \mu\left(H_y - h\frac{dH_y}{dt}\right), \; B_{1z} = \mu\left(H_z - h\frac{dH_z}{dt}\right), \tag{14}$$

где μ — магнитная проницаемость стержня вдоль его оси; h — положительный коэффициент, зависящий от материала стержня. С учетом обозначения $\varkappa = \mu v h/(4\pi)$ подстановка (14) в (13) приводит к равенствам

$$L_x = \varkappa\left(\dot{H}_z H_y - \dot{H}_y H_z\right), \; L_y = \varkappa\left(\dot{H}_x H_z - \dot{H}_z H_x\right), \; L_z = \varkappa\left(\dot{H}_y H_x - \dot{H}_x H_y\right). \quad (15)$$

Далее авторы используют дипольную модель МПЗ [5]. Тогда, с учетом малости «самолетных» углов φ, θ, ψ, приближенно

$$\begin{aligned} H_x &= H_0(\sin i \cos\tau + \psi\cos i + 2\vartheta \sin i \sin\tau), \\ H_y &= H_0(-\psi \sin i \cos\tau + \cos i - 2\varphi \sin i \sin\tau), \\ H_z &= H_0(\theta \sin i \cos\tau - \varphi\cos i - 2 \sin i \sin\tau), \end{aligned} \quad (16)$$

где H_0 — напряженность МПЗ над экватором, $\tau = \omega_0 t$. Соответственно, уравнения (11) на основании (12), (15) и (16) в линейном приближении имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} \varphi'' + e_1\psi' + n_1^2\varphi &= \varepsilon\delta_1[(b_{11}(\tau)\dot{\varphi} + b_{12}(\tau)\dot{\psi} + b_{13}(\tau)\dot{\theta} + c_{12}(\tau)\psi + c_{13}(\tau)\theta + c_{23}(\tau)), \\ \psi'' - e_2\varphi' + n_2^2\psi &= \varepsilon[(b_{12}(\tau)\dot{\varphi} + b_{22}(\tau)\dot{\psi} + b_{23}(\tau)\dot{\theta} - c_{12}(\tau)\varphi + c_{23}(\tau)\theta - c_{13}(\tau)), \\ \theta'' + n^2\theta &= \varepsilon\frac{\delta_1}{\delta_2}[(b_{13}(\tau)\dot{\varphi} + b_{23}(\tau)\dot{\psi} + b_{33}(\tau)\dot{\theta} - c_{13}(\tau)\varphi - c_{23}(\tau)\psi + c_{12}(\tau)). \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $\varepsilon = \mu v h H_0^2/(4\pi C)$ — малый параметр; e_1, e_2, n_1, n_2, n зависят только от инерционных параметров ИСЗ, штрих означает дифференцирование по τ.

Для решения системы (17) применяется метод медленно изменяющихся амплитуд, предусматривающий процедуру усреднения и последующий переход к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами. Выявлены возможные резонансные комбинации собственных частот ИСЗ, в окрестности которых при определенных условиях могут возникнуть области неустойчивости. Построено решение в нерезонансном случае.

ИСЗ с жидкостным демпфером рассматривается в работах [38–40]. В [38] применяется приближенный подход, позволяющий считать, что кинетическая энергия T ИСЗ, представляющего собой твердое тело с тороидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью, удовлетворяет уравнению $\dfrac{dT}{dt} = -2R + (\vec{M}\cdot\vec{\omega})$, где $\vec{\omega}$ — угловая скорость тела; $R = \dfrac{\mu}{2}\displaystyle\int_V \left[(\nabla v_x)^2 + (\nabla v_y)^2 + (\nabla v_z)^2\right] dV$, μ — коэффициент вязкости жидкости, $\vec{v}$ — скорость частиц жидкости относительно твердого тела. При ламинарном течении жидкости в тороидальной полости, образованной вращением окружности радиуса r_0, отстоящей от центра этой окружности на расстоянии R_0 при $R_0 \gg r_0$, представляется возможным принять закон распределения Пуазейля $v = u(t)(1 - r^2/r_0^2)$, где r — расстояние между частицей жидкости и окружностью, образованной центрами упомянутой выше окружности. В этом случае $R = \dfrac{\mu}{2}\displaystyle\int_V \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 dV$. В случае малых колебаний ИСЗ в плоскости слабоэллиптической орбиты ($e \ll 1$) динамика системы твердое тело — жидкость описывается дифференциальными уравнениями:

$$\theta'' + a_{12}w' + n^2\theta \;=\; e(2\sin\tau - 3n^2\theta\cos\tau), \quad (18)$$

$$a_{12}\theta'' + a_{22}w' \quad = \quad 2e\sin\tau - bw, \tag{19}$$

где дифференцирование выполняется по безразмерной переменной $\tau = \omega_0 t$; θ — угол между одной из главных центральных осей ИСЗ и местной вертикалью; $w = u/(\omega_0 R_0)$; $n^2 = 3(A - C)/B$; коэффициенты a_{12} и a_{22} пропорциональны массе жидкости. В предположении, что e и b — величины порядка малости, решение системы (9), (10) ищется в виде

$$\begin{aligned}
\theta &= x_1\cos k\tau + x_2\sin k\tau + 2e\frac{a_{22} - a_{12}^2}{(n^2-1)a_{22} + a_{12}^2}\sin\tau,\\
w &= \gamma(x_1\sin k\tau - x_2\cos k\tau) + x_3 - 2e\frac{a_{12}n^2\cos\tau}{(n^2-1)a_{22} + a_{12}^2},
\end{aligned}$$

