

## Об устойчивости метода «Анализ сингулярного спектра» для длинных временных рядов\*

*В. В. Некруткин*

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

**Для цитирования:** *Некруткин В. В.* Об устойчивости метода «Анализ сингулярного спектра» для длинных временных рядов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 495–507.  
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.306>

Настоящая статья посвящена теоретическому исследованию устойчивости метода «Анализ сингулярного спектра» (АСС) при условии, что длина временного ряда  $N$  стремится к бесконечности. Последнее условие отличает ее от довольно многочисленных работ по устойчивости АСС. При этом использовался тот вариант метода АСС, который предназначен для выделения сигнала из суммы сигнала и помехи. Поэтому, рассматривая в качестве помехи ряд, соответствующий имеющимся выбросам, удается получать равномерные оценки ошибок аппроксимации сигнала при больших  $N$ . Если такие оценки стремятся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , то метод является устойчивым. Несколько примеров такого подхода для конкретных сигналов и выбросов включены в работу, некоторые из них проиллюстрированы с помощью компьютерных экспериментов.

*Ключевые слова:* обработка сигналов, «Анализ сингулярного спектра», выбросы, устойчивость, асимптотический анализ.

**1. Введение.** В статье рассматриваются теоретические вопросы устойчивости метода «Анализ сингулярного спектра» (АСС) при условии, что длина временного ряда  $N$  стремится к бесконечности. Сразу же заметим, что именно условие  $N \rightarrow \infty$  отличает ее от довольно многочисленных работ по устойчивости АСС (см., например, [1] или [2, § 3.12]).

При этом использовался вариант метода АСС, предназначенный для выделения сигнала из суммы сигнала и помехи.

Поэтому, рассматривая в качестве помехи ряд, соответствующий имеющимся выбросам и применяя технику, развитую в [3, § 5.3], удается получать равномерные оценки ошибок аппроксимации сигнала при больших  $N$ . Если эти величины стремятся к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , то метод является устойчивым.

В разделе 2.1 описан используемый вариант метода АСС, а в разделе 2.2 — способ оценки ошибок аппроксимации с некоторыми ограничениями на вид сигналов.

Раздел 3 посвящен собственно выбросам — там даются нужные определения, а также необходимая теория, посвященная так называемым единичным выбросам (см. раздел 3.1). В разделе 3.2 эта теория применяется к нескольким конкрет-

---

\*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00222).  
© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

ным сигналам, а в разделе 3.3 помещены соображения по поводу множественных выбросов.

Наконец, в раздел 4 вошли вычислительные эксперименты, подтверждающие и уточняющие некоторые доказанные теоретические факты.

**2. Общие соображения. 2.1. Метод АСС.** Остановимся сначала на том варианте метода «Анализ сингулярного спектра», который используется в настоящей работе, общее описание этого метода можно найти в [4] или [5].

Рассматривается вещественный «сигнал»  $F = (f_0, \dots, f_n, \dots)$ , причем предполагается, что ряд  $F$  управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка  $d$

$$f_n = \sum_{k=1}^d a_k f_{n-k}, \quad n \geq d, \quad (1)$$

которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом  $F$ .

Кроме того, вводится «помеха»  $E = (e_0, \dots, e_n, \dots)$  и предполагается, что наблюдается ряд  $X_N = F_N + \delta E_N$ , где  $F_N$  и  $E_N$  — согласованные отрезки длины  $N$  сигнала и помехи, а  $\delta$  является параметром возмущения. Иначе говоря,

$$F_N = (f_0, \dots, f_{N-1}), \quad E_N = (e_0, \dots, e_{N-1}) \quad \text{и} \quad X_N = (f_0 + \delta e_0, \dots, f_{N-1} + \delta e_{N-1}).$$

Общая задача состоит в (приближенном) выделении сигнала  $F_N$  из суммы  $X_N$ , причем предполагается, что известно только значение порядка  $d$  ЛРФ (1).

**Описание метода АСС.** Метод АСС в этом случае выглядит следующим образом.

1. Выбирается длина окна  $L < N$  и из ряда  $X_N$  строится ганкелева траекторная матрица  $\mathbf{H}(\delta)$  размерности  $L \times K$ ,  $K = N - L + 1$ , с элементами  $\mathbf{H}(\delta)[ij] = x_{i+j-2}$ ,  $1 \leq i \leq L$ ,  $1 \leq j \leq K$ . При этом предполагается, что  $\min(L, K) \geq d$ . В [4] эта операция называется *вложением*.

Если обозначить  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  как ганкелевы матрицы, полученные из рядов  $F_N$  и  $E_N$  операцией вложения с той же длиной окна  $L$ , то, конечно,  $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$ .

2. Матрица  $\mathbf{H}(\delta)$  подвергается сингулярному разложению и суммируются  $d$  главных (т.е. соответствующих наибольшему сингулярным числам) элементарных матриц этого разложения. Результат этой операции обозначается  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ .

3. Ищется ганкелева матрица  $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$ , которая является ближайшей к  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$  в норме Фробениуса. В явном виде это означает, что на каждой побочной диагонали  $i + j = \text{const}$  все элементы матрицы  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$  заменяются их средним значением. Поэтому в [4] эта операция названа *диагональным усреднением*. Обозначая ее  $\mathcal{S}$ , получим  $\hat{\mathbf{H}}(\delta) = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ .

4. Наконец, применяя к  $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$  операцию, обратную к операции вложения, приходим к *восстановленному* ряду  $F_N(\delta) = (f_0(\delta), \dots, f_{N-1}(\delta))$ , который объявляется приближением к сигналу  $F_N$ .

Естественно назвать ряд  $R_N(\delta) = (r_0(\delta), \dots, r_{N-1}(\delta))$  с  $r_i(\delta) = f_i(\delta) - f_i$  *рядом ошибок восстановления*. В [3, § 5.3] предложена общая схема асимптотического анализа ошибок восстановления. Приведем ее краткое описание.

