УДК 519.2 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3
MSC 60E15, 60F15

Об оценивании величин скачков дискретных функций распределения*

А. Н. Фролов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Фролов А. Н.* Об оценивании величин скачков дискретных функций распределения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 517–525. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.308

Получены новые неравенства для величин скачков дискретных функций распределения. Величины скачков оцениваются линейными комбинациями конечного числа моментов рассматриваемых распределений. Полученные неравенства можно использовать для статистического оценивания диапазонов величин маловероятных скачков, когда частоты равны нулю и не представляют интереса в качестве оценок. Обсуждается связь доказанных неравенств с неравенствами для вероятностей объединений событий, а также с неравенствами Коши — Буняковского и Гёльдера.

Ключевые слова: неравенства Бонферрони, вероятности объединений событий, вероятности комбинаций событий, неравенство Коши — Буняковского, неравенство Гёльдера, величина скачка функции распределения.

1. Введение и результаты. Пусть ξ — невырожденная случайная величина, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, такая, что $p_k = \mathbf{P}(\xi = x_k) > 0$ для всех k и $\sum_k p_k = 1$, где $\{x_k\}$ — конечное, или счетное множество чисел, $x_0 = 0$ и $x_{k-1} < x_k$ для всех $k \geqslant 1$. Положим $\mu_0 = 1$ и $\mu_i = \mathbf{E}\xi^i$ для всех $i \geqslant 1$, для которых соответствующие моменты существуют.

Функция распределения ξ имеет в каждой точке x_k скачок величины p_k. Настоящая работа посвящена оцениванию p_k линейными комбинациями конечного числа моментов μ_k. В работе [1] были получены подобные неравенства для величин первых скачков p_0 дискретных функций распределения с конечным множеством точек разрыва, а также обсуждалась связь полученных результатов с оценками для вероятностей объединений событий и неравенствами Коши — Буняковского и Гёльдера. В настоящей работе мы получим новые оценки для p_0 при счетном $\{x_k\}$, для p_k при $k \geqslant 1$ и обсудим круг вопросов, аналогичный затрагивавшемуся в [1]. Здесь мы не приводим новых оценок для сумм p_k, но наш метод применим и в этом случае.

Отметим, что в теории вероятностей важную роль играют оценки рассматриваемого типа для следующего частного случая. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — события, а ξ — число одновременно происходящих из них событий, то суммы p_k представляют собой вероятности различных комбинаций этих событий. Поэтому неравенства Бонферрони и их различные обобщения относятся к классу рассматриваемых оценок. В частности, $\mathbf{P}(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n p_k = 1 - p_0$. Оценки вероятностей объединений событий особенно важны, так как всякая новая такая оценка приводит к получению

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00078).

нового варианта леммы Бореля — Кантелли. Этим вопросам посвящена значительная литература, а за подробностями можно обратиться, например, к работам [2, 3] и статьям из их библиографий.

Добавим, что полученные нами неравенства позволяют строить статистические оценки для границ величин скачков. Естественной оценкой p_k выступает частота появления значения x_k в выборке. Если множество $\{x_k\}$ бесконечно, то в выборке может не оказаться значений, соответствующих маловероятным скачкам (например, для больших k). Следовательно, соответствующие частоты будут равны нулю. С другой стороны, можно оценить моменты элементов выборки. Подставляя в наши неравенства вместо теоретических моментов их оценки, мы получим нетривиальные оценки для границ диапазонов величин скачков. Эти оценки будут состоятельными.

Отметим, что целью работы также является совершенствование метода получения некоторого класса неравенств. Используя этот метод, читатель сам сможет получить другие неравенства, представляющие для него интерес. В качестве примеров мы ограничимся построением оценок, основанных на μ_0, μ_1, μ_2.

Начнем с оценок p_r сверху.

Теорема 1. *Если множество $\{x_k\}$ счетно и $\mu_2 < \infty$, то для всех натуральных $m \neq r$ и $m \neq r+1$ выполняется неравенство*

$$p_r \leqslant \frac{x_m x_{m-1} - (x_m + x_{m-1})\mu_1 + \mu_2}{(x_r - x_m)(x_r - x_{m-1})}. \tag{1}$$

Если $x_r > \mu_2/\mu_1$, то оптимальное m удовлетворяет неравенствам $m \leqslant r-1$ и

$$x_{m-1} \leqslant \delta_r = \frac{x_r\mu_1 - \mu_2}{x_r - \mu_1} \leqslant x_m \tag{2}$$

и при таком m неравенство (1) может обращаться в равенство. Если $x_r < \mu_1$, то оптимальное m удовлетворяет неравенствам $m \geqslant r+2$ и (2), и при таком m неравенство (1) может обращаться в равенство.

