УДК 515.162.8, 519.17
MSC 57M15

Дисково-ленточные графы в теории оснащенных тенглов

В. М. Нежинский[1,2], *М. В. Петров*[2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
[2] Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
Российская Федерация, 191186, Санкт-Петербург, наб. р. Мойки, 48

Для цитирования: *Нежинский В. М., Петров М. В.* Дисково-ленточные графы в теории оснащенных тенглов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 489–494.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.305

Дисково-ленточным графом называется гладкое компактное двумерное многообразие с краем, разбитое на ручки, разбиение содержит только ручки индексов нуль и один и имитирует структуру графа. (Ручки индексов нуль — аналоги вершин графа, ручки индексов один — ребер графа.) Дисково-ленточный граф называется пространственным, если он является гладким подмногообразием трехмерного евклидова пространства. Под тенглом обычно понимают гладкое компактное одномерное подмногообразие стандартного трехмерного шара, пересекающее край шара ортогонально, только по своему краю, пересечение содержится в экваторе. Назовем тенгл оснащенным, если он оснащен гладким полем нормальных прямых. Хорошо известно, что задача изотопической классификации пространственных дисково-ленточных графов допускает редукцию к задаче изотопической классификации оснащенных тенглов. Эта работа посвящена применению (абстрактных) дисково-ленточных графов к изучению множества изотопических классов оснащенных тенглов.

Ключевые слова: дисково-ленточный граф, диаграмма, тенгл, трансформер, изотопия.

1. Формулировка фундаментальной проблемы. *Тенглом* называется гладкое компактное одномерное подмногообразие стандартного замкнутого трехмерного шара, каждая компонента подмногообразия диффеоморфна отрезку $[0,1]$, пересекает край шара только по своему краю, пересекает ортогонально, все пересечения содержатся в экваторе ограничивающей шар сферы. На протяжении всей статьи мы считаем, что *в экваторе сферы, ограничивающей шар, фиксирована точка и что все рассматриваемые в статье тенглы эту точку не содержат.* Назовем тенгл *оснащенным*, если он оснащен в шаре гладким полем нормальных к нему прямых, совпадающих в точках пересечения тенгла с экватором с касательными к экватору.

Два оснащенных тенгла называются *изотопными*, если существует гладкая изотопия трехмерного шара, переводящая отмеченную точку в себя, первый тенгл во второй, поле нормалей к первому тенглу в поле нормалей ко второму, в процессе изотопии сфера, ограничивающая шар, отображается в себя и экватор сферы отображается в себя, поле нормалей — в поле нормалей, в точках пересечения тенглов с экватором нормали остаются касательными к экватору.

Фундаментальной проблемой теории тенглов является проблема классификации оснащенных тенглов с точностью до изотопии.

2. Цель работы. Основная цель настоящей работы — применить, насколько окажется возможным, дисково-ленточные графы к изучению свойств множества изотопических классов тенглов.

3. Краткое содержание работы. Сначала мы сведем проблему изотопической классификации оснащенных тенглов к проблемам изотопических классификаций оснащенных тенглов специальных типов, а затем, опираясь на элементарную теорию дисково-ленточных тенглов, установим содержательные связи совокупностей классов оснащенных тенглов фиксированных типов между собой.

4. Результаты. ***4.1. Редукция фундаментальной проблемы к специальным проблемам.*** *4.1.1. Множество* $\tau(n)$. В этом подразделе мы будем считать фиксированными: (стандартный) замкнутый трехмерный шар; окружность, являющуюся экватором ограничивающей шар сферы; точку на экваторе. Мы будем считать, что шар и экватор снабжены стандартными ориентациями и что сфера ориентирована как край ориентированного стандартного шара.

Пусть n — целое неотрицательное число. Рассмотрим множество всех n-компонентных оснащенных тенглов и разобьем его на изотопические классы. Полученное множество классов мы и обозначаем через $\tau(n)$.

Ясно, что для решения проблемы из раздела 1 достаточно вычислить для каждого целого неотрицательного числа n множество $\tau(n)$. Заметим, что при $n = 0$ это множество состоит из одного элемента, так что проблемы, собственно, нет, и что при $n = 1$ имеется очевидная редукция проблемы к (классической) проблеме изотопической классификации узлов.

4.1.2. Множество $\delta(n)$. В этом подразделе мы будем считать выбранными и фиксированными стандартную ориентированную окружность и точку в ней.

