УДК 517.537 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3
MSC 30E10

Приближение двоякопериодическими функциями в классах C_A^r*

К. А. Синцова[1], *Н. А. Широков*[1,2]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Российская Федерация, 190121, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, 16
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Синцова К. А., Широков Н. А.* Приближение двоякопериодическими функциями в классах C_A^r // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 508–516.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.307

В настоящей работе рассмотрено приближение полиномами от двоякопериодических функций Вейерштрасса для функций, аналитических в области и непрерывных в ее замыкании. Эта задача тесно связана с приближением голоморфными полиномами от двух переменных функции, голоморфной в области на эллиптической кривой. Предполагаем, что у границы области на плоскости длина дуги соизмерима с длиной хорды. Данное условие переносится и на область на эллиптической кривой. Возможность получения такой оценки приближения, которая согласуется с так называемой обратной теоремой, т. е. с восстановлением гладкости функции по скорости приближения, ранее была получена для классов, аналитических в области функций, у которых в замыкании области производная заданного порядка имеет модуль непрерывности гельдеровского типа, при этом порядка меньше единицы. Метод приближения, применяемый ранее, не давал возможности изучать классы аналитических функций, у которых производная какого-то порядка ограничена. В настоящей статье мы используем другой метод аппроксимации для приближения полиномами от двоякопериодических функций Вейерштрасса функций, аналитических в области, у которых производная данного порядка ограничена.

Ключевые слова: двоякопериодические функции Вейерштрасса, полиномы, аналитические функции, гладкие в замыкании области.

1. Определения и формулировки. Пусть $\mathfrak{P}(z)$ — двоякопериодическая функция Вейерштрасса с периодами $2\omega_1, 2\omega_2$, при этом $Im\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0, Q$ — параллелограмм с вершинами в точках $0, 2\omega_1, 2\omega_2, 2(\omega_1+\omega_2), D \subset Q, D$ — область с границей $\Gamma, \Gamma \subset Q$, число $t, 0 < t < 1$ такое, что $\overline{D} \subset Q_t, Q_t \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1+\omega_2+tQ$.

Предполагаем, что Γ удовлетворяет следующему условию: существует $b > 0$, не зависящее от $z_1, z_2 \in \Gamma$, такая, что, по крайней мере, для одной из дуг Γ с концами z_1 и z_2, которую мы обозначим $\Gamma(z_1, z_2)$, длина не превосходит величин $b \cdot |z_2 - z_1|$. Далее длину дуги α будем обозначать $|\alpha|$.

Обозначим через $\varphi(z)$ такое конформное отображение $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ на $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}, \mathbb{D}$ — единичный круг, что $\varphi(\infty) = \infty, \varphi'(\infty) > 0$, и через ψ — обратное к φ отображение. Для $h > 0$ положим $L_h = \{z \in \mathbb{C} \setminus D : |\varphi(z)| = 1 + h\}$. Для $z \in \Gamma$ положим

*Исследование Н. А. Широкова выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-11-00171.

$\rho_h(z) = dist(z, L_h)$. Пусть r — натуральное. Обозначим через $C^r_A(D)$ следующий функциональный класс:

$C^r_A(D) = \{f : f$ аналитична в D и существует постоянная c_f такая, что $|f^{(r)}(z)| \le c_f, z \in D\}$. Известно [1, гл. 7], что для $f \in C^r_A(D)$ для почти всех $z_0 \in \Gamma$ относительно длины кривой Γ существуют некасательные пределы у функции $f^{(r)}(z)$ и они ограничены величиной c_f.

Теорема. *Пусть $f \in C^r_A(D)$. Тогда существует постоянная c^*_f, не зависящая от n и z, и для любого $n = 1, 2, \ldots$ существует полином $P_n(u, v)$ от двух переменных, $degP_n \le n$, такие, что справедливо соотношение*

$$|f(z) - P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z))| \le c^*_f \rho^r_{\frac{1}{n}}(z), z \in \partial D. \tag{1}$$

Замечание. Класс функций $C^r_A(D)$ можно трактовать как класс функций f, аналитичных в D, у которых $f^{(r-1)}$ имеет в $\overline{D}$ модуль непрерывности $\omega(\delta) = c\delta$. Доказательство прямой теоремы в [2, 3] для такого модуля непрерывности не проходит; в настоящей работе мы применяем другой метод приближения.