Если $\{x_k\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное множество и $n > 2$, то приведенные выше утверждения сохраняются при $1 \leqslant m \leqslant r-1 \leqslant n-1$ и $r+2 \leqslant m \leqslant n$. Кроме того, для $1 \leqslant r \leqslant n-1$ выполняется неравенство

$$p_r \leqslant \frac{x_n\mu_1 - \mu_2}{x_r(x_n - x_r)}. \tag{3}$$

В последнем неравенстве может достигаться равенство, если

$$\delta_n \leqslant x_r \leqslant \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{4}$$

В теореме 1 мы считаем m оптимальным, если правая часть неравенства (1) минимальна.

Отметим, что $\delta_0 = \mu_2/\mu_1 > 0$, $\delta_r \geqslant \delta_0$ при $x_r < \mu_1$ и $\delta_r \in (0, \mu_1)$ при $x_r > \mu_2/\mu_1$. Далее, $\delta_{r+1} > \delta_r$ при $x_{r+1} < \mu_1$ или $x_r > \mu_2/\mu_1$. Кроме того, $\delta_r < 0$ при $x_r \in (\mu_1, \mu_2/\mu_1)$ и неравенства (2) не могут выполняться.

При $r = 0$ неравенство (1) получено автором в [1] для ξ с конечным множеством значений. Если ξ — число одновременно происходящих событий из $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то оценки (сверху и снизу) для p_r и их сумм могут быть найдены в работах [2, 3] и обширной литературе, цитированной в них. Отметим, что в этих работах в оценках обычно использовались факториальные моменты.

Неравенство (1) можно записать в виде

$$p_r \leqslant 1 + \frac{\mu_1 - x_r}{x_m - x_{m-1}} \left(\frac{\delta_r - x_{m-1}}{x_r - x_m} + \frac{x_m - \delta_r}{x_r - x_{m-1}} \right). \tag{5}$$

Выше мы упоминали, что особое место занимает оценка p_0. Из неравенств (5) и (2) следует, что

$$p_0 \leqslant 1 - \frac{\mu_1}{x_{m^*} - x_{m^*-1}} \left(\frac{\delta_0 - x_{m^*-1}}{x_{m^*}} + \frac{x_{m^*} - \delta_0}{x_{m^*-1}} \right) \leqslant 1 - \frac{\mu_1^2}{\mu_2}, \tag{6}$$

где $m^* \geqslant 2$ выбрано так, что $x_{m^*-1} \leqslant \delta_0 < x_{m^*}$. Второе неравенство в (6) получено из первого выбором $\delta_0 = x_{m^*-1}$, которому соответствует минимальное значение выражения в круглых скобках. Заметим, что δ_0 не является параметром, а представляет собой численную характеристику ξ.

Для целочисленных случайных величин неравенства (1), (3), (5) и (6) упрощаются. Кроме того, из них можно получать числовые неравенства. Например, если ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, то из (6) мы получим

$$e^{-\lambda} \leqslant 1 - \lambda \left(\frac{\{\lambda\}}{[\lambda] + 2} + \frac{1 - \{\lambda\}}{[\lambda] + 1} \right) \leqslant \frac{1}{\lambda + 1},$$

где $\{\cdot\}$ и $[\cdot]$ — дробная и целые части числа в скобках соответственно.

Пусть $\{A_k\}$ — последовательность или набор из n событий и $\xi = \sum_k I_{A_k}$. В первом случае предположим, что ряд сходится п. н. и $\mu_2 < \infty$. Из неравенства (6) следует, что

$$\mathbf{P}(\bigcup_k A_k) \geqslant \mu_1^2 \left(\frac{\{\delta_0\}}{\mu_2 + (1 - \{\delta_0\})\mu_1} + \frac{1 - \{\delta_0\}}{\mu_2 - \{\delta_0\}\mu_1} \right) \geqslant \frac{\mu_1^2}{\mu_2}. \tag{7}$$

Для конечного набора событий неравенства (7) хорошо известны. Первое из них — это неравенство Доусона — Санкова, а второе — неравенство Чжуна — Эрдёша.