Рассмотрим топологическое пространство, полученное приклеиванием к стандартной окружности конечного числа замкнутых прямоугольников по их боковым сторонам, отмеченная точка лежит вне множеств склеек. Назовем это пространство *диаграммой*, если и окружность, и приклеенные прямоугольники снабжены стандартными гладкими структурами и пересечения прямоугольников с окружностью являются гладкими подмногообразиями окружности; окружность и приклеенные прямоугольники мы будем называть *рамкой диаграммы* и *лентами диаграммы* соответственно.

Назовем две диаграммы *строго гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм первой диаграммы на вторую, сокращение которого на рамки диаграмм является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом, сужение на каждую ленту тоже является диффеоморфизмом, который отображает отмеченную точку первой диаграммы в отмеченную точку второй диаграммы. Ясно, что *отношение строгой гомеоморфности есть отношение эквивалентности.*

Пусть n — целое неотрицательное число. Рассмотрим множество всех диаграмм с n лентами и разобьем его на классы строго гомеоморфных диаграмм. Через $\delta(n)$ мы будем обозначать множество этих классов.

4.1.3. Сюръекция $\pi(n)$. Определим отображение

$$\pi(n) : \tau(n) \to \delta(n)$$

следующим правилом. Пусть $T \in \tau(n)$. Возьмем какой-нибудь представитель t класса T. Рассмотрим замкнутую трубчатую окрестность подмногообразия t стандартного трехмерного шара. Эта окрестность обладает структурой векторного расслоения над многообразием t со слоем круг. Рассмотрим одномерное подрасслоение этого расслоения, ассоциированное с полем нормалей оснащения тенгла t со слоем отрезок. Легко видеть, что тотальное пространство этого подрасслоения, объединенное с экватором ограничивающей шар двумерной сферы, обладает структурой диаграммы. Класс этой диаграммы и есть $\pi(n)(T)$.

Что это определение корректно и что отображение $\pi(n)$ является сюръекцией — очевидно.

4.1.4. Множества $\tau(n, D)$. Для любого целого неотрицательного числа n и любого элемента $D \in \delta(n)$ положим

$$\tau(n, D) = (\pi(n))^{-1}(D).$$

Заметим, что это множество ни для какой пары (n, D) не пусто, поскольку отображение $\pi(n)$ сюръективно.

4.1.5. Вывод. Проблема вычисления множества изотопических классов оснащенных тенглов сведена к проблеме вычисления множеств $\tau(n, D)$ для любых целых неотрицательных чисел n и любых элементов $D \in \delta(n)$.

4.2. Материал из [1], нужный для пункта 4.3. Гладкое компактное двумерное многообразие с краем называется *дисково-ленточным графом*, если задано разбиение его на ручки, обладающее следующими свойствами: число ручек конечно; все ручки являются только ручками индексов или нуль (то есть «дисками»), или один (то есть «лентами»); ручки индекса нуль попарно не пересекаются, ручки индекса один попарно не пересекаются, ручки разных индексов пересекаются только по своим краям, при этом каждая ручка индекса один пересекается с объединением всех ручек индекса нуль по двум попарно непересекающимся дугам. Это многообразие называется *носителем дисково-ленточного графа*, ручки индексов нуль — *вершинами*, ручки индексов один — *ребрами*. В этой работе мы ограничиваемся рассмотрением только дисково-ленточных графов, носители которых связны, и это, как правило, оговаривать не будем. Дисково-ленточный граф называется *оснащенным*, если выбраны и фиксированы: вершина графа; ориентация этой вершины; точка на крае этой вершины, не принадлежащая никаким ребрам дисково-ленточного графа.

Дисково-ленточный граф называется *деревом*, если его носитель односвязен. Ясно, что если оснащенный дисково-ленточный граф является деревом, то его носитель ориентируем и сверх того ориентирован: его ориентация расширяет ориентацию с ориентации фиксированной вершины. Эту ориентацию носителя мы будем называть *стандартной. Подграфом* дисково-ленточного графа называется граф, состоящий из каких-нибудь его (целых) ручек. Подграф дисково-ленточного графа называется *остовом*, если он является деревом и содержит все вершины графа. Ясно, что если дисково-ленточный граф оснащен, то оснащен и любой его остов: вершина графа, ее ориентация и отмеченная точка наследуются от графа. В дальнейшем мы будем считать любой остов оснащенного дисково-ленточного графа снабженным стандартной ориентацией.