**2.2. Подход к анализу ошибок восстановления.** Прежде всего нас будет интересовать равномерная сходимостъ остатков  $r_i(\delta)$  к нулю, т. е. поведение нормы  $\|F_N(\delta) - F_N\|_{\max} = \max_{0 \leq i < N} |r_i(\delta)|$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Далее, если  $U_0^\perp$  — линейное пространство, порожденное столбцами матрицы  $\mathbf{H}$ , то из (1) следует, что при  $L, K \geq d$  размерность  $U_0^\perp$  равна  $d$ .

Пусть  $\mathbf{P}_0^\perp$  — ортогональный проектор на линейное пространство  $U_0^\perp$ , а  $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$  — ортогональный проектор на линейное пространство, порожденное столбцами матрицы  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ . Тогда, как показано в [3, § 5.3],

$$\tilde{\mathbf{H}}(\delta) - \mathbf{H} = (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}. \quad (2)$$

В настоящей работе, следуя [3], использованы две матричные нормы. Для матрицы  $\mathbf{A}$  размера  $L \times K$  спектральная норма  $\|\mathbf{A}\|$  определяется как максимальное сингулярное число этой матрицы, а равномерная норма  $\|\mathbf{A}\|_{\max}$  — как максимум из модулей элементов  $\mathbf{A}$ . Соотношение между этими нормами хорошо известно, согласно [6, § 2.3.2]:

$$\|\mathbf{A}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\| \leq \sqrt{LK}\|\mathbf{A}\|_{\max}. \quad (3)$$

Поскольку  $\|\mathbf{SA}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\|_{\max}$ , то мы получаем, что

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(\delta)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}. \quad (4)$$

Неравенство (4) используется следующим образом. Выбирается некоторый оператор  $\mathbf{N} : \mathbb{R}^L \mapsto \mathbb{R}^L$ , и равенство (2) переписывается в виде

$$\tilde{\mathbf{H}}(\delta) - \mathbf{H} = (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E} + \mathbf{NH}(\delta).$$

Если при этом оказывается, что при  $N \rightarrow \infty$

$$\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\| \|\mathbf{H}(\delta)\| \rightarrow 0,$$

то остается [см. (3)] проверить асимптотическое поведение элементов конкретной (хотя, возможно, и сложно устроенной) остаточной матрицы  $\delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E} + \mathbf{NH}(\delta)$ .

В настоящей работе используется следующий вариант выбора оператора  $\mathbf{N}$ .

Обозначим соответственно  $\mu_{\max} = \|\mathbf{H}\|^2$  и  $\mu_{\min}$  — максимальное и минимальное положительные собственные числа матрицы  $\mathbf{HH}^T$ . Кроме того, пусть  $\mathbf{S}_0$  — псевдообратная матрица Мура — Пенроуза к матрице  $\mathbf{HH}^T$  с  $\|\mathbf{S}_0\| = 1/\mu_{\min}$ . Далее, положим

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\delta) &= \mathbf{H}(\delta)(\mathbf{H}(\delta))^T - \mathbf{HH}^T = \delta(\mathbf{HE}^T + \mathbf{EH}^T) + \delta^2\mathbf{EE}^T \quad \text{и} \\ \mathbf{W}_1(\delta) &= \mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0 = \\ &= \mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0 = \delta\mathbf{V}_0^{(1)} + \delta^2(\mathbf{P}_0\mathbf{EE}^T\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{EE}^T\mathbf{P}_0), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{V}_0^{(1)} = \mathbf{P}_0\mathbf{EH}^T\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{HE}^T\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0^\perp$ , а  $\mathbf{I}$  — единичная  $L \times L$  матрица.

Тогда имеет место следующее утверждение (см. [3, теорема 2.4]), которое выводится, используя классические результаты Т. Като [7, гл. 2 § 3].

**Теорема 1.** Пусть  $\delta_0 > 0$  и  $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} < 1/4$  для всех  $\delta \in [-\delta_0; \delta_0]$ . Тогда существует такая абсолютная постоянная  $C$ , что

$$\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta)\| \leq C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^2 \frac{1}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}}.$$

Тем самым мы приходим к следующему неравенству, выполняющемуся в условиях теоремы 1:

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(\delta)| \leq C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^2 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}} + \|\delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} + \mathbf{W}_1(\delta) \mathbf{H}(\delta)\|_{\max}.$$

Учитывая, что  $\mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{H} = \mathbf{Q}_0^\perp$ , где  $\mathbf{Q}_0^\perp$  — матрица ортогонального проектирования на пространство строк матрицы  $\mathbf{H}$ , запишем

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} + \mathbf{W}_1(\delta) \mathbf{H}(\delta) &= \delta (\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} + \mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{H}(\delta) + \mathbf{S}_0 \mathbf{H} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{H}(\delta)) + \\ &+ \delta^2 (\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0) \mathbf{H}(\delta) = \delta (\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} + \mathbf{E} \mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} \mathbf{Q}_0^\perp) + \\ &+ \delta^2 (\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{E} + \mathbf{S}_0 \mathbf{H} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{H}) + \delta^3 (\mathbf{S}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (5)$$

Тем самым мы получаем естественную оценку

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(\delta)| \leq J_1 + J_2 + J_3, \quad \text{где} \quad (6)$$

$$J_1 = C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^2 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}}, \quad (7)$$

$$J_2 = |\delta| \left( \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} + \mathbf{E} \mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} \mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} \right), \quad \text{и} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \delta^2 \left( \|\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|_{\max} + \|\mathbf{S}_0 \mathbf{H} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{E}\|_{\max} + \|\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{H}\|_{\max} \right) + \\ &+ |\delta|^3 \left( \|\mathbf{S}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{E}\|_{\max} + \|\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|_{\max} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Введем теперь дополнительные ограничения.

**Лемма 1.** Пусть  $N \rightarrow \infty$ ,  $\|\mathbf{E}\| \geq c = \text{const}$ . Если  $\mu_{\max}/\mu_{\min} \leq \varkappa = \text{const}$  и  $|\delta| \|\mathbf{E}\|/\|\mathbf{H}\| \rightarrow 0$ , то слагаемое  $J_1 + J_3$  в правой части (6) имеет вид  $O(\delta^2 \|\mathbf{E}\|^2/\|\mathbf{H}\|)$ .