где x_1, x_2, x_3 — новые неизвестные функции, удовлетворяющие уравнению

$$x_1'\cos k\tau + x_2'\sin k\tau = 0, \quad k = n\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{22} - a_{12}^2}}, \quad \gamma = \frac{na_{12}}{\sqrt{a_{22}(a_{22} - a_{12}^2)}}.$$

Для определения неизвестных x_1, x_2, x_3 получена дифференциальная система в нормальной стандартной форме, удобной для последующего усреднения по быстрой переменной τ. В результате получены приближенные формулы, позволяющие оценить быстроту затухания колебаний.

В работе [39] рассматриваются малые пространственные колебания гравитационно стабилизированного ИСЗ с тремя тороидальными полостями, заполненными вязкой несжимаемой жидкостью. В качестве обобщенных координат вводятся углы тангажа, крена и рысканья ИСЗ, и относительные скорости жидкости в торах. Дифференциальные уравнения движения записываются в линейном приближении. Вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения полученных уравнений решен на основании теоремы Барбашина—Красовского. Получены оценки быстроты затухания колебаний ИСЗ.

В работе [40], в отличие от [38] и [39], рассматриваются плоские колебания с большими амплитудами гравитационно стабилизированного ИСЗ с тороидальной полостью, заполненной вязкой жидкостью. Для исследования движения ИСЗ применен асимптотический метод разделения движений Ван дер Поля. Получены формулы, позволяющие определить скорость затухания колебаний.

7. ИСЗ с собственным магнитным моментом и демпфером. В данном разделе рассматриваются публикации ученых СПбГУ, посвященные анализу динамики таких ИСЗ, для которых взаимодействие собственного магнитного момента ИСЗ с геомагнитным полем является принципиально важным не только для формирования демпфирующих моментов (такие ИСЗ рассматривались также и в предыдущем разделе), но и для формирования восстанавливающего момента, обеспечивающего ориентацию ИСЗ либо самостоятельно (магнитная система ориентации), либо в составе гравитационной системы (гравитационно-магнитная система ориентации). Вначале рассматриваются ИСЗ с постоянным собственным магнитным моментом. В таком варианте восстанавливающий момент магнитного взаимодействия имеет пассивный характер, а ИСЗ часто называется намагниченным.

В работе [41] рассмотрены плоские колебания намагниченного ИСЗ на круговой экваториальной орбите около вектора напряженности МПЗ с учетом гистерезисных потерь в ферромагнитном стержне. Для аналитического представления петли гистерезиса применено третье предложение Корчинского, соответствующее следующей зависимости магнитной индукции стержня B от проекции напряженности МПЗ на ось стержня H_τ:

$$B = \alpha H_\tau - \beta H_m \left(1 - \frac{H_\tau}{H_m} \mathrm{sign} H_\tau\right) \mathrm{sign} \frac{dH_\tau}{dt}.$$

Здесь H_m — максимальное значение H_τ за цикл; α и β — постоянные. В случае колебаний с начальной амплитудой $\theta_m < \pi/2$ дифференциальное уравнение плоских колебаний ИСЗ записывается в виде

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \sin\theta = \varepsilon \left[\sin\theta - \gamma \sin\theta_m \left(1 - \frac{\sin\theta}{\sin\theta_m} \mathrm{sign}(\sin\theta)\right) \mathrm{sign} \frac{d\theta}{d\tau}\right] \cos\theta, \tag{20}$$

где ε — малый параметр. Порождающее решение в случае колебаний имеет вид $\sin(\theta/2) = \sin(\theta_m/2)\,\mathrm{sn}(\tau - \tau_0)$, где θ_m и τ_0 — постоянные. Решение уравнения (11) ищется в таком же виде, как и порождающее решение, но с переменными θ_m и τ_0. После введения новых переменных

$$x = \sin(\theta_m(\tau)/2), \quad y = \omega(x)(\tau - \tau_0(\tau)), \tag{21}$$

где $\omega(x) = \dfrac{1}{K(x)}$, $\quad K(x) = \int\limits_0^{\pi/2} \dfrac{d\varphi}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\varphi}}$, получена дифференциальная система с быстровращающейся фазой, допускающая асимптотическое сведение к укороченным уравнениям. В результате построено приближенное решение задачи и численно проиллюстрирован процесс затухания колебаний ИСЗ.

В работе [42] рассматриваются плоские и пространственные колебания намагниченного ИСЗ с поплавковым демпфером, движущегося по круговой экваториальной орбите в геомагнитном поле. Если принять предположения работы [43] и пренебречь возмущающими моментами, то дифференциальное уравнение плоских колебаний ИСЗ будет иметь вид

$$\theta'' + \sin\theta = -\varepsilon\theta',$$

где θ — угол отклонения оси намагниченности ИСЗ от вектора $\vec{H}$ напряженности геомагнитного поля; A — момент инерции ИСЗ; I — собственный магнитный момент ИСЗ; k — коэффициент демпфирования; $\varepsilon = k/\sqrt{AIH}$, а дифференцирование выполняется по безразмерной независимой переменной $\tau = t\sqrt{IH/A}$.