Пусть дан дисково-ленточный граф и фиксирован какой-нибудь его остов. Рассмотрим дополнение к внутренности остова. Нетрудно видеть, что это дополнение является объединением связного замкнутого одномерного многообразия и лент, подклеенных к нему своими боковыми сторонами, и что эти многообразие и ленты обладают гладкими структурами, наследуемыми ими от дисково-ленточного графа. Это подпространство, снабженное разбиением, состоящим из упомянутых выше одномерного многообразия и лент, каждое из которых, в свою очередь, снабжено упомянутыми выше гладкими структурами, мы будем называть *остатком (ассоциированным с выбранным остовом)*. Одномерное многообразие разбиения мы будем называть *рамкой остатка*. Назовем остаток дисково-ленточного графа с фиксированным остовом *оснащенным*, если выбраны и фиксированы: ориентация рамки остатка; точка, содержащаяся в рамке остатка и не содержащаяся ни в каких ребрах дисково-ленточного графа. Ясно, что *оснащение дисково-ленточного графа определяет оснащение любого его остатка: рамку остатка ориентируем как край стандартно ориентированного ассоциированного с этим остатком остова; искомая точка — та же, что и у графа.*

Нетрудно видеть, что *для любого оснащенного остатка существует диаграмма и гомеоморфизм оснащенного остатка на эту диаграмму, такие что: гомеоморфизм отображает отмеченную точку остатка в отмеченную точку диаграммы; сокращение гомеоморфизма на рамку остатка является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом рамки остова на рамку диаграммы; сокращение гомеоморфизма на каждую ленту остатка является диффеоморфизмом.* Эту диаграмму мы будем называть *диаграммой, ассоциированной с оснащенным остатком.*

Несложная прямая проверка показывает, что *если две диаграммы ассоциированы с одним остатком, то они строго гомеоморфны и, если фиксированные точки на рамках совпадают, то соответствующие гомеоморфизмы оснащенного остатка на эти диаграммы изотопны, изотопия оставляет неподвижными фиксированные на рамках точки и является гладкой как на лентах, так и на рамках.*

Пару, составленную из дисково-ленточного графа и упорядоченной пары его (не обязательно различных) остовов, мы будем называть *трансформером, переводящим остаток первого остова в остаток второго*; этот дисково-ленточный граф мы будем называть *базой* трансформера. Назовем трансформер *оснащенным*, если его база оснащена.

Две диаграммы называются *близнецами*, если существует трансформер, остаток первого остова которого ассоциирован с первой диаграммой, остаток второго остова ассоциирован со второй диаграммой. Заметим, что *если какие-нибудь диаграммы являются близнецами, то и любые строго эквивалентные им диаграммы тоже являются близнецами.* Назовем два класса строго эквивалентных диаграмм *близнецами*, если какие-нибудь (а, значит, и любые) представители этих классов являются близнецами.

4.3. Основная конструкция. Пусть n — целое неотрицательное число и пусть классы D_1 и D_2 ($\in \delta(n)$) являются близнецами. Возьмем какие-нибудь диаграммы d_1 и d_2 из классов D_1 и D_2 соответственно; пусть g — оснащенный трансформер, такой, что диаграмма d_1 ассоциирована с оснащенным остатком его первого остова и что диаграмма d_2 ассоциирована с оснащенным остатком его второго остова. Определим отображение

$$g_* : \tau(n, D_1) \to \tau(n, D_2)$$

следующим образом. Пусть $T \in \tau(n, D_1)$. Возьмем какой-нибудь оснащенный тенгл t из класса T. Рассмотрим замкнутую трубчатую окрестность подмногообразия t