2. Начало доказательства теоремы. Покажем, что существует полином $\Pi_{m_0}(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)) \stackrel{\text{def}}{=} s(z), deg\Pi_{m_0} = m_0$, однолистный в окрестности параллелограмма $\overline{Q}_t$, как функция от z. Применяя к функции $\chi(\xi) = f(\xi)\frac{s'(\xi)}{s(\xi)-s(z)}$, где $z \in D$, фиксировано теорему о вычетах, получаем равенство

$$f(z) = res_z\chi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \chi(\xi)d(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\xi)\frac{s'(\xi)}{s(\xi) - s(z)}d(\xi). \tag{2}$$

Обозначим $G = s(D)$, $\Lambda = s(\Gamma)$. Кривая Λ обладает свойством соизмеримости длины дуги и хорды, поскольку таким свойством обладает кривая Γ.

Пусть функция Φ конформно отображает $\mathbb{C} \setminus \overline{G}$ на $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ так, что $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(\infty) > 0, \Psi$ — обратное отображение. Положим при $h > 0$

$$\Lambda_h = \{s \in \mathbb{C} : |\Phi(s)| = 1 + h\}, \lambda_h = dist(s, \Lambda_h), s \in \Lambda. \tag{3}$$

Ниже мы определим число $k \ge 2$, тогда $q = 8k + 2$, число k зависит от G и, тем самым от D. Положим

$$t_{R,\Theta} \stackrel{\text{def}}{=} \Psi(Re^{-i\Theta}\Phi(t)), t_R \stackrel{\text{def}}{=} t_{R,0}, R > 1, \Theta \in [0, 2\pi]. \tag{4}$$

Постоянная C_{nq} выбрана из условия

$$C_{nq}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q d\Theta = 1. \tag{5}$$

Теперь для $\omega \in G, t \in \Lambda, R = 1 + \frac{1}{n}$ полагаем

$$K_n(\omega, t, \Theta) = \sum_{\nu=1}^{k}\frac{(t_{R,\Theta} - t)^{\nu-1}}{(t_{R,\Theta} - \omega)^\nu}, \tag{6}$$

$$\Pi_n(\omega, t) = C_{nq}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q K_n(\omega, t, \Theta)d\Theta. \tag{7}$$

В [4] доказано, что $\Pi_n(\omega, t)$ — полином от ω степени $\leq qn$. Теперь полагаем

$$P_n(\mathfrak{P}(z), \mathfrak{P}'(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\xi) s'(\xi) \Pi_n(s(z), s(\xi)) d\xi \stackrel{\text{def}}{=} T_n f(z). \tag{8}$$

Из построений (6)–(8) следует, что P_n — полином от $\mathfrak{P}(z)$ и $\mathfrak{P}'(z)$ степени, не превосходящей $m_0 qn$.

Поскольку кривая Γ удовлетворяет условию соизмеримости длины дуги и хорды, то по результатам [4, 5] существуют числа $C_1 > 0$ и $\varkappa, 0 < \varkappa < 1$, такие, что для $z_1, z_2 \in \Gamma, z_1 \neq z_2, 0 < h \leq 1$ справедливы оценки

$$\rho_h(z_2) \leq C_1 \rho_h^\varkappa(z_1) \left(|z_2 - z_1| + \rho(z_1)\right)^{1-\varkappa}. \tag{9}$$