Далее, по аналогии с решением уравнения (11), вводятся новые переменные (12), полученная для них дифференциальная система усредняется по переменной y, а для переменной x получены уравнения

$$x = \theta_m/2, \quad x' = -\varepsilon x/2, \quad \theta_m(\tau) = \theta_m(0) e^{-\varepsilon\tau/2},$$

которые, как показал проведенный в [42] анализ, достаточно точно описывают плоское движение ИСЗ и при больших θ_m.

При рассмотрении пространственных колебаний ИСЗ вводится предположение о том, что эллипсоид инерции ИСЗ является эллипсоидом вращения и что его магнитная ось направлена вдоль оси динамической симметрии. Динамические уравнения Эйлера записываются в виде

$$A\dot{\omega}_x + (C - A)\omega_y\omega_z = -IH_y + k(\omega_{1x} - \omega_x), \tag{22}$$

$$A\dot{\omega}_y - (C-A)\omega_x\omega_z = \ IH_x + k(\omega_{1y} - \omega_y), \tag{23}$$

$$C\dot{\omega}_z = k(\omega_{1z} - \omega_z), \tag{24}$$

где $\vec{\omega}$ — угловая скорость ИСЗ; $\vec{\omega}_1$ — угловая скорость поплавка.

Ориентация ИСЗ в кениговой системе координат, одна из осей которой направлена вдоль вектора $\vec{H}$, задается с помощью «самолетных» углов φ, θ, ψ. Наличие восстанавливающих моментов, действующих на ИСЗ, а также результат исследования плоских колебаний дают основание рассматривать случай, когда φ, θ, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ можно считать малыми. Тогда уравнение (15) сводится к равенству $\omega_z = \mathrm{const}$, а уравнения (13) и (14) после перехода к безразмерной независимой переменной τ принимают вид

$$\varphi'' - g\theta' + \varepsilon\varphi' + a\varphi = 0, \qquad \theta'' + g\varphi' + \varepsilon\theta' + a\theta = 0, \tag{25}$$

где $g = \omega_z(2A - C)/\sqrt{AIH}$. На основе анализа корней характеристического уравнения системы (16) получен вывод об устойчивости положения равновесия $\varphi = \theta = 0$ при $a = 1 + \omega_z^2(C-A)/(IH) > 0$ и неустойчивости — при $a < 0$.

Исходя из малости параметра ε, для оценки скорости затухания колебаний ИСЗ применен метод усреднения. Установлено, что скорости затухания колебаний определяются экспонентой с показателем $-\dfrac{\varepsilon}{2}\left(1 - \dfrac{|g|}{\sqrt{g^2 + 4a}}\right)\tau$.

В работе [44] рассматривается плоское движение ИСЗ относительно его центра масс на круговой полярной орбите. Предполагается, что ИСЗ снабжен системами гравитационной стабилизации, демпфирования и промежуточной ориентации по вектору магнитной индукции МПЗ. Пусть x, y, z — главные центральные оси инерции ИСЗ, а I_x^0, I_y^0, I_z^0 — соответствующие им главные центральные моменты инерции. При плоском движении ИСЗ ось y остается ортогональной к плоскости орбиты. Дифференциальное уравнение движения ИСЗ имеет вид

$$I_y^0 \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M_y + Q_y + L_y, \tag{26}$$

где ϑ — угол между осью z и местной вертикалью; M_y, Q_y, L_y — соответствующие проекции моментов гравитационных сил, сил взаимодействия электромагнитов с МПЗ и гистерезисных стержней с МПЗ. Пусть ω_0 — орбитальная угловая скорость ИСЗ; $\vec{I}_0$ — магнитный момент электромагнита; $\vec{H}$ — напряженность МПЗ; $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции стержней, направленный по оси x; v — объем всех стержней. Тогда

$$M_y = -3\omega_0^2(I_x^0 - I_z^0)\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad Q_y = -I_0 H\sin\vartheta, \quad L_y = \frac{v}{4\pi}BH\cos\vartheta.$$

Гистерезисный характер зависимости $\vec{B}$ от H_x описывается моделью В. К. Аркадьева $B = \mu\left(H_x(t) - \dfrac{h}{\omega}\dfrac{dH_x}{dt}\right)$, где μ — магнитная проницаемость стержней вдоль их осей; h — числовой коэффициент; ω — частота изменения H_x.

При дипольной аппроксимации МПЗ $H = H_0\sqrt{1 + 3\sin^2\tau}$, H_0 — напряженность МПЗ над экватором, $\tau = \omega_0 t$. Тогда дифференциальное уравнение (26) примет вид

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}+\frac{h_1}{\omega}(1+3\sin^2\tau)\cos^2\vartheta\frac{d\vartheta}{d\tau}+I\sqrt{1+3\sin^2\tau}\sin\vartheta-$$
$$-\left[\varepsilon(1+3\sin^2\tau)-3\frac{h_1}{\omega}\sin\tau\cos\tau\right]\sin\vartheta\cos\vartheta+$$
$$+a^2\frac{(2\sin\tau\cos\vartheta+\cos\tau\sin\vartheta)(2\sin\tau\sin\vartheta-\cos\tau\cos\vartheta)}{1+3\sin^2\tau}-\frac{6\sin 2\tau}{(1+3\sin^2\tau)^2}=0, \quad (27)$$

где $a^2=3\dfrac{I_x^0-I_z^0}{I_y^0}$, $\varepsilon=\dfrac{\mu v H_0^2}{4\pi I_y^0\omega_0^2}$, $I=\dfrac{I_0H_0}{I_y^0\omega_0^2}$, $h_1=\varepsilon\omega_0 h$.