Пусть $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ — две последовательности или два набора из n положительных чисел таких, что $\sum_k \alpha_k^2 = \sum_k \beta_k^2 = 1$. Положим $p_0 = 0$, $p_k = \beta_k^2$, $x_0 = 0$ и $x_k = \alpha_k / \beta_k$ для $k \geqslant 1$. Тогда $\mu_1 = \sum_k \alpha_k \beta_k$ и $\mu_2 = 1$. Если $x_k < x_{k+1}$ для всех k, то из неравенства (6) следует, что

$$1 \geqslant \frac{\mu_1}{x_{m^*} - x_{m^*-1}} \left(\frac{\delta_0 - x_{m^*-1}}{x_{m^*}} + \frac{x_{m^*} - \delta_0}{x_{m^*-1}} \right) \geqslant \mu_1^2. \tag{8}$$

Здесь m^* выбрано так, чтобы $x_{m^*-1} \leqslant \delta_0 < x_{m^*}$, а $\delta_0 = 1/\mu_1$. К сожалению, m^* не может быть найдено в явном виде, если μ_1 нам неизвестно.

Неравенство (8) содержит неравенство Коши — Буняковского $\mu_1^2 \leqslant 1$. Для конечного числа слагаемых первое неравенство из (8) получено в [1], где также показано, что оно может быть точнее неравенства Коши — Буняковского. Кроме того, в [1] предложен алгоритм, позволяющий перейти к упорядоченной последовательности различных x-в. Этот алгоритм работает для конечного множества значений ξ. Тем не менее в тех случаях, когда x_k окажутся различными и упорядоченными, первое неравенство в (8) выполняется для последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$.

Пусть $p, q > 1$ такие, что $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Для того чтобы получить аналог неравенства (8), содержащий неравенство Гёльдера, нужно предположить, что $\sum_k \alpha_k^p = \sum_k \beta_k^q = 1$, и положить $x_k = \alpha_k \beta_k^{-q/p}$ и $p_k = \beta_k^q$ для всех k. При этом μ_2 следует заменить моментом порядка p, но здесь мы не будем проводить соответствующих выкладок.

Перейдем к оценкам p_r снизу.

Теорема 2. *Если множество $\{x_k\}$ счетно, и $\mu_2 < \infty$, то для $r \geqslant 1$ выполняется неравенство*

$$p_r \geqslant \frac{-x_{r-1}x_{r+1} + (x_{r-1} + x_{r+1})\mu_1 - \mu_2}{(x_r - x_{r-1})(x_{r+1} - x_r)}. \tag{9}$$

Это неравенство может обращаться в равенство, если $x_{r-1} < \mu_1$, $x_{r+1} > \mu_2/\mu_1$ и

$$x_{r-1} \leqslant \delta_{r+1} \leqslant x_r \leqslant \delta_{r-1} \leqslant x_{r+1}, \tag{10}$$

где δ_r определены в соотношении (2).

Если $\{x_k\} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ — конечное множество и $n > 2$, то приведенные выше утверждения сохраняются при $1 \leqslant r \leqslant n - 1$. Кроме того, выполняются неравенства

$$p_n \geqslant \frac{-x_{n-1}\mu_1 + \mu_2}{(x_n - x_{n-1})x_n} \quad \text{и} \quad p_0 \geqslant \frac{x_1 x_n - (x_1 + x_n)\mu_1 + \mu_2}{x_1 x_n}. \tag{11}$$

Последние два неравенства могут обращаться в равенства, если

$$\delta_n \leqslant x_{n-1} \leqslant \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \text{или} \quad \delta_n \leqslant x_1 \tag{12}$$

соответственно.

Из условий $x_{r-1} < \mu_1$ и $x_{r+1} > \mu_2/\mu_1$ и свойств $\{\delta_r\}$, приведенных после теоремы 1, следует, что $\delta_{r+1} \leqslant \mu_1 < \mu_2/\mu_1 \leqslant \delta_{r-1}$ в неравенстве (10).

2. Метод построения оценок. В дальнейшем мы используем следующие обозначения и соглашения. Матрицы и векторы мы обозначаем жирным шрифтом, а их элементы — курсивом. Векторы мы считаем столбцами. Запись $\mathbf{v} \leqslant \mathbf{u}$ для $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ из $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^\infty$ является сокращением записи $v_i \leqslant u_i$ при всех $i \geqslant 1$. Положим $\mathbf{0}_n = (0, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0}_\infty = (0, 0, \ldots)^T \in \mathbb{R}^\infty$ и $\mathbf{1}_\infty = (1, 1, \ldots)^T \in \mathbb{R}^\infty$, где ^{T} обозначает транспонирование.