Выберем теперь $k = \left[\frac{2r}{\varkappa}\right] + 1$. Пусть $z \in \Gamma$ фиксирована, $z_0 \in D$ достаточно близка в z, n фиксировано. Положим

$$P_{z_0}(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \ldots + \frac{f^{(r-1)}(z_0)}{(r-1)!}(z - z_0)^{r-1}. \tag{10}$$

$$f_{z_0}(z) = f(z) - P_{z_0}(z). \tag{11}$$

Тогда

$$T_n f(z) = T_n f_{z_0}(z) + T_n P_{z_0}(z). \tag{12}$$

Из соотношений (2), (5), (6)–(12) получаем равенство

$$f_{z_0}(z) - T_n f_{z_0}(z) = C_{nq} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta}\right)^q d\Theta \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f_{z_0}(\xi) s'(\xi) \left(\frac{1}{s(\xi) - s(z)} - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{(t_{R,\Theta} - t)^{\nu-1}}{(t_{R,\Theta} - s(z))^\nu}\right) d\xi\right), \tag{13}$$

где $t = s(\xi)$. Используя тождество

$$\frac{1}{\alpha - \gamma} - \frac{1}{\beta - \gamma} - \frac{\beta - \alpha}{(\beta - \gamma)^2} - \ldots - \frac{(\beta - \alpha)^{k-1}}{(\beta - \gamma)^k} = \frac{(\beta - \alpha)^k}{(\beta - \gamma)^k (\alpha - \gamma)},$$

преобразуем равенство (13):

$$f_{z_0}(z) - T_n F_{z_0}(z) = C_{nq} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta}\right)^q d\Theta \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\xi) s'(\xi) \frac{(t_{R,\Theta} - s(\xi))^k}{(s(\xi) - s(z))(t_{R,\Theta} - s(z))^k} d\xi\right). \tag{14}$$

Проведем следующие геометрические построения. Обозначим через σ_n окружность $\sigma_n = \{z : |z - z_*| = \rho_{\frac{1}{n}}(z_*)\}$, и пусть $z_n', z_n'' \in \sigma_n \cap \Gamma$, при этом, в случае когда $\sigma_n \cap \Gamma$ состоит более чем из двух точек, на дуге $\gamma_n \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(z_n', z_n'') \subset \Gamma$ с концами z_n' и z_n'' лежит точка z_*, и нет других точек из $\sigma_n \cap \Gamma$.

Пусть $\Gamma_n = \Gamma \setminus \gamma_n$. Соизмеримость длины дуги и хорды на кривой Γ влечет существование $b_1 > 0$, не зависящего от n и z_*, такого, что для $z \in \Gamma_n$ выполнено соотношение $|z - z_*| \geq b_1 \rho_{\frac{1}{n}}(z_*)$. Далее считаем, что $|z_0 - z_*| < \frac{b_1}{2} \rho_{\frac{1}{n}}(z_*)$.

Обозначим через σ_n^+ дугу с концами z_n', z_n'', состоящую из дуг $\tau \subset \sigma_n$, если $\tau \subset \overline{D}$ и концы τ принадлежат множеству $\sigma_n \cap \Gamma$, и дуг $\tilde{\gamma} \subset \Gamma_n$, концы которых принадлежат $\sigma_n \cap \Gamma$, но соответствующая дуга $\tau \subset \sigma_n$ не лежит в $\overline{D}$, при этом, если обход дуги γ_n от z_n' к z_n'' согласован с положительным обходом кривой Γ, то обход кривой $\gamma_n \cup \sigma_n^+$ от z_n' к z_n'' по γ_n и от z_n' к z_n'' по σ_n^+ проходит также в положительном направлении. Для $z \in \overline{D}$ обозначим через $\gamma(z)$ дугу с концами z и z_0, лежащую в области D, за исключением z, и такую, что с некоторой постоянной b_2, не зависящей от z и z_0, справедливо соотношение $|\gamma(z)| \le b_2|z - z_2|$. Такие дуги существуют, поскольку Γ удовлетворяет условию соизмеримости дуги и хорды. Для f_{z_0} справедливы следующие оценки: $f_{z_0}(z_0) = 0$

$$|f_{z_0}(z)| = \frac{1}{(r-1)!}|\int_{\gamma(z)} (z-\xi)^{r-1} f^{(r)}(\xi) d\xi| \le \frac{1}{(r-1)!}\times$$

$$\times \int_{\gamma(z)} |z-\xi|^{r-1} |f^{(r)}(s)||d\xi| \le c_f' |z - z_0|^r. \tag{15}$$