Система гистерезисных стержней применяется для гашения угловой скорости ИСЗ и особенно эффективна на первом этапе, когда после отделения от последней ступени ракеты-носителя ИСЗ начинает совершать относительно быстрое вращательное движение ($\omega\gg1$). На первом этапе система промежуточной ориентации по вектору магнитной индукции МПЗ не работает, что соответствует $I=0$. Заменяя все члены в (4) их средними за период по τ значениями, авторы получают уравнение

$$\frac{d\omega}{d\tau}+\frac{h_1}{2}(1+3\sin^2\tau)+\frac{6\sin 2\tau}{(1+3\sin^2\tau)^2}=0,$$

откуда следует, что угловая скорость вращения ИСЗ убывает по линейному закону. Найдена оценка продолжительности времени 1-го этапа.

На 2-м этапе, когда ИСЗ переходит из режима вращательного движения в режим колебательного движения около положения относительного равновесия, движение ИСЗ описывается уравнением (4). Сначала авторы рассматривают случай малых колебаний ($|\vartheta|\ll1$), допускающий линеаризацию по ϑ. Общее решение соответствующего однородного уравнения найдено с помощью приема усреднения, а частное решение с учетом предположения $I\gg1$ — в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра $1/I$. Найдено время затухания колебаний. Затем рассматривается общая ситуация переходного процесса. Для построения приближенного решения уравнения (4) использовался метод замораживания коэффициентов и метод итераций.

После «захвата» ИСЗ геомагнитным полем и затухания колебаний, над одним из полюсов Земли происходит выдвижение штанги гравитационного стабилизатора и отключение электромагнита. После этого ИСЗ начинает совершать малые затухающие колебания около местной вертикали (третий этап). В предположении малости колебаний решение линеаризованного уравнения (4), имеющего вид

$$\frac{d^2\vartheta}{d\tau^2}+a^2\vartheta=-\varepsilon\left[\left(-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\cos 2\tau\right)+\frac{5}{2}h\frac{\omega_0}{\omega}\sin 2\tau\right]\vartheta-$$
$$-2\varepsilon h\frac{\omega_0}{\omega}(1-\cos 2\tau)\frac{d\vartheta}{d\tau}-\varepsilon\left[\sin 2\tau-h\frac{\omega_0}{\omega}(1-\cos 2\tau)\right],$$

построено методом Крылова—Боголюбова. Таким образом, исследованы движения ИСЗ трех типов: быстрое вращательное движение, малые колебания и переходный режим.

Продолжение и развитие исследований, выполненных в работах [41] и [44], направленных на анализ некоторых аспектов плоского движения намагниченного ИСЗ на экваториальной и полярной орбитах, содержатся в работе [45], посвященной исследованию пространственного движения аналогичного ИСЗ, снабженного демпфером гистерезисного типа, на экваториальной орбите. Демпфер представляет собой три одинаковых взаимно перпендикулярных стержня из ферромагнитного материала. Для описания петли гистерезиса, как и в [44], используется гипотеза В. К. Аркадьева. Так же, как в [42], рассматривается ИСЗ, для которого эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, а магнитная ось направлена вдоль оси Cz динамической симметрии. Поэтому главный момент внешних сил, действующих на ИСЗ со стороны МПЗ, выражается формулой

$$\vec{M} = \Big[\mu(H_x - t^*\dot{H}_x)\vec{i} + \mu(H_y - t^*\dot{H}_y)\vec{j} + \mu(H_z - t^*\dot{H}_z)\vec{k} + I_0\vec{k}\Big] \times \vec{H},$$

где μ и t^* — некоторые постоянные.

Динамические уравнения Эйлера записываются в виде

$$A\dot{\omega}_x + (C-A)\omega_y\omega_z = M_x, \quad A\dot{\omega}_y - (C-A)\omega_x\omega_z = M_y, \quad C\dot{\omega}_z = M_z. \qquad (28)$$

Далее, в предположении малости колебаний ИСЗ по углам φ и θ, производится линеаризация уравнений (19). Вывод об устойчивости нулевого решения полученной системы для «сплюснутого» ИСЗ ($C > A$) делается на основе теоремы Барбашина — Красовского. Оценена скорость затухания колебаний ИСЗ. В случае «вытянутого» ИСЗ ($C < A$) возможны варианты (устойчивость или неустойчивость) в зависимости от величины I_0.