Нам понадобится следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{z}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^\infty$ такие, что $\mathbf{z}, \mathbf{v} \geqslant \mathbf{0}_\infty$ и $Z = \mathbf{z}^T\mathbf{v} < \infty$. Пусть $\ell \geqslant 2$ и $\mathbf{F} = \|f_{ki}\|_{k=1,i=1}^{\ell,\infty}$ — матрица такая, что $f_{ki} \geqslant 0$ для всех k и i. Положим*

$$\mathbf{s} = \mathbf{F}\mathbf{z}. \tag{13}$$

Предположим, что $s_k < \infty$ для всех $1 \leqslant k \leqslant \ell$.

Пусть для некоторого $\mathbf{i} \in \mathbb{N}^\ell$ такого, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell$, вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^\ell$ является решением системы линейных уравнений

$$\mathbf{F}_\mathbf{i}^T \mathbf{a} = \mathbf{v}_\mathbf{i}, \tag{14}$$

где $\mathbf{F_i} = \|f_{ki_q}\|_{k=1,q=1}^{\ell,\ell}$ *и* $\mathbf{v_i} = (v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_\ell})^T$. *Пусть* $\mathbf{z}^* \in \mathbb{R}^\infty$ *— вектор такой, что его подвектор* $\mathbf{z_i^*} = (z_{i_1}^*, z_{i_2}^*, \ldots, z_{i_\ell}^*)^T$ *удовлетворяет системе линейных уравнений*

$$\mathbf{F_i z_i^*} = \mathbf{s} \tag{15}$$

и $z_i^* = 0$ *для всех* $i \in \mathbb{N} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_\ell\}$.

Если $\mathbf{F}^T\mathbf{a} \leqslant \mathbf{v}$, *то* $Z \geqslant Z^* = (\mathbf{z}^*)^T\mathbf{v} = \mathbf{s}^T\mathbf{a}$. *Если* $\mathbf{F}^T\mathbf{a} \geqslant \mathbf{v}$, *то* $Z \leqslant Z^*$.

Если в теореме 3 положить $z_i = z_i^* = v_i = 0$ и $f_{ki} = 0$ для всех $i \geqslant n+1$ и считать, что $i_\ell \leqslant n$, то мы получим теорему 1 из работы автора [2].

Доказательство. Для любого вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^\ell$ такого, что $\mathbf{F}^T\mathbf{a} \leqslant \mathbf{v}$, с учетом соотношения (13) мы имеем $Z = \mathbf{z}^T\mathbf{v} \geqslant \mathbf{z}^T\mathbf{F}^T\mathbf{a} = \mathbf{s}^T\mathbf{a}$. Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{z_i^*}$ — решения систем (14) и (15) соответственно, то мы получим $\mathbf{s}^T\mathbf{a} = (\mathbf{z_i^*})^T\mathbf{F_i}^T\mathbf{a} = (\mathbf{z_i^*})^T\mathbf{v_i} = (\mathbf{z}^*)^T\mathbf{v} = Z^*$. Следовательно, $Z \geqslant Z^*$. Второе неравенство доказывается аналогично. □

Теорема 3 позволяет получать оценки для различных линейных комбинаций координат вектора $\mathbf{z}$. Например, если вектор $\mathbf{v}$ выбрать равным

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0}_r \\ \mathbf{1}_\infty \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{e}_{r+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_r \\ 1 \\ \mathbf{0}_\infty \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $r \geqslant 0$, то в первом случае Z превращается в $\sum_{i \geqslant r+1} z_i$, а во втором — в z_{r+1}. Применяя теорему 3 при $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*$, мы снова получим $\mathbf{z}^*$ и $Z = Z^*$. Поэтому существуют примеры, когда неравенства обращаются в равенства.

В дальнейшем $\mathbf{z}$ будет вектором вероятностей, задающим распределение ξ, а вектор $\mathbf{s}$ будет состоять из моментов этого распределения. Теорема 3 содержит способ построения $\mathbf{z}^*$, задающего заряд ν на $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\ell}\}$ с вектором моментов $\mathbf{s}$. При этом ненулевых координат у $\mathbf{z}^*$ меньше, чем у $\mathbf{z}$, а линейная функция Z при переходе от $\mathbf{z}$ к $\mathbf{z}^*$ возрастает или убывает (в зависимости от условий). Если первая строка матрицы $\mathbf{F}$ состоит из единиц и $\mathbf{z}^* \geqslant \mathbf{0}_\infty$, то ν будет распределением.