Используя соотношения (13) и (14), получаем

$$f_{z_0}(z_0) - T_n f_{z_0}(z_0) = C_{nq} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q d\Theta \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n} f(\xi)s'(\xi)\times\right.$$

$$\left.\times \frac{(t_{R,\Theta} - s(\xi))^k}{(s(\xi) - s_{z_0})(t_{R,\Theta} - s(z_0))^k} d\xi\right) + C_{nq}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q d\Theta\times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} f(\xi)s'(\xi)\frac{(t_{R,\Theta} - s(\xi))^k}{(s(\xi) - s_{z_0})(t_{R,\Theta} - s(z_0))^k} d\xi\right) \stackrel{\text{def}}{=} I_1 + I_2. \tag{16}$$

Поскольку функция $\chi_{z_0}(\xi) = \frac{f_{z_0}(\xi)s'(\xi)}{s(\xi) - s(z_0)}$ аналитична в D, то

$$\int_{\gamma_n \cup \sigma_n^+} \chi_{z_0}(\xi) d\xi = 0,$$

поэтому

$$\int_{\gamma_n} \frac{f_{z_0}(\xi)s'(\xi)}{s(\xi) - s(z_0)} d\xi = -\int_{\sigma_n^+} \frac{f_{z_0}(\xi)s'(\xi)}{s(\xi) - s(z)} d\xi. \tag{17}$$

Теперь из (16) и (17) получаем

$$I_1 = C_{nq}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q d\Theta \left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_n^+} \frac{f_{z_0}(\xi)s'(\xi)}{s(\xi) - s(z_0)} d\xi - \right.$$

$$\left. - \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\gamma_n} f_{z_0}(\xi)s'(\xi)\frac{(t_{R,\Theta} - s(\xi))^{\nu-1}}{(t_{R,\Theta} - s(z_0))^{\nu}} d\xi\right). \tag{18}$$

3. Окончание доказательства теоремы. Имеем соотношение

$$C_{nq}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q d\Theta \cdot \left(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_n^+} \frac{f_{z_0}(\xi)s'(\xi)}{s(\xi) - s(z_0)} d\xi\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_n^+} \frac{f_{z_0}(\xi)s'(\xi)}{s(\xi) - s(z_0)} d\xi \stackrel{\text{def}}{=} J_0.$$

Поскольку свойство $|\xi - z_0| \geq c\rho_{\frac{1}{n}}(z_*)$ при $\xi \in \sigma_n^+$ влечет свойство $|s(\xi) - s(z_0)| \geq c\rho_{\frac{1}{n}}(z_*)$, то применение оценки (15) дает неравенство

$$|J_0| \leq \frac{c\rho^r_{\frac{1}{n}}(z_*)}{\rho_{\frac{1}{n}}(z_*)} \cdot |\sigma_n^+| \leq c\rho^r_{\frac{1}{n}}(z_*) \tag{19}$$

Нам понадобится следующий результат [4, 5].

Лемма. Существуют постоянные $c_1(G) > 0$ и $c_2(G) > 0$ такие, что справедливы оценки

$$c_1(G)|t_R - s(\xi)|(1 + n|\Theta|)^{-4} \leq |t_{R,\Theta} - s(\xi)| \leq c_2(G)|t_R - s(\xi)| \cdot (1 + n|\Theta|)^4, \tag{20}$$

$$c_1(G)|t_R - s(z_0)|(1 + n|\Theta|)^{-4} \leq |t_{R,\Theta} - s(z_0)| \leq c_2(G)|t_R - s(z_0)| \cdot (1 + n|\Theta|)^4. \tag{21}$$