8. Заключение. В 1960-е годы динамика космических аппаратов сформировалась как научное направление в Ленинградском — Санкт-Петербургском университете. Опираясь на разработанные ранее методы (рассмотрению которых была посвящена 2-я часть данного обзора) анализа динамики твердого тела, ученые СПбГУ выполнили весьма обширный круг исследований актуальных прикладных задач в рамках госбюджетных и хоздоговорных НИР по заказам ведущих научно-производственных центров России. Соответственно, произошел резкий рост количества публикаций, отражающих результаты этих исследований. Рассмотрение некоторых из них в данной, 3-й части обзора дает представление о полученных в рассматриваемый период достижениях, относящихся преимущественно к неуправляемому движению твердого тела. Особое внимание уделяется угловому движению ИСЗ в режиме гравитационной стабилизации. В следующей части обзора предполагается рассмотреть результаты исследования динамики заряженного твердого тела в гравитационном и магнитном полях Земли.

Литература

1. Тихонов А. А. Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 1. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 3, 457–486 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.303

2. Тихонов А. А. Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 2. *Вестник Санкт-Петербургского университета* **11** (69), вып. 2, 259–302 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.203

3. Aleksandrov A. Yu., Martynyuk A. A., Tikhonov A. A. Some Problems of Attitude Dynamics and Control of a Rigid Body (to the 90$^{\text{th}}$ Birthday of Professor V. I. Zubov). *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **20** (2), 132–143 (2020).

4. Новоселов В. С., Бабаджанянц Л. К., Федорова Л. И. Задача прогнозирования вращательного движения несимметричного закрученного ИСЗ. В: *Механика управляемого движения и проблемы космической динамики*, 103–113. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1972).

5. Белецкий В. В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс*. Москва, Наука (1965).

6. Новоселов В. С., Лавринович К. К. Определение углового положения и угловых скоростей в конце участка активного изменения угловой скорости. *Механика управляемого движения и проблемы космической динамики*, 177–181. Лениград, Изд-во Ленингр. ун-та (1972).

7. Зубов В. И., Ермолин В. С., Сергеев С. Л., Смирнов Е. Я. *Управление вращательным движением твердого тела.* Алешков Ю. З. (ред.). Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1978).

8. Зубов В. И., Ермолин В. С., Иголкин В. Н., Ковригин А. Б., Мартыненко И. А., Тихомиров Б. П. *Динамика свободного твердого тела и определение его ориентации в пространстве.* Чернецкий В. И. (ред.). Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1968).

9. Зубов В. И. *Лекции по теории управления.* Москва, Наука (1975).

10. Новоселов В. С. О спектральной наблюдаемости углового положения ориентированного ИСЗ по вектору напряженности геомагнитного поля. *Проблемы механики управляемого движения. Иерархические механические системы: межвуз. сб. науч. тр.* **8**, 117–121. Пермь, Пермский ун-т (1976).

11. Новоселов В. С. О спектральной наблюдаемости периодических движений. Проблемы механики управляемого движения. *Оптимизация управления космическими аппаратами: межвуз. сб. науч. тр.* **9**, 111–115. Пермь, Пермский ун-т (1976).

12. Новоселов В. С. Спектральное представление вращающегося магнитного поля планеты в связи с задачей наблюдаемости углового положения. *Проблемы механики управляемого движения. Иерархические динамические системы: межвуз. сб. науч. тр.* **10**, 137–143. Пермь, Пермский ун-т (1978).

13. Новоселов В. С. Спектральная наблюдаемость углового положения ориентированного ИСЗ по измерению поворачивающегося геомагнитного поля. *Проблемы механики управляемого движения. Оптимизация процессов управления: межвуз. сб. науч. тр.* **11**, 150–154. Пермь, Пермский ун-т (1978).

14. Новоселов В. С. К вопросу о наблюдаемости углового положения ориентированного ИСЗ по измерению поворачивающегося магнитного поля. *Проблемы механики управляемого движения. Иерархические динамические системы: межвуз. сб. науч. тр.* **12**, 166–170. Пермь, Пермский ун-т (1979).

15. Новоселов В. С. Наблюдаемость углового положения ИСЗ по измерению геомагнитного поля при наличии стабилизированного вращения. *Проблемы механики управляемого движения. Оптимизация процессов управления: межвуз. сб. науч. тр.* **15**, 137–143. Пермь, Пермский ун-т (1982).

16. Новоселов В. С. Выбор нулевого приближения для углового положения ИСЗ на участке ориентированного движения при дипольной аппроксимации геомагнитного поля. В: *Механика управляемого движения и проблемы космической динамики: сб. ст.* Новоселов В. С. (отв. ред.), 123–138. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1972).

17. Новоселов В. С. Задача выбора нулевого приближения углового положения ориентированного спутника при недипольной аппроксимации геомагнитного поля. *Механика управляемого движения и проблемы космической динамики: сб. ст.* Новоселов В. С. (отв. ред.), 139–150. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1972).

18. Новоселов В. С. О выборе нулевого приближения для углового положения ИСЗ в виде тригонометрических полиномов до четвертой кратности. *Механика управляемого движения и проблемы космической динамики: сб. ст.* Новоселов В. С. (отв. ред.), 173–181. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1972).

19. Новоселов В. С., Агишев Г. Г., Малков А. А. *Возмущенное вращательное движение ориентированных ИСЗ. Проблемы небесной механики и астродинамики.* Москва, Наука (1972).

20. Бабаджанянц Л. К., Голубева Н. И., Новоселов В. С. Оптимальное демпфирование быстрых линейных колебаний стационарного ИСЗ с маховиком. *Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр.* **3** (1973).