**Доказательство.** Прежде всего,  $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} = O(|\delta| \|\mathbf{E}\|/\|\mathbf{H}\|)$  при  $N \rightarrow \infty$ . Действительно, поскольку  $\|\mathbf{B}(\delta)\| \leq 2|\delta| \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{E}\| + \delta^2 \|\mathbf{E}\|^2$ , а  $\mu_{\max} = \|\mathbf{H}\|^2$ , то

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} &\leq 2|\delta| \|\mathbf{E}\| \sqrt{\mu_{\max}}/\mu_{\min} + \delta^2 \|\mathbf{E}\|/\mu_{\min} \leq \\ &\leq 2|\delta| \|\mathbf{E}\|/\sqrt{\mu_{\max}} + \delta^2 \|\mathbf{E}\|^2 \varkappa/\mu_{\max} = O(|\delta| \|\mathbf{E}\|/\|\mathbf{H}\|). \end{aligned} \quad (10)$$

Тем самым условие теоремы 1 выполняется,  $1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} \rightarrow 1$ ,  $(\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min})^2 = O(|\delta|^2 \|\mathbf{E}\|^2/\|\mathbf{H}\|^2)$ , а  $\|\mathbf{H}(\delta)\| \sim \|\mathbf{H}\|$ . Нужное утверждение о  $J_1$  теперь следует из (7).

Поскольку  $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\| \leq \|\mathbf{S}_0\| \|\mathbf{E}\| = \|\mathbf{E}\|/\|\mathbf{H}\|^2$  и  $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{H}\| \leq \|\mathbf{S}_0\| \|\mathbf{H}\| = \|\mathbf{H}\|^{-1}$ , то, согласно (3),

- $\|\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|_{\max} \leq \|\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{E}\| \leq \|\mathbf{P}_0\| \|\mathbf{E}\| \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\| = \|\mathbf{E}\|^2/\|\mathbf{H}\|$ ,
- аналогично  $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{H} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{E}\|_{\max} \leq \|\mathbf{E}\|^2/\|\mathbf{H}\|$  и  $\|\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{H}\|_{\max} \leq \|\mathbf{E}\|^2/\|\mathbf{H}\|$ ,
- $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{E}\|_{\max} \leq \|\mathbf{S}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{E}\| \leq \|\mathbf{E}\|^2/\|\mathbf{H}\|^2$  и аналогично
- $\|\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|_{\max} \leq \|\mathbf{E}\|^2/\|\mathbf{H}\|^2$ .

Поэтому  $J_3 = O(\delta^2 \|\mathbf{E}\|^2/\|\mathbf{H}\|) + O(|\delta|^3 \|\mathbf{E}\|^2/\|\mathbf{H}\|^2)$ . С учетом того, что  $\|\mathbf{E}\|$  отделена от нуля и  $|\delta| \|\mathbf{E}\|/\|\mathbf{H}\| \rightarrow 0$ , получаем нужное утверждение о  $J_3$ .  $\square$

**Замечание 1.** Ограниченность отношения  $\mu_{\max}/\mu_{\min}$  выполняется, в частности, при  $d = 1$ , а также (при естественных условиях на размерность матрицы  $\mathbf{H}$ )

для полиномиальных сигналов и сигналов, являющихся линейной комбинацией различных гармоник (см., например, [3, лемма 3.1]).

**Замечание 2.** Нетрудно видеть, что если в лемме 1 условие  $|\delta| \|\mathbf{E}\| / \|\mathbf{H}\| \rightarrow 0$  заменить на  $|\delta| \Delta / \|\mathbf{H}\| \rightarrow 0$ , где  $\|\mathbf{E}\| \leq \Delta = \Delta_N$ , то окажется, что  $J_1 + J_3 = O(\delta^2 \Delta^2 / \|\mathbf{H}\|)$ .

**3. Устойчивость к выбросам.** В нашем случае задача стоит об устойчивости метода АСС по отношению к выбросам. Дадим соответствующие определения.

**Определение 1.** Рассмотрим при  $N \rightarrow \infty$  последовательность рядов

$$\mathbf{E}_N = (e_0^{(N)}, \dots, e_{N-1}^{(N)})$$

и обозначим  $\text{Re}(N)$  как множество ненулевых элементов ряда  $\mathbf{E}_N$ . Положим  $n(N) = \text{card}(\text{Re}(N))$ .

Для любого сигнала  $\mathbf{F}$  рассмотрим последовательность рядов  $\mathbf{X}_N = \mathbf{F}_N + \delta \mathbf{E}_N$ . Если  $n(N)/N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , то последовательность рядов  $\mathbf{E}_N$  будем называть асимптотически аддитивным выбросом по отношению к ряду  $\mathbf{F}$ , а величину  $|\delta| |e_i|$  — мощностью  $i$ -го элемента  $\mathbf{E}_N$  при  $i \in \text{Re}(N)$ .

Если  $n(N) = 1$  при любом  $N$ , то ряды  $\mathbf{E}_N$  будем называть единичным выбросом.

Обозначим  $r_i(\mathbf{E}_N, \delta)$  как ошибку восстановления ряда  $\mathbf{F}_N$  при аддитивном выбросе  $\mathbf{E}_N$ . В случае одиночного выброса с позицией  $M$  будем вместо  $r_i(\mathbf{E}_N, \delta)$  писать  $r_i(M, \delta)$ .

**Определение 2.** Будем называть метод АСС асимптотически устойчивым по отношению к выбросам  $\mathbf{E}_N$ , если  $\max_{0 \leq i < N} |r_i(\mathbf{E}_N, \delta)| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

**Замечание 3. 1.** Тем самым задача проверки устойчивости метода АСС по отношению к выбросам может решаться способом, описанным в разделе 2.1.