Из (5), (15), (20), (21) и выбора q получаем

$$J_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \left| C_{nq} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta} \right)^q d\Theta \cdot \left(-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} f_{z_0}(\xi) s'(\xi) \frac{(t_{R,\Theta} - s(\xi))^{\nu-1}}{(t_{R,\Theta} - s(z_0))^\nu} d\xi \right) \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_n} |f_{z_0}(\xi)||s'(\xi)||d\xi| \left(C_{nq} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta} \right)^q \frac{|t_{R,\Theta} - s(\xi)|^{\nu-1}}{|t_{R,\Theta} - s(z_0)|^\nu} d\Theta \right) \leq$$

$$\leq c\rho^r_{\frac{1}{n}}(z_*) \cdot \frac{\rho^{\nu-1}_{\frac{1}{n}}(z_*)}{\rho^{\nu}_{\frac{1}{n}}(z_*)} \cdot C_{nq} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta} \right)^q (1 + n|\Theta|)^{8k} d\Theta \cdot |\gamma_n| \leq$$

$$\leq c\rho^r_{\frac{1}{n}}(z_*). \tag{22}$$

В оценках (22) мы воспользовались оценкой C_{nq} и тем, что при $\xi \in \gamma_n$ имеем $|t_R - s(\xi)| \asymp \lambda_{\frac{1}{n}}(s(\xi)) \asymp \rho_{\frac{1}{n}}(\xi) \asymp \rho_{\frac{1}{n}}(z_*), |t_R - s(z_*)| \asymp \lambda_{\frac{1}{n}}(z_*)$. Из соотношений (18), (19), (22) получаем

$$|I_1| \leq |J_0| + \sum_{\nu=1}^{k} J_\nu \leq c\rho^r_{\frac{1}{n}}(z_*). \tag{23}$$

Для оценки I_2 также применим лемму.

Из (15), (16), (20) и (21) получим соотношение:

$$|I_2| \leq C_{nq} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta} \right)^q d\Theta \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_n} |f_{z_0}(\xi)||s'(\xi)| \frac{|t_{R,\Theta} - s(\xi)|^k |d\xi|}{|s(\xi) - s(z_0)|(t_{R,\Theta} - s(z_0))^k} \right) \leq$$

$$\leq c \int_{\Gamma_n} |\xi - z_0|^r \cdot \frac{|t_R - s(\xi)|^k ||d\xi|}{|s(\xi) - s(z_0)||t_R - s(z_0)|^k} \cdot \left(C_{nq} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta} \right)^q (1_n|\Theta|)^{8k} d\Theta \right) \leq$$

$$\leq c \int_{\Gamma_n} |\xi - z_0|^r \cdot \frac{|t_R - s(\xi)|^k ||d\xi|}{|\xi - z_0||t_R - s(z_0)|^k} |d\xi|. \tag{24}$$

Учтем, что для $t_R = \Psi(R\Phi(s(\xi)))$ при $\xi \in \Gamma_n$ выполняется соотношение $|t_R - s(z_0)| \asymp |s(\xi) - s(z_0)|$, поэтому при $\xi \in \Gamma_n$ имеем $|t_R - s(z_0)| \asymp |\xi - z_0|$.

Как отмечено в [4, 5], для $s \in \Lambda$ имеем свойство $|\Psi(R\Phi(s)) - s| \asymp \lambda_{\frac{1}{n}}(s)$, поэтому применение оценки (9) дает неравенство

$$|t_R - s(\xi)| \asymp \lambda_{\frac{1}{n}}(s(\xi)) \asymp \rho_{\frac{1}{n}}(\xi) \le c\rho^{\varkappa}_{\frac{1}{n}}(z_*)(|\xi - z_*| + \rho_{\frac{1}{n}}(z_*))^{1-\varkappa} \le$$
$$\le c\rho_{\frac{1}{n}}(z_*))^{\varkappa}(z_*)(|\xi - z_0| + \rho_{\frac{1}{n}}(z_*))^{1-\varkappa}. \tag{25}$$