3. Доказательства результатов. Положим $\ell = 3$, $\mathbf{z} = (p_0, p_1, \ldots)^T$ и $f_{ki} = x_{i-1}^{k-1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $1 \leqslant k \leqslant \ell$. Тогда $s_1 = 1$, $s_2 = \mu_1$ и $s_3 = \mu_2$.

При любом выборе вектора $\mathbf{i}$ матрица

$$\mathbf{F_i} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{i_1-1} & x_{i_2-1} & x_{i_3-1} \\ x_{i_1-1}^2 & x_{i_2-1}^2 & x_{i_3-1}^2 \end{pmatrix}$$

невырождена. Решив систему (15), мы получим

$$z_{i_1}^* = \frac{x_{i_2-1}x_{i_3-1} - (x_{i_2-1} + x_{i_3-1})\mu_1 + \mu_2}{(x_{i_2-1} - x_{i_1-1})(x_{i_3-1} - x_{i_1-1})}, \tag{17}$$

$$z_{i_2}^* = \frac{-x_{i_1-1}x_{i_3-1} + (x_{i_1-1} + x_{i_3-1})\mu_1 - \mu_2}{(x_{i_2-1} - x_{i_1-1})(x_{i_3-1} - x_{i_2-1})}, \tag{18}$$

$$z_{i_3}^* = \frac{x_{i_2-1}x_{i_1-1} - (x_{i_2-1} + x_{i_1-1})\mu_1 + \mu_2}{(x_{i_3-1} - x_{i_2-1})(x_{i_3-1} - x_{i_1-1})}. \tag{19}$$

Так как мы строим оценки для $p_r = z_{r+1}$, мы возьмем $\mathbf{v} = \mathbf{e}_{r+1}$ из (16). Тогда для вектора $\mathbf{v_i}$ существуют следующие четыре возможности: $\mathbf{0}_3$, $(0,0,1)^T$, $(0,1,0)^T$

и $(1,0,0)^T$. Если $\mathbf{v_i} = \mathbf{0}_3$, то в силу невырожденности $\mathbf{F_i}$ единственным решением системы (14) будет $\mathbf{a} = \mathbf{0}_3$ и построить нетривиальную оценку для p_r невозможно. Поэтому далее мы рассматриваем $\mathbf{v_i} \neq \mathbf{0}_3$.

Доказательство теоремы 1. Положим $\mathbf{b} = \mathbf{F}^T\mathbf{a}$. Точки (x_u, b_u) для всех u лежат на части параболы $g(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$, расположенной над $[0,\infty)$ или $[0, x_n]$. Для оценки сверху нужно, чтобы $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{v}$, т. е. $b_u \geqslant 0$ для всех u и $b_{r+1} \geqslant 1$.

Вектор $\mathbf{i}$ определяется системой (14) и вектором $\mathbf{v_i}$, выбранным из перечисленных выше трех возможных. Из (14) следует, что одно из $b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}$ равно 1, а два других равны нулю. При этом i_k, для которого $b_{i_k} = 1$, должен быть равным $r+1$, а k совпадать с номером координаты $\mathbf{v_i}$, равной 1.

Пусть ξ не ограничена. Тогда ветви параболы $g(x)$ могут быть направлены только вверх. Рассмотрим все три варианта выбора $\mathbf{v_i}$.

Пусть $\mathbf{v_i} = (0,0,1)^T$. Так как $\mathbf{v_i}$ — подвектор $\mathbf{v}$, в этом случае $r \geqslant 2$ и $i_1 < i_2 < i_3 = r+1$. Кроме того, $i_2 = i_1 + 1$. Последнее равенство следует из того, что ветви параболы $g(x)$ направлены вверх и $g(x_{i_1}) = g(x_{i_2}) = 0$. Если бы между x_{i_1} и x_{i_2} было бы какое-либо значение x_k, то выполнялось бы неравенство $b_k = g(x_k) < 0$. Это противоречит тому, что $b_u \geqslant 0$ для всех u. Таким образом, $\mathbf{i} = (m, m+1, r+1)$, где $1 \leqslant m \leqslant r-1$. Здесь m — параметр, который позволяет оптимизировать оценку. Из соотношений (17)–(19) мы получим

$$z_m^* = \frac{x_m x_r - (x_m + x_r)\mu_1 + \mu_2}{(x_m - x_{m-1})(x_r - x_{m-1})}, \quad z_{m+1}^* = \frac{-x_{m-1}x_r + (x_{m-1} + x_r)\mu_1 - \mu_2}{(x_m - x_{m-1})(x_r - x_m)},$$
$$z_{r+1}^* = \frac{x_m x_{m-1} - (x_m + x_{m-1})\mu_1 + \mu_2}{(x_r - x_m)(x_r - x_{m-1})}.$$