21. Бабаджанянц Л. К., Голубева Н. И., Новоселов В. С. Энергетически оптимальное демпфирование свободных боковых колебаний стационарного ИСЗ с маховиком. *Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр.* **3**, 26–32 (1973).

22. Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А. Система гравитационной стабилизации искусственных спутников. *Искусственные спутники Земли* **16**, 5–9 (1963).

23. Кузнецов Л. И. Об устойчивости гибкого спутника. *Прикладная механика* **1**, 55–71 (1974).

24. Кузнецов Л. И. Об оценке основной частоты колебаний стержня переменного сечения. *Исследования по упругости и пластичности* **4**, 166–169 (1965).

25. Кузнецов Л. И. К вопросу о применении метода последовательных приближений для нахождений первой собственной частоты колебаний стержня. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 81–85 (1966).

26. Кузнецов Л. И. О комбинации метода приведения с методом последовательных приближений в задаче о вынужденных колебаниях стержня переменного сечения. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4**, 83–87 (1967).

27. Бухаринов Г. Н., Кузнецов Л. И., Тихонов А. А. О влиянии температурных деформаций стержня на плоское движение соединенного с ним твердого тела. *Прикладная механика* **1**, 45–54 (1974).

28. Кузнецов Л. И. Изгибные колебания стабилизатора ИСЗ при выдвижении. *Прикладная механика* **1**, 72–78 (1974).

29. Кузнецов Л. И. Изгибные колебания антенны в режиме ротационного движения спутника. *Прикладная механика* **2**, 47–55 (1975).

30. Кузнецов Л. И. Плоское движение спутника с магнитным демпфером. *Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб.* **2**, 95–99. Пермь, Пермский ун-т (1973).

31. Новоселов В. С. Отклонение оси магнитного демпфера кругового ИСЗ от силовой линии. *Проблемы механики управляемого движения: межвуз. сб. науч. тр.* **6**, 83–87 (1974).

32. Кузнецов Л. И. К вопросу о движении спутника с магнитным демпфером. *Прикладная механика* **3**, 141–146 (1977).

33. Романюк И. И. Плоские колебания твердого тела на эллиптической орбите. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **13**, 126–135 (1971).

34. Романюк И. И. Вращательные движениия твердого тела с демпфером на слабоэллиптической орбите. *Прикладная механика* **1**, 95–99 (1973).

35. Романюк И. И. Малые пространственные колебания твердого тела с демпфером на полярной слабоэллиптической орбите. *Прикладная механика* **1**, 88–94 (1973).

36. Новоселов В. С. Об асимптотической теории магнитного успокоителя ИСЗ. Проблемы механики управляемого движения. *Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр.* **14**, 141–144 (1982).

37. Кузнецов Л. И., Пасынков В. Е. Динамика ИСЗ с гистерезисными стержнями. *Прикладная механика* **3**, 130–141 (1977).

38. Кузнецов Л. И., Неровная В. С. Плоское движение спутника с тороидальной полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. *Прикладная механика* **2**, 55–61 (1975).

39. Буловацкий В. К. Малые пространственные колебания спутника с жидкостью. *Прикладная механика* **3**, 146–153 (1977).

40. Буловацкий В. К. Плоское движение около центра масс спутника с тороидальной полостью, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью. *Прикладная механика* 3, 153–156 (1977).

41. Ромашева Л. Н., Кузнецов Л. И. К вопросу о колебаниях намагниченного спутника. *Прикладная механика* **2**, 43–47 (1975).

42. Кузнецова Т. И., Кузнецов Л. И. О колебаниях намагниченного спутника с поплавковым демпфером. *Прикладная механика* **4**, 21–26 (1979).

43. Кузнецов Л. И. К вопросу о движении спутника с магнитным демпфером. *Прикладная механика* **3**, 141–146 (1977).

44. Кузнецов Л. И., Пасынков В. Е., Товстик П. Е. О плоском движении искусственного спутника Земли. *Прикладная механика* **1**, 32–44 (1974).

45. Кузнецова Т. И. Пространственное движение спутника с гистерезисным демпфером в режиме предварительной ориентации. *Прикладная механика* **6**, 31–35 (1984).

Статья поступила в редакцию 15 января 2024 г.;
доработана 20 февраля 2024 г.;
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

Контактная информация:

Тихонов Алексей Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.; a.tikhonov@spbu.ru

Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 3*

A. A. Tikhonov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Tikhonov A. A. Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 3. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 455–476. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.303 (In Russian)

This article is a continuation of the survey dedicated to the 300th anniversary of Saint Petersburg State University (SPbSU) and is an attempt to analyze the scientific achievements of the St. Petersburg School of Mechanics in the field of rigid body dynamics. This third part of the review is devoted to the 50-year period ending in 2023. It focuses on applied research carried out by scientists from St. Petersburg State University in the 1970s and devoted to the uncontrolled attitude motion of a rigid body in the gravitational and magnetic fields of the Earth. A significant place among these studies is occupied by the solution of problems related to the passive gravitational stabilization of artificial satellites using magnetic interaction to create restoring and damping torques.

Keywords: rigid body, spacecraft, artificial Earth satellite, dynamics, attitude motion, gravitational stabilization, oscillations damping.