При $\xi \in \Gamma_n$ имеем соотношение $|\xi - z_0| \ge c\rho_{\frac{1}{n}}(z_*)$, поэтому оценку (25) можно продолжить:

$$|t_R - s(\xi)| \le c\rho_{\frac{1}{n}}(z_*))^{\varkappa}(z_*)|\xi - z_0|^{1-\varkappa}. \tag{26}$$

Подставляя (26) в (24), получаем неравенство для $|I_2|$:

$$|I_2| \le c\rho_{\frac{1}{n}}(z_*)^{k\varkappa}(z_*)\int_{\Gamma_n}\frac{|d\xi|}{|\xi - z_0|^{k\varkappa+1-r}}. \tag{27}$$

При $a > 1$ в силу соизмеримости на кривой Γ_n длины дуги и хорды и того, что $|\xi - z_0| \ge \rho_{\frac{1}{n}}(z_*)$, имеем оценку

$$\int_{\Gamma_n}\frac{|d\xi|}{|\xi - z_0|^a} \le c\frac{1}{\rho^{a-1}_{\frac{1}{n}}(z_*)}.$$

В (17) имеем $a = \varkappa\left(\left[\frac{2r}{\varkappa}\right] + 1\right) - r > r + 1 > 1$, поэтому (27) влечет соотношение

$$|I_2| \le c\rho^{k\varkappa}_{\frac{1}{n}}(z_*)\cdot\frac{1}{(\rho_{\frac{1}{n}}(z_*))^{k\varkappa - r}} = c\rho^{r}_{\frac{1}{n}}(z_*). \tag{28}$$

Из равенств (16) и оценок (23) и (28) получаем

$$|f_{z_0}(z_0) - T_n f_{z_0}(z_0)| \le \rho^{r}_{\frac{1}{n}}(z_*). \tag{29}$$

Перейдем к оценкам выражения $P_{z_0}(z_0) - T_n P_{z_0}(z_0)$. Используя формулу (14), получаем соотношение

$$P_{z_0}(z_0) - T_n P_{z_0}(z_0) = C_{nq}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin n\Theta}{\sin\Theta}\right)^q d\Theta\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}P_{z_0}(\xi)s'(\xi)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(t_{R,\Theta} - s(\xi))^k d\xi}{(s(\xi) - s(z_0))(t_{R,\Theta} - s(z_0))^k}\right). \tag{30}$$

Функция от ξ $t_{R,\Theta} = \Psi(Re^{-i\Theta}\Phi(s(\xi)))$ аналитична по ξ в области $\mathbb{C}\setminus\overline{D}$ и непрерывна в $\mathbb{C}\setminus D$, функция $P_{z_0}(\xi)$ является полиномом от ξ, поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}P_{z_0}(\xi)s'(\xi)\frac{(t_{R,\Theta} - s(\xi))^k}{(s(\xi) - s(z_0))(t_{R,\Theta} - s(z_0))^k}d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial Q_t}P_{z_0}(\xi)s'(\xi)\frac{(t_{R,\Theta} - s(\xi))^k}{(s(\xi) - s(z_0))(t_{R,\Theta} - s(z_0))^k}d\xi. \tag{31}$$

По условию $\overline{D}$ лежит в открытом параллелограмме Q_t, поэтому $\overline{G} = s(\overline{D})$ лежит в открытой области $s(Q_t)$, следовательно, существует $\sigma_0 > 0$ так, что для $\lambda \in L =$

$\partial s(Q_t)$ справедливо соотношение $dist(\lambda, \overline{G}) \geq \sigma_0$. При $R = 1 + \frac{1}{n}$ и $\xi \in \partial Q_t$ точка $t_{R,\Theta} = \Psi(Re^{-i\Theta}\Phi(s(\xi))$ лежит вне $\overline{s(Q_t)}$, поэтому $|t_{R,\Theta} - s(z_0)| \geq \sigma_0$. Также имеем соотношение $|s(\xi) - s(z_0)| \geq \sigma_0, \xi \in \partial Q_t$, и

$$|t_R - s(\xi)| = |\Psi(R\Phi(s(\xi))) - s(\xi)| \leq \frac{c}{n}. \tag{32}$$

Применяя неравенства (20), (32) и учитывая выбор $k > \frac{2r}{\varkappa} > 2r$, из равенств (30) и (31) получаем оценки:

$$|P_{z_0}(z_0) - T_n P_{z_0}(z_0)| \leq C_{nq} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta}\right)^q d\Theta \times$$

$$\times \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_t} |P_{z_0}(\xi)||s'(\xi)| \cdot \frac{|t_{R,\Theta} - s(\xi)|^k d\xi}{|s(\xi) - s(z_0)||t_{R,\Theta} - s(z_0)|^k} |d\xi|\right) \leq$$

$$\leq c \int_{\partial Q_t} |d\xi| \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin n\Theta}{\sin \Theta}\right)^q |t_R - s(\xi)|^k (1 + n|\Theta|)^{4k} d\Theta \leq$$

$$\leq c \cdot \int_{\partial Q_t} |d\xi| \cdot |t_R - s(\xi)|^k \leq cn^{-2r}. \tag{33}$$

Согласно результатам [6], существует постоянная $c(D) > 0$ такая, что справедливо соотношение $\rho_{\frac{1}{n}}(z_*) \geq c(D) \cdot \frac{1}{n^2}$ для любой точки $z_* \in \Gamma$. Тогда из оценки (33) следует соотношение

$$|P_{z_0}(z_0) - T_n P_{z_0}(z_0)| \leq c\rho^r_{\frac{1}{n}}(z_*). \tag{34}$$

В результате проведенных рассуждений мы получим, что для полинома $T_n f(z)$ от $\mathfrak{P}(z)$ и $\mathfrak{P}'(z)$, определенного в (8), $degT_n \leq m_0 qn$, любой точки $z_* \in \Gamma$ и достаточно близкой к z_* точки $z_0 \in D$ справедливо соотношение

$$|f(z_0) - T_n f(z_0)| \leq \tilde{c_f} \rho^r_{\frac{1}{n}}(z_*).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $z_0 \to z_*$, получаем, что имеется оценка

$$|f(z_0) - P_N(\mathfrak{P}(z_*), \mathfrak{P}'(z_*))| \leq \tilde{c_f} \rho^r_{\frac{1}{n}}(z_*). \tag{35}$$

Поскольку $N \leq m_0 qn$, то из (35) следует требуемое неравенство (1).

Именно в [5] установлено, что при $0 < h_1 < h_2 \leq 1$ с постоянными $A(D) > 0$ и $\beta(D) > 0$ справедливо соотношение $\rho_{h_2}(z) \leq A(D) \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^{\beta(D)} \rho_{h_1}(z), z \in \Gamma$.

Эти соотношения справедливы, поскольку Γ длина дуги соизмерима с хордой.

Тогда (1) верно с $c^*_f = A^r(D)(m_0 q)^{r\beta(D)} \tilde{c_f}$. □

Литература

1. Pommerenke Ch. Boundary Behavior of Conformal Maps. In: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **299** (1992).

2. Синцова К. А., Широков Н. А. Приближения полиномами от двоякопериодических функций Вейерштрасса. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 1, 61–72 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.10

3. Хаустов А. В., Широков Н. А. Полиномиальные приближения на замкнутых подмножествах эллиптических кривых. *Записки научных семинаров ПОМИ* **302**, 178–187 (2003).