По теореме 3 мы имеем $p_r \leqslant z_{r+1}^*$, и неравенство (1) доказано при $1 \leqslant m \leqslant r-1$. В частности, отсюда следует, что $z_{r+1}^* \geqslant 0$. Если $x_r > \mu_2/\mu_1$ и m удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant m \leqslant r-1$ и (2), то $z_m^* \geqslant 0$ и $z_{m+1}^* \geqslant 0$. При этом для распределения на трех точках x_{m-1}, x_m и x_r с вероятностями $p_{m-1}^* = z_m^*$, $p_m^* = z_{m+1}^*$ и $p_r^* = z_{r+1}$ неравенство (1) обращается в равенство.

Пусть $\mathbf{v_i} = (0,1,0)^T$. В этом случае $r \geqslant 1$ и $i_1 < i_2 = r+1 < i_3$. Последнее невозможно, так как ветви параболы $g(x)$ направлены вверх.

Пусть $\mathbf{v_i} = (1,0,0)^T$. Тогда $r \geqslant 0$ и $i_1 = r+1 < i_2 < i_3$. Кроме того, $i_3 = i_2 + 1$. Последнее равенство имеет место в силу тех же аргументов, что и в первом случае. Поэтому $\mathbf{i} = (r+1, m, m+1)$, где $m \geqslant r+2$. Из соотношений (17)–(19) мы получим

$$z_{r+1}^* = \frac{x_{m-1}x_m - (x_{m-1} + x_m)\mu_1 + \mu_2}{(x_{m-1} - x_r)(x_m - x_r)},$$
$$z_m^* = \frac{-x_r x_m + (x_r + x_m)\mu_1 - \mu_2}{(x_{m-1} - x_r)(x_m - x_{m-1})}, \quad z_{m+1}^* = \frac{x_{m-1}x_r - (x_{m-1} + x_r)\mu_1 + \mu_2}{(x_m - x_{m-1})(x_m - x_r)}.$$

По теореме 3 для $m \geqslant r+2$ мы приходим к неравенству $p_r \leqslant z_{r+1}^*$, совпадающему с (1). В частности, отсюда следует, что $z_{r+1}^* \geqslant 0$. Если $x_r < \mu_1$ и m удовлетворяет неравенствам $m \geqslant r+2$ и (2), то $z_m^* \geqslant 0$ и $z_{m+1}^* \geqslant 0$. Поэтому для распределения на трех точках x_r, x_{m-1} и x_m с вероятностями $p_r^* = z_{r+1}$, $p_{m-1}^* = z_m$ и $p_m^* = z_{m+1}$ оценка (1) превращается в равенство.

Итак, неравенство (1) выполнено для всех m кроме r и $r+1$. Пусть $x_r > \mu_2/\mu_1$. Для $m \geqslant r+2$ среднее распределения на x_r, x_{m-1} и x_m больше или равно x_r. Для оптимального m это среднее равно $\mu_1 < \mu_2/\mu_1$. Поэтому оптимальное m меньше r. Аналогично при $x_r < \mu_1$ оптимальное m больше $r+1$.

Предположим, что ξ имеет конечное множество значений $x_0, x_1, \ldots, x_n$. При этом ветви параболы $g(x)$ могут быть направлены и вниз, так как неотрицательность $g(x)$ требуется лишь на x_k из интервала $[x_0, x_n]$, а не из луча $[x_0, \infty)$. Поэтому случай $\mathbf{v_i} = (0,1,0)^T$ станет возможным.

Случаи $\mathbf{v_i} = (0,0,1)^T$ и $\mathbf{v_i} = (1,0,0)^T$ рассматриваются так же, как выше для неограниченных величин. Далее положим $\mathbf{v_i} = (0,1,0)^T$. Тогда $1 \leqslant r \leqslant n-1$ и $\mathbf{i} = (1, r+1, n+1)$. Из соотношений (17)–(19) мы получим

$$z_1^* = \frac{x_r x_n - (x_r + x_n)\mu_1 + \mu_2}{x_r x_n}, \quad z_{r+1}^* = \frac{x_n \mu_1 - \mu_2}{x_r(x_n - x_r)}, \quad z_{n+1}^* = \frac{-x_r\mu_1 + \mu_2}{(x_n - x_r)x_n}.$$