2. Здесь не предполагается постоянства формального параметра  $\delta$ . То есть считается возможным случай, когда  $|\delta| = |\delta(N)| \rightarrow \infty$  или  $|\delta| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . В частности, условие  $|\delta| \|\mathbf{E}\| / \|\mathbf{H}\| \rightarrow 0$  леммы 1 может выполняться не только при  $\|\mathbf{H}\| \rightarrow \infty$ , но и при ограниченной норме  $\|\mathbf{H}\|$  за счет  $\delta \rightarrow 0$ .

3. В данной постановке задача заполнения пропусков может быть формально сведена к задаче об устойчивости к выбросам. Действительно, если номера пропусков составляют множество  $\text{Im}(N)$ , а сами пропуски кодируются нулями, то для этого достаточно взять  $\text{Re}(N) = \text{Im}(N)$  и положить  $\delta e_i^{(N)} = -f_i(N)$  при  $i \in \text{Re}(N)$ .

**3.1. Единичный выброс.** Если  $\text{card}(\text{Re}(N)) = 1$ , то мы можем считать, что  $e_M = 1$  при  $M \in \text{Re}(N)$  и величина выброса равна  $\delta$ .

Пусть  $\mathbf{E}_{k,\ell}$  —  $L \times K$ - матрица с  $e_{k,\ell} = 1$  и остальными нулевыми членами,  $1 \leq k \leq L$ ,  $1 \leq \ell \leq K$ . Тогда  $\mathbf{E}_{k,\ell} = \mathbf{o}_k(L) \mathbf{o}_\ell^T(K)$ , где  $\mathbf{o}_j(k) \in \mathbb{R}^k$  —  $j$ -й орт в  $\mathbb{R}^k$ . Поэтому  $\|\mathbf{E}_{k,\ell}\| = 1$ .

Рассмотрим помеху вида  $\mathbf{E}_N = (e_0, \dots, e_{N-1})$ , где  $e_M = 1$  при  $0 \leq M \leq N-1$ , а остальные  $e_j = 0$ . Таким образом,  $M$  — это позиция единичного выброса, причем  $M = M(N)$ .

Пусть  $\mathbf{E}$  —  $L \times K$ -траекторная матрица ряда  $\mathbf{E}_N$ ,  $L \leq K$ . Тогда

$$\mathbf{E} = \sum_{k+\ell=M+2} \mathbf{E}_{k,\ell} = \sum_{k+\ell=M+2} \mathbf{o}_k(L) \mathbf{o}_\ell^T(K) = \sum_k \mathbf{o}_k(L) \mathbf{o}_{M+2-k}^T(K),$$

где

$$\sum_k = \begin{cases} \sum_{k=1}^{M+1} & \text{при } 0 \leq M < L - 1, \\ \sum_{k=1}^L & \text{при } L - 1 \leq M < K, \\ \sum_{k=M-K+2}^{N-K+1} & \text{при } K \leq M < N. \end{cases}$$

Как бы то ни было,  $\|\mathbf{E}\|_{\max} = \|\mathbf{E}\| = 1$  при любом поведении  $M$ .

Так как для единичного выброса  $\|\mathbf{E}\| = 1$ , то в условиях леммы 1  $J_1 + J_3 = O(|\delta|^2/\|\mathbf{H}\|)$ . Таким образом, если  $|\delta|^2/\|\mathbf{H}\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , то в условиях леммы 1 нам осталось разобраться с членом  $J_2$  в правой части (6).

Здесь будет полезна следующая оценка. Пусть  $\mathbf{G}^{(1)}$  — некоторая матрица размера  $L \times L$ , а  $\mathbf{G}^{(2)}$  — матрица размера  $K \times K$ .

**Лемма 2.** *Имеют место неравенства  $\|\mathbf{G}^{(1)}\mathbf{E}\|_{\max} \leq \|\mathbf{G}^{(1)}\|_{\max} u \|\mathbf{E}\mathbf{G}^{(2)}\|_{\max} \leq \|\mathbf{G}^{(2)}\|_{\max}$  для любого положения  $M$  единичного выброса.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Утверждение для  $\|\mathbf{G}^{(1)}\mathbf{E}\|_{\max}$  следует из того, что каждый ненулевой элемент матрицы  $\mathbf{G}^{(1)}\mathbf{E}$  совпадает с некоторым элементом матрицы  $\mathbf{G}^{(1)}$ . Точнее, обозначим  $G_i \in \mathbb{R}^L$   $i$ -й столбец матрицы  $\mathbf{G}^{(1)}$ . Далее, пусть  $\mathbf{G}_{ij} = [G_i : \dots : G_j]$  при  $1 \leq i, j \leq K$ . Тогда при  $L \leq K$

$$\mathbf{G}_1\mathbf{E} = \begin{cases} [\mathbf{G}_{M+1,1} : \mathbf{0}^{(L,K-M+1)}] & \text{при } 0 \leq M \leq L - 1, \\ [\mathbf{0}^{(L,M-2)} : \mathbf{G}_{L,1} : \mathbf{0}^{(L,K-L-M+2)}] & \text{при } L - 1 < M \leq K - 1, \\ [\mathbf{0}^{(L,M-2)} : \mathbf{G}_{L,K-M+2}] & \text{при } K - 1 < M \leq N - 1, \end{cases}$$

где  $\mathbf{0}^{(i,j)}$  — нулевая матрица размера  $i \times j$ . Поэтому

$$\|\mathbf{G}_1\mathbf{E}\|_{\max} = \begin{cases} \|\mathbf{G}_{M+1,1}\|_{\max} & \text{при } 0 \leq M < L - 1, \\ \|\mathbf{G}_{L,1}\|_{\max} & \text{при } L - 1 \leq M \leq K - 1, \\ \|\mathbf{G}_{L,K-M+2}\|_{\max} & \text{при } K - 1 < M \leq N - 1. \end{cases} \quad (11)$$

Отсюда сразу же следует утверждение леммы для  $\mathbf{G}_1\mathbf{E}$ . Для  $\mathbf{E}\mathbf{G}_2$  все аналогично.  $\square$

**3.2. Примеры. Единичный выброс.** Рассматривается вещественный сигнал  $F = (f_0, \dots, f_n, \dots)$ , причем предполагается, что ряд  $F$  управляется минимальной линейной рекуррентной формулой порядка  $d$ .