4. Белый В. И. Конформные отображения и приближение аналитических функций в областях с квазиконформной границей. *Математический сборник* **102** (144), вып. 3, 331–361 (1977). https://doi.org/10.1070/SM1977v031n03ABEH002304

5. Белый В. И., Миклюков В. М. Некоторые свойства конформных и квазиконформных отображений и прямые теоремы конструктивной теории функций. *Известия АН СССР. Серия математическая* **38** (6), 1343–1361 (1974). https://doi.org/10.1070%2FIM1974v008n06ABEH002150

6. Тамразов П. М. Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов. *Известия АН СССР. Серия математическая* **32** (5), 1033–1043 (1968).

Статья поступила в редакцию 23 января 2024 г.;
доработана 20 февраля 2024 г.;
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

Контактная информация:

Синцова Ксения Анатольевна — аспирант; kseniasintlead@gmail.com
Широков Николай Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; nikolai.shirokov@gmail.com

Approximation by double periodic functions in the class C_A^r*

K. A. Sintsova[1], *N. A. Shirokov*[1,2]

[1] HSE University, 16, ul. Soyuza Pecharnikov, St. Petersburg, 190121, Russian Federation
[2] St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Sintsova K. A., Shirokov N. A. Approximation by double periodic functions in the class C_A^r. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 508–516. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.307 (In Russian)

In this work we will consider approximation by polynomials in doubly periodic Weierstrass functions for functions that are analytic in a domain and continuous in its closure. This problem is closely related to the approximation by holomorphic polynomials in two variables of a function that is holomorphic in a domain on an elliptic curve. We assume that at the boundary of the region on the plane the length of the are is commensurable with length of the chord. This condition also applies to the region on the elliptic curve. The possibility of obtaining an approximation estimate that is consistent with the so-called the inverse theorem. i. e., with the restoration of the smoothness of the function by the speed of approximation, it was previously obtained for classed of function analytic in a domain for which in the closure of the domain the derivative of a given order has a modulus of continuity of the Holder type, with an order less than unity. The approximation method used earlier did not make it possible to study classes of analytic functions whose derivative of some order is limited. In this paper, we use a different approximation method to approximate by polynomials in doubly periodic Weierstrass functions the functions that are analytic in a domain and whose derivative of a given order is bounded in the domain.

Keywords: doubly periodic Weierstrass functions, polynomials, analytic functions, smooth in the closure of a domain.

References

1. Pommerenke Ch. Boundary Behavior of Conformal Maps. In: *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* **299** (1992).

2. Sintsova K. A., Shirokov N. A. Polynomial approximations of doubly periodic Weierstrass functions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 1,

*The research made by N. A. Shirokov was funded by the Russian Science Foundation grant no. 23-11-00171.

61–72 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.10 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 1, 46–56 (2023). https://doi.org/10.1134/S1063454123010120].

3. Haustov A. V., Shirokov N. A. Polynomial approximation on closed subsets of elliptic curves, *Zapiski nauchnyh seminarov POMI* **30** 2, 178–187 (2003). (In Russian)

4. Belyi V. I. Conformal mapping and approximation of analytic functions in the domains with aquasiconformal boundary. *Mathemat. Sbornik* **102** (144), no. 3, 331–361 (1977). (In Russian) [Eng. transl.: *Mathematics Sbornik* **31** (3), 289–317 (1977). https://doi.org/10.1070/SM1977v031n03ABEH002304].

5. Belyi V. I., Mikliukov V. M. Some properties of conformal and quasiconformal mappingsand direct theorems of the constructive theory of functions. *Izvestia AN SSSR. Seria Mathemat.* **38** (6), 1343–1361 (1974). (In Russian) [Eng. transl.: *Isvestiya: Mathematics* **8** (6), 1323–1341 (1974). https://doi.org/10.1070%2FIM1974v008n06ABEH002150].

6. Tamrazov P. M. Extremal conformal mappings and poles of quadratic differentials. *Izvestiia AN SSSR. Seria Mathemat.* **32** (5), 1033–1043 (1968).

Received: January 23, 2024
Revised: February 20, 2024
Accepted: February 22, 2024

Authors' information:

Kseniia A. Sintsova — kseniasintlead@gmail.com
Nikolai A. Shirokov — nikolai.shirokov@gmail.com