По теореме 3 мы имеем $p_r \leqslant z_{r+1}^*$, и неравенство (3) доказано. Так как $\mu_2 \leqslant x_n\mu_1$, мы имеем $z_{r+1}^* \geqslant 0$. Из неравенства (4) следует, что $z_1^* \geqslant 0$ и $z_{n+1}^* \geqslant 0$. Равенство в оценке (3) достигается на распределении, сосредоточенном на трех точках 0, x_r и x_n с вероятностями p_0^*, p_r^* и p_n^*, где $p_{i-1}^* = z_i^*$ для всех i. □

Доказательство теоремы 2. Положим $\mathbf{b} = \mathbf{F}^T\mathbf{a}$. Точки (x_u, b_u) для всех u лежат на части параболы $g(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$, расположенной над $[0, \infty)$ или $[0, x_n]$. Для получения оценки p_r снизу нужно, чтобы $\mathbf{b} \leqslant \mathbf{v}$, т. е. $b_u \leqslant 0$ для всех u и $b_{r+1} \leqslant 1$.

Вектор $\mathbf{i}$ определяется системой (14) и вектором $\mathbf{v_i}$, выбранным из перечисленных выше трех возможных. Из (14) следует, что одно из $b_{i_1}, b_{i_2}, b_{i_3}$ равно 1, а два других — нулю. При этом $b_{i_k} = 1$ для $i_k = r+1$, где k — номер координаты $\mathbf{v_i}$, равной 1.

Предположим, что ξ не ограничена. Тогда ветви параболы $g(x)$ могут быть направлены только вниз. Рассмотрим все три возможности выбора $\mathbf{v_i}$.

Пусть $\mathbf{v_i} = (0,0,1)^T$. В этом случае $r \geqslant 2$ и $i_1 < i_2 < i_3 = r+1$. Так как ветви параболы $g(y)$ направлены вниз, невозможно одновременное выполнение равенств $b_{i_1} = 0, b_{i_2} = 0, b_{i_3} = 1$. Аналогична ситуация для $\mathbf{v_i} = (1,0,0)^T$.

Пусть $\mathbf{v_i} = (0,1,0)^T$. В этом случае $r \geqslant 1$, $i_1 = r$, $i_2 = r+1$, $i_3 = r+2$. Если бы индекс i_1 не был соседним с i_2, то выполнялось бы неравенство $b_u > 0$ для $i_1 < u < i_2$. По той же причине $i_3 = i_2 + 1$. Следовательно, $\mathbf{i} = (r, r+1, r+2)$. Из соотношений (17)–(19) мы получим

$$z_r^* = \frac{x_r x_{r+1} - (x_r + x_{r+1})\mu_1 + \mu_2}{(x_r - x_{r-1})(x_{r+1} - x_{r-1})}, \quad z_{r+1}^* = \frac{-x_{r-1}x_{r+1} + (x_{r-1} + x_{r+1})\mu_1 - \mu_2}{(x_r - x_{r-1})(x_{r+1} - x_r)},$$
$$z_{r+2}^* = \frac{x_r x_{r-1} - (x_r + x_{r-1})\mu_1 + \mu_2}{(x_{r+1} - x_r)(x_{r+1} - x_{r-1})}.$$

По теореме 3 мы имеем $p_r \geqslant z_{r+1}^*$, и неравенство (9) доказано. Если $x_{r-1} < \mu_1$, $x_{r+1} > \mu_2/\mu_1$ и выполняется неравенство (10), то $z_r^* \geqslant 0$ и $z_{r+1}^* \geqslant 0$.

Положим $p_{i-1}^* = z_i^*$ для всех i. Для распределения на трех точках x_{r-1}, x_r и x_{r+1} с вероятностями p_{r-1}^*, p_r^* и p_{r+1}^* оценка (9) превращается в равенство.

Предположим, что ξ имеет конечное множество значений $x_0, x_1, \ldots, x_n$. При этом ветви параболы $g(x)$ могут быть направлены и вверх, так как неположительность $g(x)$ требуется на x_k из интервала $[x_0, x_n]$, а не луча $[x_0, \infty)$. Поэтому возможны случаи $\mathbf{v_i} = (0,0,1)^T$ и $\mathbf{v_i} = (1,0,0)^T$.