Помехой служит последовательность единичных выбросов  $E_N = (e_0, \dots, e_{N-1})$ , где  $e_M = 1$  при  $0 \leq M \leq N - 1$ , а остальные  $e_j = 0$ , так что  $M = M(N)$  — позиция единичного выброса в ряде помехи  $E_N$ . Как обычно, считаем, что  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 0.5]$ .

Пусть  $N \rightarrow \infty$ . Применением метод АСС к рядам  $X_N = F_N + \delta E_N$  с выбором  $d$  главных компонент. Кроме того, пусть  $r_i(M, \delta)$  — ошибка восстановления члена  $f_i$  ряда  $F_N$  при использовании помехи  $E_N$ .

**Теорема 2. 1.** Если  $|\delta| = o(a^{N/2})$ , то при  $M/N \rightarrow \beta$  для растущего экспоненциального сигнала  $f_n = a^n$  с  $a > 1$

$$\limsup_N \max_i r_i(M, \delta) \leq |\delta|(1 - a^{-2}) \begin{cases} a^{-(\alpha-\beta)N} + a^{-(1-\alpha-\beta)N} & \beta < \alpha, \\ 1 & \alpha \leq \beta < 1 - \alpha, \\ 2 & \beta \geq 1 - \alpha. \end{cases}$$

2. Если  $|\delta|/N \rightarrow 0$ , то для линейного сигнала  $f_n = \theta_1 n + \theta_0$  с  $\theta_1 \neq 0$

$$\max_M \max_i |r_i(M, \delta)| = O(|\delta|/N) \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (12)$$

3. Рассмотрим постоянный сигнал  $F$  с  $f_n = 1$ . Тогда

- если  $|\delta| \leq \delta_0$ , то  $\max_M \max_i |r_i(M, \delta)| = O(|\delta|/N)$ ;
  - если  $|\delta| \rightarrow \infty$  и  $\delta^2/N \rightarrow 0$ , то  $\max_M \max_i |r_i(M, \delta)| = O(\delta^2/N)$ .
4. Для сигнала

$$f_n = \sum_{i=1}^r f_{i,n}, \quad \text{где } f_{i,n} = b_i \cos(\omega_i n + \gamma_i) \quad (13)$$

с попарно различными частотами  $\omega_i \in (0, 1/2)$  и ненулевыми амплитудами  $|b_i|$

- если  $|\delta| \leq \delta_0$ , то  $\max_M \max_i |r_i(M, \delta)| = O(|\delta|/N)$ ;
- если  $|\delta| \rightarrow \infty$  и  $\delta^2/N \rightarrow 0$ , то  $\max_M \max_i |r_i(M, \delta)| = O(\delta^2/N)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Во всех случаях мы используем неравенство (6), а для оценивания величин  $J_1, J_2$  и  $J_3$  — результаты лемм 1 и 2, причем в последнем случае нам может оказаться полезным представление (11).

Иначе говоря, как следует из раздела 3.1, если  $\delta/\|\mathbf{H}\| \rightarrow 0$ , то

$$\max_i r_i(M, \delta) = O\left(\delta^2/\|\mathbf{H}\| + |\delta| \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} + \mathbf{E} \mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} \mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max}\right).$$

1. Для растущего экспоненциального сигнала  $d = 1$  с  $\|\mathbf{H}\| \asymp a^N$  и поэтому, так как  $|\delta|/a^N \rightarrow 0$ , то  $J_1 + J_3 = O(\delta^2 a^{-N})$ .

Поскольку при  $1 \leq i, j \leq L$

$$\mathbf{P}_0^\perp[i, j] = (a^2 - 1) \frac{a^{i+j-2}}{a^{2L} - 1},$$

то  $\|\mathbf{P}_0^\perp\|_{\max} \rightarrow \text{const} = 1 - a^{-2}$ . Поэтому для «худшего» расположения места  $M$  однократного выброса  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max}$  не стремится к нулю. Аналогично при  $1 \leq i, j \leq K$

$$\mathbf{Q}_0^\perp[i, j] = (a^2 - 1) \frac{a^{i+j-2}}{a^{2K} - 1},$$

и  $\max_M \|\mathbf{E} \mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max}$  не стремится к нулю. В то же время для конкретных расположений выброса это может быть не так. Пусть  $L \leq K$ ,  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1/2)$ . Тогда

$$\max_i \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}[i, j] = \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}[L, j] = (a^2 - 1) \frac{a^{L+j-2}}{a^{2L} - 1} = (1 - a^{-2}) \frac{a^j}{a^L - a^{-L}},$$

и поэтому из (11) следует, что  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} \sim (1 - a^{-2}) a^{-(\alpha-\beta)N}$  при  $M/N \rightarrow \beta < \alpha$ .

Если же  $M/N \rightarrow \beta \geq \alpha$ , то  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} \rightarrow 1 - a^{-2}$ .

Аналогично если  $M/N \rightarrow \beta < 1 - \alpha$ , то  $\|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} \sim (1 - a^{-2}) a^{-(1-\alpha-\beta)N}$ , а при  $M/N \rightarrow \beta \geq 1 - \alpha$ , то  $\|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} \rightarrow 1 - a^{-2}$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \min_M \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} &\geq \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{o}_1(L) \mathbf{o}_1(K)^T \mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} = \|\mathbf{P}_0^\perp(1) \mathbf{Q}_0^T(1)\|_{\max} = \\ &= (1 - a^{-2})^2 \frac{(a^{L-1} - 1)(a^{K-1} - 1)}{(a^{2L} - 1)(a^{2K} - 1)} \asymp O(a^{-N}). \end{aligned}$$

Отсюда сразу же следует, что при  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1/2]$  и  $M/N \rightarrow \beta$

$$\begin{aligned} J_2 &\leq |\delta| \left( \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} + \|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} - \min_M \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} \right) \sim \\ &\sim |\delta| (1 - a^{-2}) \begin{cases} a^{-(\alpha-\beta)N} + a^{-(1-\alpha-\beta)N} & \beta < \alpha, \\ 1 & \alpha \leq \beta < 1 - \alpha, \\ 2 & \beta \geq 1 - \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

□

2. Прежде всего, можно ограничиться случаем  $\theta_1 = 1$ .