References

1. Tikhonov A. A. Rigid body dynamics from the Euler equations to the attitude control of spacecraft in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 1. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 3, 457–486 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.303 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 3, 322–340 (2023). http://dx.doi.org/10.1134/S1063454123030081].

2. Tikhonov A. A. Rigid body dynamics from the Euler equations to the attitude control of spacecraft in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 2. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 2, 259–302 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.203 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **57**, iss. 2, 171–201 (2024). https://doi.org/10.1134/S1063454124700043].

3. Aleksandrov A. Yu., Martynyuk A. A., Tikhonov A. A. Some Problems of Attitude Dynamics and Control of a Rigid Body (to the 90th Birthday of Professor V. I. Zubov). *Nonlinear Dynamics and Systems Theory* **20** (2), 132–143 (2020).

4. Novoselov V. S., Babadzhanyants L. K., Fedorova L. I. The problem of predicting the rotational motion of an asymmetrical rotating satellite. In: *Mechanics of controlled motion and problems of space dynamics*, 103–113. Leningrad, Leningrad University Press (1972). (In Russian)

5. Beletskii V. V. *Motion of an Artificial Satellite with Respect to the Center of Mass.* Moscow, Nauka Publ. (1965). (In Russian)

6. Novoselov V. S., Lavrinovich K. K. Determination of angular position and angular velocities at the end of the section of active change in angular velocity. In: *Mechanics of controlled motion and problems of space dynamics*, 177–181. Leningrad, Leningrad University Press (1972). (In Russian)

7. Zubov V. I., Ermolin V. S., Sergeev S. L., Smirnov E. Ya. *Control of rotational motion of a rigid body.* Aleshkov Yu. Z. (ed.). Leningrad, Leningrad University Press (1978). (In Russian)

*The research was funded by the Russian Science Foundation no. 24-21-00104.

See second part: Tikhonov A. A. Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 2. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 259–302. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.203 (In Russian)

8. Zubov V. I., Ermolin V. S., Igolkin V. N., Kovrigin A. B., Martynenko I. A., Tikhomirov B. P. *Dynamics of a free rigid body and determination of its orientation in space.* Chernetsky V. I. (ed.). Leningrad, Leningrad University Press (1968). (In Russian)

9. Zubov V. I. *Lectures on control theory.* Moscow, Nauka Publ. (1975). (In Russian)

10. Novoselov V. S. On the spectral observability of the angular position of an oriented satellite along the geomagnetic field strength vector. *Problems of mechanics of controlled motion. Hierarchical mechanical systems: Interuniversity collection of scientific works* **8**, 117–121. Perm, Perm University (1976). (In Russian)

11. Novoselov V. S. On the spectral observability of periodic motions. *Problems of mechanics of controlled motion. Optimization of spacecraft control: interuniversity collection of scientific works* **9**, 111–115 (1976). (In Russian)

12. Novoselov V. S. Spectral representation of the planet's rotating magnetic field in connection with the problem of observability of the angular position. *Problems of mechanics of controlled motion. Hierarchical dynamic systems: Interuniversity collection of scientific works* **10**, 137–143. Perm, Perm University (1978). (In Russian)

13. Novoselov V. S. Spectral observability of the angular position of an oriented satellite by measuring the rotating geomagnetic field. Problems of mechanics of controlled motion. *Problems of mechanics of controlled motion. Optimization of control processes: Interuniversity collection of scientific works* **11**, 150–154. Perm, Perm University (1978). (In Russian)

14. Novoselov V. S. On the issue of observability of the angular position of an oriented satellite by measuring a rotating magnetic field. *Problems of mechanics of controlled motion. Hierarchical dynamic systems: interuniversity collection of scientific works* **12**, 166–170 (1979). (In Russian)

15. Novoselov V. S. Observability of the angular position of an satellite by measuring the geomagnetic field in the presence of stabilized rotation. *Problems of mechanics of controlled motion. Optimization of control processes: Interuniversity collection of scientific works* **15**, 137–143 (1982). (In Russian)

16. Novoselov V. S. Selection of the zero approximation for the angular position of the satellite in the area of oriented motion with dipole approximation of the geomagnetic field. *Mechanics of controlled motion and problems of space dynamics: Collection of papers.* Novoselov V. S. (exec. ed.), 123–138. Leningrad, Leningrad University Press (1972). (In Russian)

17. Novoselov V. S. The problem of choosing a zero approximation of the angular position of an oriented satellite for non-dipole approximation of the geomagnetic field. *Mechanics of controlled motion and problems of space dynamics: Collection of papers.* Novoselov V. S. (exec. ed.), 139–150. Leningrad, Leningrad University Press (1972). (In Russian)

18. Novoselov V. S. On the choice of the zero approximation for the angular position of the satellite in the form of trigonometric polynomials up to the fourth multiplicity. *Mechanics of controlled motion and problems of space dynamics: Collection of papers.* Novoselov V. S. (exec. ed.), 173–181. Leningrad, Leningrad University Press (1972). (In Russian)

19. Novoselov V. S., Agishev G. G., Malkov A. A. Perturbed rotational motion of oriented satellites. *Problems of celestial mechanics and astrodynamics.* Moscow, Nauka Publ. (1972). (In Russian)