стандартного трехмерного шара. Эта окрестность обладает структурой векторного расслоения над многообразием t со слоем круг. Рассмотрим одномерное подрасслоение этого расслоения, ассоциированное с полем нормалей оснащения тенгла t со слоем отрезок. Приклеим к паре (стандартный шар, тотальное пространство этого подрасслоения) пару, состоящую из еще одного экземпляра стандартного трехмерного шара и двумерного круга, являющегося его экваториальным сечением, так чтобы граничная сфера первого шара отождествилась с граничной сферой второго шара по стандартному гомеоморфизму, экватор первой сферы отождествился с экватором второй. Получим трехмерную сферу и ее двумерное подмногообразие с краем. Обозначим это подмногообразие через v. Заметим, что, как нетрудно видеть, подмногообразие v диффеоморфно носителю базы трансформера g и что в наследство от тенгла t оно получило отмеченную точку. Более того, существует диффеоморфизм носителя базы трансформера g на подмногообразие v, отображающий с сохранением ориентаций первый остов трансформера g на упомянутый выше двумерный круг, отмеченную точку оснащения трансформера в отмеченную точку подмногообразия v. Снабдим подмногообразие v структурой дисково-ленточного графа, перенося дисково-ленточную структуру с трансформера g на подмногообразие v посредством этого диффеоморфизма. Заметим, что, как нетрудно видеть, этим дисково-ленточная структура на v будет определена с точностью до изотопии. Далее, возьмем второй остов трансформера и рассмотрим его образ при том же диффеоморфизме; мы получим (вообще говоря, еще один) остов дисково-ленточного графа v. Произотопируем его в объемлющей сфере в стандартный диск; что это можно сделать, следует, например, из леммы 1 статьи [2]. Выбросим из трехмерной сферы открытый шар, пересекающий дисково-ленточный граф v ортогонально и только по этому открытому диску, отождествим построенное трехмерное многообразие со стандартным замкнутым шаром и рассмотрим тенгл, состоящий из средних линий лент остатка дисково-ленточного графа, оснащенных полями прямых, их касающихся и ортогональных к их средним линиям. Класс этого тенгла и есть $g_*(T)$. (Что число компонент этого тенгла равно n — очевидно.)

Теорема. *Отображение g_* определено корректно и является биекцией.*

Первое следует из леммы 5 статьи [2] (являющейся прямым аналогом леммы 4.1.2 статьи [3]). Для доказательства второго достаточно заметить, что обратным к отображению g_* является отображение, индуцированное оснащенным трансформером, получаемым из g перенумерацией его остовов.

Литература

1. Нежинский В. М. Родственные диаграммы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 4, 713–719 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.408

2. Нежинский В. М. Изотопические инварианты пространственных графов. *Сибирские электронные математические известия* **17**, 769–776 (2020). https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.055

3. Нежинский В. М. Пространственные графы, тенглы и плоские деревья. *Алгебра и анализ* **31** (6), 197–207 (2019).

Статья поступила в редакцию 28 января 2024 г.;
доработана 15 февраля 2024 г.;
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

Контактная информация:

Нежинский Владимир Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.nezhinskij@spbu.ru
Петров Максим Викторович — ассистент, аспирант; tkuik@mail.ru

Disk-band graphs in the theory of framed tangles

V. M. Nezhinskij[1,2], *M. V. Petrov*[2]

[1] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
[2] The Herzen State Pedagogical University of Russia,
48, nab. r. Moyki, St. Petersburg, 191186, Russian Federation

For citation: Nezhinskij V. M., Petrov M. V. Disk-band graphs in the theory of framed tangles. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 489–494. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.305 (In Russian)

A disk-band graph is a smooth compact two-dimensional manifold with boundary, partitioned into handles; the partition contains only index zero and index one handles and imitates the structure of the graph. (Index zero handles are analogues of the vertices of the graph, index one handles are analogues of the graph edges.) A disk-band graph is called spatial if it is a smooth submanifold of three-dimensional Euclidean space. A tangle is usually understood as a smooth compact one-dimensional submanifold of the standard three-dimensional ball that intersects the boundary of the ball orthogonally, only along its boundary, the intersection is contained in the equator. We call a tangle framed if it is equipped with a smooth field of normal straight lines. It is well known that there is a reduction of the problem of isotopic classification of spatial disk-band graphs to the problem of isotopic classification of framed tangles. This work focuses on the application of (abstract) disk-band graphs to study the set of isotopic classes of framed tangles.

Keywords: disk-band graph, diagram, tangle, transformer, isotopy.

References

1. Nezhinskij V. M. Kindred diagrams. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 4, 713–719 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.408 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 4 (2023), 521–525. https://doi.org/10.1134/S106345412304012X].

2. Nezhinskij V. M. Isotopy invariants of spatial graphs. *Siberian Electronic Mathematical Reports* **17**, 769–776 (2020). (In Russian)

3. Nezhinskij V. M. Spatial graphs, tangles and plane trees. *St Petersburg Math. J.* **31** (6), 1055–1063 (2020). https://doi.org/10.1090/spmj/1 (In Russian)

Received: January 28, 2024
Revised: February 15, 2024
Accepted: February 22, 2024

Authors' information:

Vladimir M. Nezhinskij — v.nezhinskij@spbu.ru
Maxim V. Petrov — tkuik@mail.ru