Затем, согласно [3, лемма 3.1], если  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ , то  $\mu_{\max}/N^4 \rightarrow \Theta_{\max}$  и  $\mu_{\min}/N^4 \rightarrow \Theta_{\min}$  для некоторых  $\Theta_{\max} \geq \Theta_{\min} > 0$ .

Таким образом, поскольку  $\|\mathbf{E}\| = 1$ ,  $\|\mathbf{H}\| \asymp N^2$  при  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ , то из леммы 1 следует, что слагаемое  $J_1 + J_3$  в правой части (6) имеет порядок  $O(\delta^2 N^{-2}) = o(|\delta|/N)$ .

Докажем теперь, что имеет место равенство  $\max_M \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ .

Действительно, элементарные вычисления показывают, что при  $1 \leq i, j \leq L$

$$\begin{aligned} L\mathbf{P}_0^\perp[i, j] &= 1 + \frac{3(L-1)}{L+1} + \frac{12}{L^2-1} (i-1)(j-1) - \frac{6}{L+1} (i+j-2) = \\ &= 1 + \frac{3(L-1)}{L+1} - \frac{6}{L+1} \left( \left(1 - \frac{j-1}{L-1}\right) (i-1) + \left(1 - \frac{i-1}{L-1}\right) (j-1) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Отсюда сразу же следует, что  $\|\mathbf{P}_0^\perp\|_{\max} \leq 4/L$ . Ссылка на лемму 2 и на соотношение  $L/N \rightarrow \alpha$  заканчивает доказательство.

Совершенно аналогично  $\max_M \|\mathbf{Q}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ .

Далее, так как  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} \leq \|\mathbf{P}_0^\perp\|_{\max} L \|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} = O(N^{-1})$ , то равномерно по  $M$   $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} \leq \|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} + \|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} = O(N^{-1})$ . Следовательно,  $J_2 = O(|\delta|N^{-1})$ , и утверждение доказано.

3. В случае постоянного сигнала  $\mathbf{H} = \sqrt{LK}UV^T$ , где  $U \in \mathbb{R}^L$  и  $V \in \mathbb{R}^K$  — вектора со всеми одинаковыми координатами, равными соответственно  $1/\sqrt{L}$  и  $1/\sqrt{K}$ . Поэтому  $\|\mathbf{H}\| \sim \alpha(1 - \alpha)N$ .

Далее, в обоих случаях  $|\delta|/\|\mathbf{H}\| \rightarrow 0$ , поэтому  $J_1 + J_3 = O(\delta^2/\|\mathbf{H}\|) = O(\delta^2/N)$ .

Кроме того,  $\mathbf{P}_0^\perp = UU^T$  и  $\mathbf{Q}_0^\perp = VV^T$ , так что  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} \asymp \|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} \asymp N^{-1}$  и  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} = O(N^{-1})$ .

Поэтому  $\max_M |r_M(\delta)| = O(\delta^2/N) + O(|\delta|/N)$ , откуда и следует результат.

4. Как следует из [8], в этом случае  $d = 2r$ , а все величины  $\|\mathbf{H}\|$ ,  $\|\mathbf{P}_0^\perp\|_{\max}$  и  $\|\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max}$  имеют порядок убывания  $O(N^{-1})$ .

Поэтому результат такой же, как для постоянного сигнала. □

**Замечание 4.** Видно, что порядок сходимости  $O(|\delta|/N)$  в теореме полностью определяется первым (линейным относительно  $\delta$ ) членом в правой части (5). Это означает, что в данном случае использование линейного варианта теории возмущений (например, [9]) является корректным.

**3.3. О множественных выбросах.** Как и раньше, обозначим  $\text{Re}(N)$  как множество ненулевых элементов ряда  $E_N$  и положим  $\mathbf{n}(N) = \text{card}(\text{Re}(N))$ . Заметим, что

$$E_N = \sum_{j \in \text{Re}(N)} e_j^{(N)} E_j^{(N)} = \sum_{0 \leq j < N} e_j^{(N)} E_j^{(N)},$$

где  $E_j^{(N)}$  имеет единственный ненулевой элемент, равный 1, на позиции  $j$ . Тогда, если  $\mathbf{E}$  и  $E_j - L \times K$ -траекторные матрицы рядов  $E_N$  и  $E_j^{(N)}$ , то  $\mathbf{E} = \sum_{0 \leq j < N} e_j^{(N)} E_j$ . Поэтому, так как  $\|E_i\| = 1$ , то

$$\|\mathbf{E}\| \leq \sum_{j \in \text{Re}(N)} |e_j^{(N)}| \|E_i\| = \|E_N\|_1, \quad \text{где } \|E_N\|_1 = \sum_{0 \leq j < N} |e_j^{(N)}|.$$

Кроме того,  $\|\mathbf{E}\|_{\max} = \max_{j \in \text{Re}(N)} |e_j^{(N)}| = \|E_N\|_{\max}$ .

Собирая результаты леммы 1 и замечания 2 с  $\Delta = \|E_N\|_1$ , получим, что при условии  $\|E_N\|_1 > c = \text{const}$  и  $|\delta| \|E_N\|_1 / \|\mathbf{H}\| \rightarrow 0$  будем иметь  $J_1 + J_2 = \delta^2 \|E_N\|_1^2 / \|\mathbf{H}\|$ .

Посмотрим теперь, во что превратится лемма 2. Поскольку для произвольной  $L \times L$ -матрицы  $\|\mathbf{G}_1\|$

$$\mathbf{G}_1 \mathbf{E} = \sum_j e_j^{(N)} \mathbf{G}_1 E_j, \quad \text{а } \|\mathbf{G}_1 E_j\|_{\max} \leq \|\mathbf{G}_1\|_{\max}, \quad \text{то}$$

$$\|\mathbf{G}_1 \mathbf{E}\|_{\max} \leq \sum_j |e_j^{(N)}| \|\mathbf{G}_1\|_{\max} = \|E_N\|_1 \|\mathbf{G}_1\|_{\max}.$$

Аналогичное неравенство имеет место для  $\|\mathbf{E} \mathbf{G}_2\|_{\max}$ .

Отсюда, например, сразу же следует, что при условии  $\Theta = \sup_N \|E_N\|_1 < \infty$  все результаты теоремы 2 останутся в силе с заменой в правой части соответствующих неравенств  $|\delta|$  на  $|\delta| \Theta$ .

**Замечание 5.** Заметим, что условие  $\Theta < \infty$ , вообще говоря, относится не только к выбросам. Например, как следует из теоремы 2 и предыдущих рассуждений, для линейного сигнала и помехи  $E = (e_0, \dots, e_n, \dots)$  с  $\sum_i |e_i| < \infty$  при фиксированном  $\delta$  и  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$  будет выполняться соотношение  $\max_i |r_i(\delta)| = O(N^{-1})$ .

**4. Вычислительные эксперименты.** В этом разделе представлено несколько вариантов компьютерных экспериментов, призванных проиллюстрировать теоретические результаты раздела 3.

Рассматриваются три варианта сигнала  $f_n$ :

1. Экспоненциальный сигнал (EXP):  $f_n = a^n$ ,  $a = 1.01$ .
2. Линейный сигнал (LIN):  $f_n = an$ ,  $a = 1/3$ .
3. Гармонический сигнал (COS):  $f_n = \cos(2\pi\omega n)$  с  $\omega = \sqrt{2}/4$ .

Во всех экспериментах взято  $e_M = 1$  и  $L \approx N/2$ .

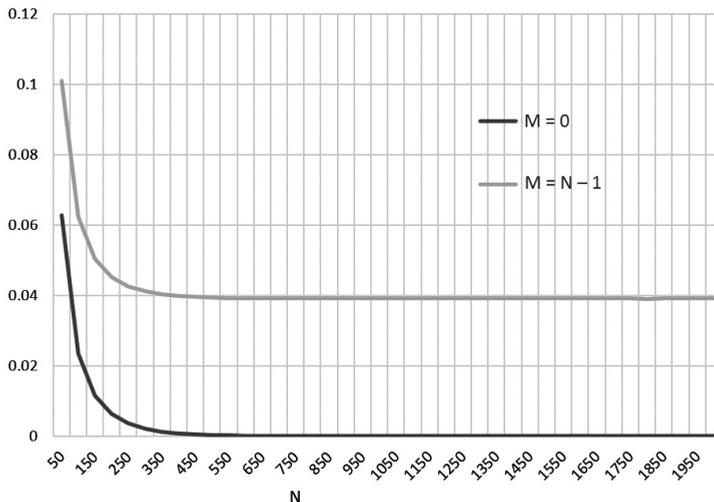


Рис. 1. Максимальные ошибки восстановления для двух положений единичного выброса как функции длины ряда  $N$  для сигнала EXP с  $\delta = 1$ .

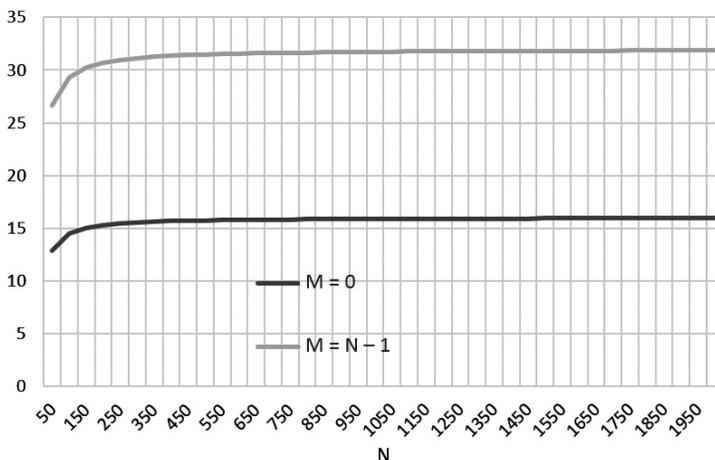


Рис. 2.  $N$ , умноженное на максимальные ошибки восстановления для двух положений ( $M = 0$  с  $\delta = 1$  и  $M = N - 1$  с  $\delta = 2$ ) единичного выброса как функции длины ряда  $N$  для сигнала LIN.

В первом пункте теоремы 2 утверждается, в частности, что для сигнала EXP при постоянном положении  $M$  единичного выброса метод АСС является асимптотически устойчивым, в то время как эту устойчивость не удастся получить для положения выброса в последней точке ряда.

Рис. 1 подтверждает обе эти оценки: при  $M = 0$  видно быстрое стремление максимальной ошибки восстановления к нулю, в то время как при  $M = N - 1$  такое стремление не наблюдается.

Из второго пункта теоремы 2 следует, что для линейного сигнала ошибки восстановления имеют вид  $O(N^{-1})$  вне зависимости от положения единичного выброса. Рис. 2 подтверждает этот теоретический результат.

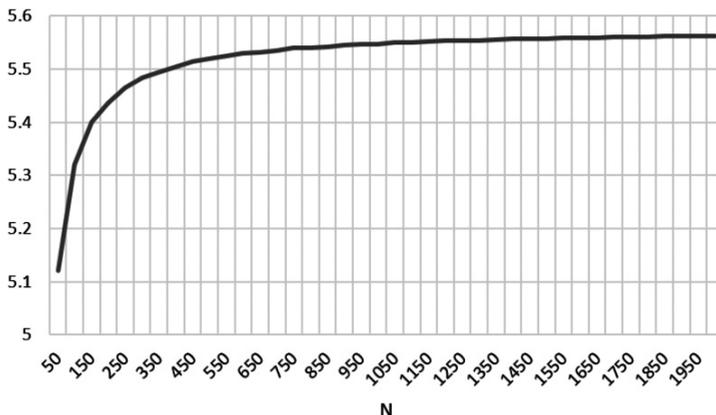


Рис. 3.  $N$ , умноженное на максимальные ошибки восстановления в случае двукратного выброса с  $e_0 = e_1 = 1$  как функция длины ряда  $N$  для сигнала COS.

Наконец, 4-й пункт теоремы 2 и рассуждения раздела 3.3 позволяют утверждать, что для сигнала COS в случае множественных выбросов равномерно ограниченной мощности с  $\text{card } \mathfrak{R}(N) < \text{const}$  все ошибки восстановления будут иметь порядок убывания  $O(N^{-1})$ . Рис. 3 с  $\mathfrak{R}(N) = \{0, 1\}$  и  $\delta = 1$  подтверждает этот вывод.

**5. Заключение.** Ограничимся для простоты случаем  $\delta = \text{const}$  и  $\|\mathbf{H}\| \rightarrow \infty$  при  $N \rightarrow \infty$ . Тогда из результатов статьи следует, что при условии ограниченности отношения  $\mu_{\max}/\mu_{\min}$  (см. лемму 1) все определяется величиной  $J_2$ , определенной в (8). А именно, если  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$  и  $J_2 \rightarrow 0$ , то метод АСС является асимптотически устойчивым по отношению к любому однократному выбросу.

При этом оказывается, что  $J_2$  соответствует линейному члену теории возмущений и, так как  $J_2$  выражается через проекторы  $\mathbf{P}_0^\perp$  и  $\mathbf{Q}_0^\perp$ , то особую роль здесь играют равномерные нормы этих проекторов.

**Благодарности.** Автор благодарит обоих анонимных рецензентов, замечания которых, несомненно, способствовали значительному улучшению работы.

## Литература

1. Kazemi M., Rodrigues P. C. Robust singular spectrum analysis: comparison between classical and robust approaches for model fit and forecasting. *Ann. Appl. Stat.* **7** (3), 1540–1561 (2023).
2. Golyandina N. Particularities and commonalities of singular spectrum analysis as a method of time series analysis and signal processing. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics* **12**, 4 (2020).
3. Nekrutkin V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals. *Statistics and Its Interface* **3**, 297–319 (2010).
4. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques*. Boca Raton; London; New York; Washington, Champan & Hall/CRC (2001).
5. Golyandina N., Zhigljavsky A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*, 2<sup>nd</sup> ed. Springer Briefs in Statistics, Springer (2020).
6. Golub G. H., Van Loan Ch. F. *Matrix computations*, 4<sup>th</sup> ed. Johns Hopkins University Press (2013).
7. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. Berlin; Heidelberg; New York, Springer Verlag (1966).

8. Некруткин В. В. Асимптотическая разделимость гармоник методом анализа сингулярного спектра. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 4, 720–735 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.409>

9. Senov M. *Robust versions of the SSA method*. Bachelor thesis (2022). <https://doi.org/10.5281/zenodo.6563614>

Статья поступила в редакцию 13 января 2024 г.;  
доработана 21 февраля 2024 г.;  
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

Контактная информация:

Некруткин Владимир Викторович — канд. физ.-мат. наук, доц.; [vnekr@statmod.ru](mailto:vnekr@statmod.ru)

## On the robustness of Singular Spectrum Analysis for long signals\*

V. V. Nekrutkin

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

**For citation:** Nekrutkin V. V. On the robustness of Singular Spectrum Analysis for long signals. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 495–507. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.306> (In Russian)

The paper is devoted to theoretical investigation of the robustness for Singular Spectrum Analysis (briefly, SSA) if the length  $N$  of time series tends to infinity. The last condition discerns the paper from many other works on this theme. Note that here the general theoretical approach to the asymptotic extraction of the signal series from the additively perturbed signal with the help of SSA was used. Therefore, taking the series corresponding to the outliers as the noise series, we can check whether the so-called reconstruction errors tend uniformly as  $N \rightarrow \infty$ . If this convergence takes place then the method is robust. Several examples of such an approach for concrete signals and outliers are considered, some of them are illustrated by computational experiments.

*Keywords:* signal processing, Singular Spectral Analysis, outliers, robustness, asymptotical analysis.

## References

1. Kazemi M., Rodrigues P. C. Robust singular spectrum analysis: comparison between classical and robust approaches for model fit and forecasting. *Ann. Appl. Stat.* **7** (3), 1540–1561 (2023).
2. Golyandina N. Particularities and commonalities of singular spectrum analysis as a method of time series analysis and signal processing. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics* **12**, 4 (2020).
3. Nekrutkin V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals. *Statistics and Its Interface* **3**, 297–319 (2010).
4. Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A. *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques*. Boca Raton; London; New York; Washington, Champan & Hall/CRC (2001).
5. Golyandina N., Zhigljavsky A. *Singular Spectrum Analysis for Time Series*, 2<sup>nd</sup> ed. Springer Briefs in Statistics, Springer (2020).
6. Golub G. H., Van Loan Ch. F. *Matrix computations*, 4<sup>th</sup> ed. Johns Hopkins University Press (2013).
7. Kato T. *Perturbation theory for linear operators*. Berlin; Heidelberg; New York, Springer Verlag (1966).

---

\*The research was funded by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 23-21-00222).

8. Nekrutkin V. Asymptotical Separation of Harmonics by Singular Spectrum Analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 4, 720–735 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.409> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 4, 526–539 (2023). <https://doi.org/10.1134/S1063454123040118>].

9. Senov M. *Robust versions of the SSA method*. Bachelor thesis (2022). <https://doi.org/10.5281/zenodo.6563614>

Received: January 13, 2024

Revised: February 21, 2024

Accepted: February 22, 2024

Author's information:

Vladimir V. Nekrutkin — [vnekr@statmod.ru](mailto:vnekr@statmod.ru)