20. Babadzhanyants L. K., Golubeva N. I., Novoselov V. S. Optimal damping of fast linear oscillations of a stationary artificial satellite with a flywheel. *Problems of mechanics of controlled motion: Interuniversity collection of scientific works* **3**, 18–25. Perm, Perm University (1973). (In Russian)

21. Babadzhanyants L. K., Golubeva N. I., Novoselov V. S. Optimal damping of fast linear oscillations of a stationary artificial satellite with a flywheel. *Problems of mechanics of controlled motion: interuniversity collection of scientific works* **3**, 26–32. Perm, Perm University (1973). (In Russian)

22. Okhotsimsky D. E., Sarychev V. A. System of gravitational stabilization of artificial satellites. *Artificial satellites of the Earth* **16**, 5–9, Moscow, USSR Academy of Sciences Publ. (1963). (In Russian)

23. Kuznetsov L. I. On the stability of a flexible satellite. *Applied Mechanics* **1**, 55–71. Leningrad, Leningrad University Press (1974). (In Russian)

24. Kuznetsov L. I. On the assessment of the fundamental frequency of vibrations of a rod with variable cross-section. *Research on elasticity and plasticity* **4**, 166–169. Leningrad, Leningrad University Press (1965). (In Russian)

25. Kuznetsov L. I. On the using the method of successive approximations to find the first natural frequency of vibration of the rod. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 81–85 (1966). (In Russian)

26. Kuznetsov L. I. On the combination of the reduction method with the method of successive approximations in the problem of forced vibrations of a rod with variable cross-section. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4**, 83–87 (1967). (In Russian)

27. Bukharinov G. N., Kuznetsov L. I., Tikhonov A. A. On the influence of temperature deformations of a rod on the plane motion of a rigid body connected to it. *Applied Mechanics.* **1**, 45–54 (1974). (In Russian)

28. Kuznetsov L. I. Bending vibrations of the satellite stabilizer during extension. *Applied Mechanics* **1**, 72–78 (1974). (In Russian)

29. Kuznetsov L. I. Bending vibrations of the antenna in the mode of rotational motion of the satellite. *Applied Mechanics* **2**, 47–55. (1975). (In Russian)

30. Kuznetsov L. I. Plane motion of a satellite with a magnetic damper. *Problems of mechanics of controlled motion: interuniversity collection of scientific works* **2**, 95–99. Perm, Perm University (1973). (In Russian)

31. Novoselov V. S. Deviation of the axis of the magnetic damper of a circular satellite from the force line. *Problems of mechanics of controlled motion: interuniversity collection of scientific works* **6**, 83–87 (1974). (In Russian)

32. Kuznetsov L. I. On the motion of a satellite with a magnetic damper. *Applied Mechanics* **3**, 141–146. (1977). (In Russian)

33. Romanyuk I. I. Plane oscillations of a rigid body in an elliptical orbit. *Vestnik of Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **13**, 126–135 (1971). (In Russian)

34. Romanyuk I. I. Rotational motions of a rigid body with a damper in a weakly elliptical orbit. *Applied Mechanics* **1**, 95–99 (1973). (In Russian)

35. Romanyuk I. I. Small spatial vibrations of a rigid body with a damper in a polar weakly elliptical orbit. *Applied Mechanics* **1**, 88–94 (1973). (In Russian)

36. Novoselov V. S. On the asymptotic theory of the magnetic stabilizer of an artificial satellite. Problems of mechanics of controlled motion. *Nonlinear dynamic systems: Interuniversity collection of scientific works* **14**, 141–144 (1982). (In Russian)

37. Kuznetsov L. I., Pasynkov V. E. Dynamics of artificial satellites with hysteresis rods. *Applied Mechanics* **3**, 130–141 (1977). (In Russian)

38. Kuznetsov L. I., Nerovnaya V. S. Plane motion of a satellite with a toroidal cavity filled with a viscous incompressible fluid. *Applied Mechanics* **2**, 55–61 (1975). (In Russian)

39. Bulovatsky V. K. Small spatial oscillations of a satellite with liquid. *Applied Mechanics* **3**, 146–153 (1977). (In Russian)

40. Bulovatsky V. K. Plane attitude motion of a satellite with a toroidal cavity filled with a viscous incompressible fluid. *Applied Mechanics* **3**, 153–156 (1977). (In Russian)

41. Romasheva L. N., Kuznetsov L. I. On the issue of oscillations of a magnetized satellite. *Applied Mechanics* **2**, 43–47 (1975). (In Russian)

42. Kuznetsova T. I., Kuznetsov L. I. On oscillations of a magnetized satellite with a float damper. *Applied Mechanics* **4**, 21–26 (1979). (In Russian)

43. Kuznetsov L. I. On the motion of a satellite with a magnetic damper. *Applied Mechanics* **3**, 141–146 (1977). (In Russian)

44. Kuznetsov L. I., Pasynkov V. E., Tovstik P. E. On the plane motion of an artificial Earth satellite. *Applied Mechanics* **1**, 32–44 (1974). (In Russian)

45. Kuznetsova T. I. Spatial motion of a satellite with a hysteresis damper in the preliminary orientation mode. *Applied Mechanics* **6**, 31–35 (1984). (In Russian)

Received: January 15, 2024
Revised: February 20, 2024
Accepted: February 22, 2024

Author's information:

Aleksey A. Tikhonov — a.tikhonov@spbu.ru