Пусть $\mathbf{v_i} = (0, 0, 1)^T$. Тогда возможно лишь $i_1 = 1$, $i_2 = n$, $i_3 = n + 1$. Следовательно, $r = n$ и $\mathbf{i} = (1, n, n + 1)$. Из соотношений (17)–(19) мы получим

$$z_1^* = \frac{x_{n-1}x_n - (x_{n-1} + x_n)\mu_1 + \mu_2}{x_{n-1}x_n}, \quad z_n^* = \frac{x_n\mu_1 - \mu_2}{x_{n-1}(x_n - x_{n-1})}, \quad z_{n+1}^* = \frac{-x_{n-1}\mu_1 + \mu_2}{(x_n - x_{n-1})x_n}.$$

По теореме 3 имеем $p_n \geqslant z_{n+1}^*$, и первое неравенство в (11) доказано. Так как $x_n\mu_1 \geqslant \mu_2$, мы получим $z_n^* \geqslant 0$. Если выполняется первое неравенство в (12), то $z_1^* \geqslant 0$ и $z_{n+1}^* \geqslant 0$. Кроме того, в полученной оценке достигается равенство для распределения на трех точках 0, x_{n-1} и x_n с вероятностями p_0^*, p_{n-1}^* и p_n^*, где $p_{i-1}^* = z_i^*$ для всех i.

Пусть $\mathbf{v_i} = (1, 0, 0)^T$. Тогда возможно только $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = n + 1$. Следовательно, $r = 0$ и $\mathbf{i} = (1, 2, n + 1)$. Из соотношений (17)–(19) мы имеем

$$z_1^* = \frac{x_1x_n - (x_1 + x_n)\mu_1 + \mu_2}{x_1x_n}, \quad z_2^* = \frac{x_n\mu_1 - \mu_2}{x_r(x_n - x_1)}, \quad z_{n+1}^* = \frac{-x_1\mu_1 + \mu_2}{(x_n - x_1)x_n}.$$

По теореме 3 получим $p_0 \geqslant z_1^*$, и второе неравенство в (11) доказано. Так как $x_n\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant x_1\mu_1$, мы имеем $z_2^* \geqslant 0$ и $z_{n+1}^* \geqslant 0$. Если выполняется второе неравенство в (12), то $z_1^* \geqslant 0$. Кроме того, в полученной оценке достигается равенство для распределения на трех точках 0, x_1 и x_n с вероятностями p_0^*, p_1^* и p_n^*, где $p_{i-1}^* = z_i^*$ для всех i. □

Автор благодарен анонимным рецензентам за ряд замечаний, способствовавших улучшению текста статьи.

Литература

1. Frolov A. N. On inequalities for values of first jumps of distribution functions and Hölder's inequality. *Statist. Probab. Lett.* **126**, 150–156 (2017).

2. Фролов А. Н. Об оценках для вероятностей комбинаций событий, формуле Жордана и неравенствах Бонферрони. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6** (64), вып. 2, 253–264 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.20

3. Frolov A. N. On upper and lower bounds for probabilities of combinations of events. *Statist. Probab. Lett.* 109073 (2021).

Статья поступила в редакцию 22 ноября 2023 г.;
доработана 16 февраля 2023 г.;
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

Контактная информация:

Фролов Андрей Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.; Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

On estimation of values of jumps for discrete distribution functions*

A. N. Frolov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Frolov A. N. On estimation of values of jumps for discrete distribution functions. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 517–525. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.308 (In Russian)

*The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00078).

We obtain new inequalities for values of jumps for discrete distribution functions. Values of jumps are bounded by linear combinations of a finite number of moments of the distributions. Obtained inequalities can be used for estimation of ranges for values of improbable jumps when frequencies are zero and are not interesting as estimators. We discuss relationships of derived inequalities with inequalities for probabilities of unions of events and the Caushy — Bunyakovski and Hölder inequalities as well.

Keywords: Bonferroni inequalities, probabilities of unions of events, probabilities of combinations of events, Caushy — Bunyakovski inequality, Hölder inequality, value of jump of distribution function.

References

1. Frolov A. N. On inequalities for values of first jumps of distribution functions and Hölder's inequality. *Statist. Probab. Lett.* **126**, 150–156 (2017).

2. Frolov A. N. On estimates for probabilities of combinations of events, the Jordan formula and the Bonferroni inequalities. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (64), iss. 2, 253–264 (2019). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.20 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **52** (2), 178–186 (2019). https://doi.org/10.1134/S1063454119040058].

3. Frolov A. N. On upper and lower bounds for probabilities of combinations of events. *Statist. Probab. Lett.* 109073 (2021).

Received: November 22, 2023
Revised: February 16, 2023
Accepted: February 22, 2024

Author's information:

Andrei N. Frolov — Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru