УДК 517.535 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3
MSC 30E10, 30G35, 16K20, SDG4

О границах нулей кватернионных полиномов с ограниченными коэффициентами

А. Хусейн[1], *И. А. Вани*[2]

[1] Кашмирский университет, Индия, 190006, Сринагар
[2] Школа химических и физических наук, Профессиональный университет Лавли, Индия, 144411, Пенджаб

Для цитирования: *Хусейн А., Вани И. А.* О границах нулей кватернионных полиномов с ограниченными коэффициентами // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 526–536.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.309

Основная цель статьи — исследовать расширения классической теоремы Энестрема — Какейя и ее различные обобщения относительно распределения нулей полиномов с переходом от комплексной области к кватернионному контексту.

Ключевые слова: кватернионный полином, нули, теорема Энестрема — Какейя.

1. Введение. В области математики исследование нулей полиномов имеет богатую и продолжительную историю. Исследование распределения нулей полиномиальных функций в рамках геометрической теории функций представляет собой предмет значительного интереса как в математическом сообществе, так и в практических приложениях, таких как изучение физических систем. Помимо многочисленных применений эта область исследований послужила катализатором обширных исследований, охватывающих как теоретические, так и практические аспекты. Поскольку нули полинома непрерывно зависят от его коэффициентов, определение границ нормы нулей для общего алгебраического полинома обычно является сложной задачей. Чтобы получить более точные и уточненные оценки, полезно наложить ограничения на полиномиальные коэффициенты. Это направление исследований восходит к эпохе, когда в математике было введено геометрическое представление комплексных чисел, причем заметный вклад внесли такие пионеры подобных исследований, как Гаусс и Коши. Классический результат Коши [1] о распределении нулей полинома можно сформулировать следующим образом.

Теорема A. *Если $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ — полином степени n, то все нули p лежат в*

$$|z| < 1 + \max_{1 \le v \le n-1} \left| \frac{a_v}{a_n} \right|.$$

Несмотря на то, что в литературе существуют данные о границах для нулей полинома (см., например, [2, 3]), то, что отличает оценку, представленную в теореме A, — это ее заметная вычислительная простота. Однако за простоту вычислений приходится платить ценой точности. Теорема Энестрема — Какейя, являющаяся элегантным результатом, касающимся распределения нулей при огра-

ничении полиномиальных коэффициентов, хорошо документирована в литературе (см. [2–7]).

Теорема B. *Если* $p(z) = \sum\limits_{v=0}^{n} a_v z^v$ *является полиномом степени* n *(где* z *— комплексная переменная) с действительными коэффициентами, удовлетворяющими*

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_1 \geq a_0 \geq 0,$$

то все нули $p(z)$ *лежат в*

$$|z| \leq 1.$$

Представляется, что Г. Энестрем был первопроходцем в получении такого рода результатов при исследовании проблемы теории пенсионных фондов. По сути, вышеупомянутый результат впервые появился в не столь известной статье Энестрема [8]. Впоследствии Энестрем сделал важнейшие части своей первоначальной статьи доступными мировому математическому сообществу, ссылаясь на нее в своих публикациях с 1893 по 1895 г. Независимо, в 1912 г., С. Какейя [9] достиг того же результата посредством чисто геометрического подхода и в более обобщенной форме. А именно, Какейя установил следующий более общий результат.

Теорема C. *Если* $p(z) = \sum_{v=0}^{n} a_v z^v$ *— полином степени* n *с действительными и положительными коэффициентами, то все нули* p *лежат в кольце*

$$R_1 \leq |z| \leq R_2,$$

где

$$R_1 = \min_{0 \leq v \leq n-1} a_v / a_{v+1}$$

и

$$R_2 = \max_{0 \leq v \leq n-1} a_v / a_{v+1}.$$

Теорема Энестрема — Какейя имеет особое значение при исследовании устойчивости численных методов решения дифференциальных уравнений. В результате теорема подверглась различным расширениям, включая адаптацию для комплексных коэффициентов с ограниченными аргументами. В литературе можно найти многочисленные расширения и обобщения теоремы Энестрема — Какейя, о чем свидетельствуют работы [10–12]. Для всестороннего обзора этих расширений и уточнений читатели могут обратиться к подробным обзорам, представленным в книгах Мардена [2] и Миловановича [3] и др.

В 1967 г. Джоял, Лабелль и Рахман [12] опубликовали результат, который стал фундаментальным вкладом в современные исследования. Теорема Энестрема — Какейя, сформулированная выше в теореме B, касается полиномов с неотрицательными коэффициентами, образующих монотонную последовательность. Джоял, Лабелль и Рахман расширили теорему B, ослабив условие неотрицательности, сохранив при этом требование монотонности. В частности, они получили следующий результат.

Теорема D. *Если* $p(z)=\sum\limits_{v=0}^{n} a_v z^v$ *является полиномом степени* n *(где* z *— комплексная переменная) с действительными коэффициентами, удовлетворяющими*

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_1 \geq a_0,$$

то все нули $p(z)$ *лежат в*

$$|z| \leq \frac{a_n - a_0 + |a_0|}{|a_n|}.$$

Разумеется, при $a_0 \geq 0$ *теорема D сводится к теореме B. Исследование оценок расположения нулей на основе коэффициентов, особенно с акцентом на распределение нулей алгебраических полиномов с ограниченными коэффициентами, было предметом интенсивных исследований со второй половины XIX в. В этой области достигнуты заметные успехи. Теорема Энестрема — Какейя и ее различные обобщения, как подчеркивалось ранее, выделяются в этом контексте как классические и важные примеры. Учитывая богатство результатов, полученных при сложных условиях, возникает естественный вопрос относительно возможных результатов для кватернионов. В данной статье мы рассматриваем этот вопрос, представляя расширение кватернионной области некоторых классических результатов, подобных тем, к которым относятся теорема Энестрема — Какейя и ее вариации.*

2. Исходные понятия. Чтобы заложить основу для нашей работы, давайте предоставим некоторые основополагающие понятия о кватернионах, которые будут полезны в последующем обсуждении. Кватернионы представляют собой обобщение комплексных чисел на четыре измерения, включающее одну действительную часть и три мнимые части. Сэр Роуэн Уильям Гамильтон впервые исследовал и разработал эту систему счисления в 1843 г., и в знак признания вклада Гамильтона она обозначена $\mathbb{H}$. Теория кватернионов получила всестороннее развитие в различных направлениях, и для детального понимания ее фундаментальных аспектов мы рекомендуем обратиться к [13–17].

Прежде чем углубляться в анализ, необходимо ввести некоторые предварительные понятия, касающиеся кватернионов. Набор кватернионов, обозначаемый $\mathbb{H}$, представляет собой некоммутативное тело. Оно состоит из элементов вида $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, где мнимые единицы i, j, k удовлетворяют $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$. Каждый элемент $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k \in \mathbb{H}$ состоит из вещественной части $\mathrm{Re}(q) = \alpha$ и мнимой части $\mathrm{Im}(q) = \beta i + \gamma j + \delta k$. Сопряженный с q элемент обозначается $\overline{q}$ и определяется как $\overline{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$, а норма q равна $|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2}$. Обратный к каждому ненулевому элементу q из $\mathbb{H}$ задается выражением $q^{-1} = |q|^{-2}\overline{q}$. При $r > 0$ определим шар $B(0, r) = \{q \in \mathbb{H}; |q| < r\}$.

Совсем недавно Карни и др. [18] доказали следующее расширение теоремы B для кватернионного полинома $p(q)$. Точнее, авторы доказали следующий результат.

Теорема E. *Если* $p(q) = \sum\limits_{v=0}^{n} q^v a_v$ *является полиномом степени* n *(где* q *— кватернионная переменная) с действительными коэффициентами, удовлетворяющими*

$$a_n \geq a_{n-1} \geq \ldots \geq a_1 \geq a_0 \geq 0,$$

то все нули $p(q)$ лежат в

$$|q| \leq 1.$$

Они также доказали следующий результат, аналогичный теореме D, но вместо полиномов с монотонно возрастающими действительными коэффициентами он рассматривает кватернионные полиномы с монотонно возрастающими вещественными и мнимыми частями, что дает, таким образом, кватернионный аналог теоремы D.

Теорема F. *Если $p(q) = \sum\limits_{v=0}^{n} q^v a_v$ является полиномом степени n (где q — кватернионная переменная) с кватернионными коэффициентами, где $a_v = \alpha_v + \beta_v i + \gamma_v j + \delta_v k$ для $v = 0, 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют*

$$\begin{aligned}
&\alpha_n \geq \alpha_{n-1} \geq \ldots \geq \alpha_1 \geq \alpha_0,\\
&\beta_n \geq \beta_{n-1} \geq \ldots \geq \beta_1 \geq \beta_0,\\
&\gamma_n \geq \gamma_{n-1} \geq \ldots \geq \gamma_1 \geq \gamma_0,\\
&\delta_n \geq \delta_{n-1} \geq \ldots \geq \delta_1 \geq \delta_0,
\end{aligned}$$

то все нули $p(q)$ лежат в

$$|q| \leq \frac{(|\alpha_0| - \alpha_0 + \alpha_n) + (|\beta_0| - \beta_0 + \beta_n) + (|\gamma_0| - \gamma_0 + \gamma_n) + (|\delta_0| - \delta_0 + \delta_n)}{|a_n|}.$$

Тем временем Трипати [19], помимо доказательства некоторых других результатов, также установил следующее обобщение теоремы F.

Теорема G. *Пусть $p(q) = \sum\limits_{v=0}^{n} q^v a_v$ — полином степени n (где q — кватернионная переменная) с кватернионными коэффициентами, где $a_v = \alpha_v + \beta_v i + \gamma_v j + \delta_v k$ для $v = 0, 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют*

$$\begin{aligned}
&\alpha_n \geq \alpha_{n-1} \geq \ldots \geq \alpha_l,\\
&\beta_n \geq \beta_{n-1} \geq \ldots \geq \beta_l,\\
&\gamma_n \geq \gamma_{n-1} \geq \ldots \geq \gamma_l,\\
&\delta_n \geq \delta_{n-1} \geq \ldots \geq \delta_l
\end{aligned}$$

при $0 \leq l \leq n$, то все нули $p(q)$ лежат в

$$|q| \leq \frac{1}{|a_n|}\Big[|\alpha_0| + |\beta_0| + |\gamma_0| + |\delta_0| + (\alpha_n - \alpha_l) + (\beta_n - \beta_l) + (\gamma_n - \gamma_l) + (\delta_n - \delta_l) + M_l\Big],$$

где $M_l = \sum\limits_{v=1}^{l} \Big[|\alpha_v - \alpha_{v-1}| + |\beta_v - \beta_{v-1}| + |\gamma_v - \gamma_{v-1}| + |\delta_v - \delta_{v-1}|\Big].$

Примечание. При $l = 0$ теорема G сводится к теореме F.

3. Основные результаты. В этом разделе мы представляем наши основные результаты, оставляя подробные доказательства для следующего раздела. Начнем со следующего результата, который, как частный случай, дает более широкую интерпретацию теоремы D.

Теорема 1. *Если* $p(q) = \sum\limits_{v=0}^{n} q^v a_v$ *— кватернионный полином степени* n *с действительными коэффициентами* $a_v,\ v = 0, 1, 2, \ldots, n$ *и для некоторых* $k_v \geq 1,\ v = 0, 1, 2, \ldots, r,\ 0 \leq r \leq n-1$, *есть*

$$k_0 a_n \geq k_1 a_{n-1} \geq k_2 a_{n-2} \geq \ldots \geq k_{r-1} a_{n-r+1} \geq k_r a_{n-r} \geq a_{n-r-1} \geq \ldots \geq a_1 \geq a_0,$$

то все нули p *лежат в*

$$|q| \leq \frac{1}{|a_n|}\left\{k_0(|a_n| + a_n) + 2\sum_{v=1}^{r}(k_v - 1)|a_{n-v}| - a_0 + |a_0| - |a_n|\right\}.$$

Если мы возьмем $k_v = 1,\ v = 0, 1, 2, \ldots, r$ *в теореме 1, мы получим следующий результат, который является расширением теоремы D от комплексной до кватернионной ситуации.*

Отметим, что это следствие является частным случаем результата Трипати ([19, теорема 3.9]).

Следствие 1. Если $p(q) = \sum\limits_{v=0}^{n} q^v a_v$ — кватернионный полином степени n с действительными коэффициентами $a_v,\ v = 0, 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют

$$a_n \geq a_{n-1} \geq a_{n-2} \geq \ldots \geq a_1 \geq a_0,$$

то все нули p лежат в

$$|q| \leq \frac{1}{|a_n|}(a_n - a_0 + |a_0|).$$

Полагая $a_0 > 0$ в следствии 1, получаем теорему E.

Теорема 2. *Если* $p(q) = \sum\limits_{v=0}^{n} q^v a_v$ *— кватернионный полином степени* n *с кватернионными коэффициентами* $a_v = \alpha_v + \beta_v i + \gamma_v j + \delta_v k$ *для* $v = 0, 1, 2, \ldots, n$ *и для некоторых* $k_v \geq 1,\ v = 0, 1, 2, \ldots, r,\ 0 \leq r \leq n-1$, *есть*

$$k_0 \alpha_n \geq k_1 \alpha_{n-1} \geq k_2 \alpha_{n-2} \geq \ldots \geq k_{r-1} \alpha_{n-r+1} \geq k_r \alpha_{n-r} \geq \alpha_{n-r-1} \geq \ldots \geq \alpha_1 \geq \alpha_0,$$

то все нули p *лежат в*

$$|q| \leq \frac{1}{|a_n|}\left\{k_0(|\alpha_n| + \alpha_n) + 2\sum_{v=1}^{r}(k_v - 1)|\alpha_{n-v}| - \alpha_0 + |\alpha_0| - |\alpha_n| + L\right\},$$

где

$$L = 2\sum_{v=0}^{n}(|\beta_v| + |\gamma_v| + |\delta_v|).$$

Установив $\beta_v = \gamma_v = \delta_v = 0$ при $v = 0, 1, 2, \ldots, n$ в теореме 2, мы восстанавливаем теорему 1. Аналогично, взяв $k_v = 1,\ v = 0, 1, 2, \ldots, r$ в теореме 2, получим следующий результат.

Следствие 2. Если $p(q) = \sum\limits_{v=0}^{n} q^v a_v$ является кватернионным полиномом степени n, где $a_v = \alpha_v + \beta_v i + \gamma_v j + \delta_v k$ для $v = 0, 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют

$$\alpha_n \geq \alpha_{n-1} \geq \alpha_{n-2} \geq \ldots \geq \alpha_1 \geq \alpha_0,$$

то все нули p лежат в

$$|q| \leq \frac{1}{|a_n|} \Big\{ \alpha_n - \alpha_0 + |\alpha_0| + L \Big\},$$

где L определен в теореме 2.

Если в следствии 2 мы предположим $\alpha_0 > 0$ и воспользуемся тем фактом, что $\alpha_n \leq |a_n|$, мы получим следующее обобщение теоремы E (см. также Карни и др. [18, теорема 11]).

Следствие 3. Если $p(q) = \sum\limits_{v=0}^{n} q^v a_v$ является кватернионным полиномом степени n, где $a_v = \alpha_v + \beta_v i + \gamma_v j + \delta_v k$ для $v = 0, 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют

$$\alpha_n \geq \alpha_{n-1} \geq \ldots \geq \alpha_1 \geq \alpha_0 > 0,$$

то все нули p лежат в

$$|q| \leq 1 + \frac{2}{\alpha_n} \sum_{v=0}^{n} (|\beta_v| + |\gamma_v| + |\delta_v|).$$

4. Доказательства основных результатов. Для доказательства основных результатов нам понадобится следующая лемма Джентили и Стоппато [20].

Лемма 1. *Если $f(q) = \sum\limits_{v=0}^{\infty} q^v a_v$ и $g(q) = \sum\limits_{v=0}^{\infty} q^v b_v$ — два заданных кватернионных степенных ряда с радиусом сходимости больше R. Регулярное произведение $f(q)$ и $g(q)$ определяется как $(f \star g)(q) = \sum\limits_{v=0}^{\infty} q^v c_v$, где $c_v = \sum\limits_{l=0}^{v} a_l b_{v-l}$. Пусть $|q_0| < R$, тогда $(f \star g)(q_0) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(q_0) = 0$ или $f(q_0) \neq 0$ влечет $g(f(q_0)^{-1} q_0 f(q_0)) = 0$.*

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим полином:

$$f(q) = \sum_{v=1}^{n} q^v (a_v - a_{v-1}) + a_0.$$

Имеем $p(q) \star (1 - q) = f(q) - q^{n+1} a_n$, поэтому по лемме 1 $p(q) \star (1 - q) = 0$ тогда и только тогда, когда $p(q) = 0$ или $p(q) \neq 0$, что влечет $p(q)^{-1} q p(q) - 1 = 0$, т. е. $p(q)^{-1} q p(q) = 1$. Если $p(q) \neq 0$, то $q = 1$. Следовательно, единственные нули $p(q) \star (1 - q)$ — это $q = 1$ и нули $p(q)$.

Для $|q| = 1$ имеем

$$|f(q)| = |q^n (a_n - a_{n-1}) + \ldots + q^{n-r} (a_{n-r} - a_{n-r-1}) + \ldots + q(a_1 - a_2) + a_0| =$$

$$= \Big| q^n \big(k_0 a_n - k_1 a_{n-1} - (k_0 - 1) a_n + (k_1 - 1) a_{n-1} \big) +$$

$$+ q^{n-1}\big(k_1a_{n-1} - k_2a_{n-2} - (k_1-1)a_{n-1} + (k_2-1)a_{n-2}\big)+$$
$$+ \ldots + q^{n-r-1}\big(k_{r-1}a_{n-r+1} - k_ra_{n-r} - (k_{r-1}-1)a_{n-r+1} + (k_r-1)a_{n-r}\big)+$$
$$+ q^{n-r}\big(k_ra_{n-r} - a_{n-r-1} - (k_r-1)a_{n-r}\big) + q^{n-r-1}(a_{n-r-1} - a_{n-r-2})+$$
$$+ \ldots + q^2(a_2-a_1) + q(a_1-a_0) + a_0\Big| =$$
$$= \Big| - (k_0-1)q^na_n + q^n(k_0a_n - k_1a_{n-1}) + (k_1-1)q^na_{n-1} + q^{n-1}(k_1a_{n-1} - k_2a_{n-2})-$$
$$- q^{n-1}(k_1-1)a_{n-1} + (k_2-1)q^{n-1}a_{n-2} + \ldots + q^{n-r+1}(k_{r-1}a_{n-r+1} - k_ra_{n-r})-$$
$$- (k_{r-1}-1)q^{n-r+1}a_{n-r+1} + (k_r-1)q^{n-r-1}a_{n-r} + q^{n-r}(k_ra_{n-r} - a_{n-r-1})-$$
$$-(k_r-1)q^{n-r}a_{n-r} + q^{n-r-1}(a_{n-r-1}-a_{n-r-2}) + \ldots + q^2(a_2-a_1) + q(a_1-a_0) + a_0\Big| \le$$
$$\le (k_0-1)|a_n| + k_0a_n - k_1a_{n-1} + (k_1-1)|a_{n-1}| + k_1a_{n-1} - k_2a_{n-2} + (k_1-1)|a_{n-1}|+$$
$$+ (k_2-1)|a_{n-2}| + \ldots + k_{r-1}a_{n-r+1} - k_ra_{n-r} + (k_{r-1}-1)|a_{n-r+1}| + (k_r-1)|a_{n-r}|+$$
$$+ k_ra_{n-r} - a_{n-r+1} + (k_r-1)|a_{n-r}| + a_{n-r-1} - a_{n-r-2} + \ldots + a_2 - a_1 + a_1 - a_0 + |a_0| =$$
$$= k_0(|a_n| + a_n) + 2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|a_{n-v}| - a_0 + |a_0| - |a_n|.$$

Поскольку

$$\max_{|q|=1}\left|q^n \star f\left(\frac{1}{q}\right)\right| = \max_{|q|=1}\left|f\left(\frac{1}{q}\right)\right| = \max_{|q|=1}|f(q)|,$$

следовательно, $q^n \star f\left(\frac{1}{q}\right)$ имеет ту же границу для $|q| = 1$, что и $f(q)$, т. е.

$$\left|q^n \star f\left(\frac{1}{q}\right)\right| \le k_0(|a_n| + a_n) + 2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|a_{n-v}| - a_0 + |a_0| - |a_n| \quad \text{for} \quad |q| = 1.$$

Применяя теорему о максимальном модуле [21, теорема 3.4], получаем, что

$$\left|q^n \star f\left(\frac{1}{q}\right)\right| \le k_0(|a_n| + a_n) + 2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|a_{n-v}| - a_0 + |a_0| - |a_n| \quad \text{for} \quad |q| \le 1.$$

Заменив q на $\frac{1}{q}$, получим для $|q| \ge 1$

$$|f(q)| \le \left\{k_0(|a_n| + a_n) + 2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|a_{n-v}| - a_0 + |a_0| - |a_n|\right\}|q|^n. \tag{1}$$

Но $|p(q) \star (1-q)| = |f(q) - q^{n+1}a_n| \ge |a_n||q|^{n+1} - |f(q)|$.

Используя (1), мы имеем для $|q| \ge 1$

$$|p(q) \star (1-q)| \ge |a_n||q|^{n+1} - \left\{k_0(|a_n| + a_n) + 2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|a_{n-v}| - a_0 + |a_0| - |a_n|\right\}|q|^n.$$

Отсюда следует, что $|p(q) \star (1-q)| > 0$, т.е. $p(q) \star (1-q) \ne 0$, если

$$|q| > \frac{1}{|a_n|}\left\{k_0(|a_n| + a_n) + 2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|a_{n-v}| - a_0 + |a_0| - |a_n|\right\}.$$

Поскольку единственными нулями $p(q) \star (1-q)$ являются $q=1$ и нули $p(q)$, то $p(q) \neq 0$ для

$$|q| > \frac{1}{|a_n|}\left\{k_0(|a_n|+a_n) + 2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|a_{n-v}| - a_0 + |a_0| - |a_n|\right\}.$$

Следовательно, все нули $p(q)$ лежат в

$$|q| \leq \frac{1}{|a_n|}\left\{k_0(|a_n|+a_n) + 2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|a_{n-v}| - a_0 + |a_0| - |a_n|\right\}.$$

Это завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим полином:

$$f(q) = \sum_{v=1}^{n} q^v(a_v - a_{v-1}) + a_0.$$

Имеем $p(q) \star (1-q) = f(q) - q^{n+1}a_n$, поэтому по лемме 1 $p(q) \star (1-q) = 0$ тогда и только тогда, когда $p(q) = 0$ или $p(q) \neq 0$, что влечет $p(q)^{-1}qp(q) - 1 = 0$, т. е. $p(q)^{-1}qp(q) = 1$. Если $p(q) \neq 0$, то $q = 1$. Поэтому единственные нули $p(q) \star (1-q)$ — это $q=1$ и нули $p(q)$.

Для $|q| = 1$ имеем

$$|f(q)| \leq |a_0| + \sum_{v=1}^{n}|a_v - a_{v-1}| \leq |\alpha_0| + |\beta_0| + |\gamma_0| + |\delta_0| + \sum_{v=1}^{n}|\alpha_v - \alpha_{v-1}| +$$

$$+ \sum_{v=1}^{n}\left\{|\beta_v - \beta_{v-1}| + |\gamma_v - \gamma_{v-1}| + |\delta_v - \delta_{v-1}|\right\} \leq$$

$$\leq |\alpha_0| + |\beta_0| + |\gamma_0| + |\delta_0| + \sum_{v=0}^{n-1}|\alpha_{n-v} - \alpha_{n-v-1}| +$$

$$+ \sum_{v=1}^{n}\left\{|\beta_v| + |\beta_{v-1}| + |\gamma_v| + |\gamma_{v-1}| + |\delta_v| + |\delta_{v-1}|\right\} =$$

$$= |\alpha_0| + \sum_{v=r+1}^{n-1}|\alpha_{n-v} - \alpha_{n-v-1}| + 2\sum_{v=0}^{n}\left\{|\beta_v| + |\gamma_v| + |\delta_v|\right\} +$$

$$+ \sum_{v=0}^{r}|k_v\alpha_{n-v} - k_{v+1}\alpha_{n-v-1} - (k_v - 1)\alpha_{n-v} + (k_{v+1}-1)\alpha_{n-v-1}|, \quad k_{r+1} = 1 \leq$$

$$\leq |\alpha_0| + \sum_{v=r+1}^{n-1}|\alpha_{n-v} - \alpha_{n-v-1}| + 2\sum_{v=0}^{n}\left\{|\beta_v| + |\gamma_v| + |\delta_v|\right\} +$$

$$+ \sum_{v=0}^{r}|k_v\alpha_{n-v} - k_{v+1}\alpha_{n-v-1}| + \sum_{v=0}^{r}|(k_v-1)\alpha_{n-v}| + \sum_{v=0}^{r}|(k_{v+1}-1)\alpha_{n-v-1}|, \quad k_{r+1} = 1 =$$

$$= |\alpha_0| + \sum_{v=r+1}^{n-1}(\alpha_{n-v} - \alpha_{n-v-1}) + 2\sum_{v=0}^{n}\left\{|\beta_v| + |\gamma_v| + |\delta_v|\right\} +$$

$$+\sum_{v=0}^{r}(k_v\alpha_{n-v}-k_{v+1}\alpha_{n-v-1})+(k_0-1)|\alpha_n|+2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|\alpha_{n-v}|, \quad k_{r+1}=1=$$

$$=k_0(|\alpha_n|+\alpha_n)+2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|\alpha_{n-v}|-\alpha_0+|\alpha_0|-|\alpha_n|+L,$$

где $L=2\sum_{v=0}^{n}(|\beta_v|+|\gamma_v|+|\delta_v|)$.

Поскольку

$$\max_{|q|=1}\left|q^n\star f\left(\frac{1}{q}\right)\right|=\max_{|q|=1}\left|f\left(\frac{1}{q}\right)\right|=\max_{|q|=1}|f(q)|,$$

следовательно, $q^n\star f\left(\frac{1}{q}\right)$ имеет ту же границу для $|q|=1$, что и $f(q)$, т. е.

$$\left|q^n\star f\left(\frac{1}{q}\right)\right|\le k_0(|\alpha_n|+\alpha_n)+2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|\alpha_{n-v}|-\alpha_0+|\alpha_0|-|\alpha_n|+L \quad \text{for} \quad |q|=1.$$

После нескольких шагов, как при доказательстве теоремы 1, приходим к выводу, что все нули $p(q)$ лежат в

$$|q|\le\frac{1}{|a_n|}\left\{k_0(|\alpha_n|+\alpha_n)+2\sum_{v=1}^{r}(k_v-1)|\alpha_{n-v}|-\alpha_0+|\alpha_0|-|\alpha_n|+L\right\}.$$

Это завершает доказательство теоремы 2.

5. Выводы. Были получены новые результаты, связанные с теоремой Энестрема — Какейя для кватернионных полиномов, которые дают ценную информацию о разграничении областей, охватывающих все нули полинома.

Литература

1. Cauchy A. L. Exercises de mathématique. *Oeuvres* **9**, 122 (1829).

2. Marden M. Geometry of Polynomials. *Math. Surveys* **3** (1966).

3. Milovanović G. V., Mitrinović D. S., Rassias Th. M. *Topics in Polynomials: Extremal problems, Inequalities, Zeros.* Singapore, World Scientific Publishing (1994).

4. Eneström G. Remarque sur un théoréme relatif aux racines de I'equation $a_nx^n+\ldots+a_0=0$ *oú* tous les coefficients a sont réels et positifs. *Tôhoku Math. J.* **18**, 34–36 (1920).

5. Wani I. A., Mir M. I., Nazir I. Location of zeros of lacunary-type polynomials. *Applied Mathematics E-Notes* **23**, 49–59 (2023).

6. Вани И. А., Мир М. И., Назир И. Расположение нулей полиномов лакунарного типа. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 1, 73–85 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.107

7. Wani I. A., Mir M. I., Nazir I. Location of zeros of lacunary-type polynomials in annular regions. *J. Classical Anal.* **20**, 103–116 (2022).

8. Eneström G. Härledning af en allmän formel för antalet pensionärer, som vid en godtyeklig tidpunkt förefinnas inom en sluten pensionskassa. *Öfversigt af Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar* **50**, 405–415 (1893).

9. Kakeya S. On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. *Tôhoku Math. J.* **2**, 140–142. (1912–1913).

10. Aziz A., Zargar B. A. Some extensions of Eneström — Kakeya theorem. *Glasńik Math.* **31**, 239–244 (1996).

11. Govil N. K., Rahman Q. I. On the Eneström — Kakeya theorem. *Tôhoku Math. J.* **20**, 126–136 (1920).

12. Joyal A., Labelle G., Rahman Q. I. On the location of zeros of polynomials. *Can. Math. Bull.* **10**, 53–63 (1967).

13. Hussain A. On the Eneström-Kakeya theorem for quaternionic polynomial. *Filomat* **37**, 4981–4990 (2023).

14. Hussain A. A note on Eneström-Kakeya theorem for quaternionic polynomials. *Korean J. Math.* **30**, 503–513 (2022).

15. Wani I. A., Hussain A. A note on location of the zeros of quaternionic polynomial. *Armenian J. Math.* **15**, 1–12 (2023).

16. Malik A. H. Bounds for the zeros of a quaternionic polynomial with restricted coefficients. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* (2022) (in print).

17. Sudbery A. Quaternionic analysis. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **85**, 199–224 (1979).

18. Carney N. Gardner R., Keaton R., Powers A. The Eneström — Kakeya theorem for polynomials of a quaternionic variable. *J. Approx. Theory* **250**, 1–10, art. 105325 (2020).

19. Tripathi D. A note on Eneström-Kakeya theorem for a polynomial with quaternionic variable. *Arab. J. Math.* **9**, 707–714 (2020).

20. Gentili G., Stoppato C. Zeros of regular functions and polynomials of a quaternionic variable. *Michigan Math. J.* **56**, 655–667 (2008).

21. Gentili G., Struppa D. A new theory of regular functions of a quaternionic variable. *Adv. Math.* **216**, 279–301 (2007).

Статья поступила в редакцию 7 августа 2023 г.;
доработана 18 ноября 2023 г.;
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

Контактная информация:

Хусейн Адил — канд. наук (информационные технологии); malikadil6909@gmail.com
Вани Ирфан Ахмад — науч. сотр.; irfanmushtaq62@gmail.com

On the zero bounds of quaternionic polynomials with restricted coefficients

A. Hussain[1], *I. A. Wani*[2]

[1] University of Kashmir, Srinagar, 190006, India
[2] School of Chemical and Physical Science,
Lovely Professional University, Punjab, 144411, India

For citation: Hussain A., Wani I. A. On the zero bounds of quaternionic polynomials with restricted coefficients. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 526–536. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.309 (In Russian)

The primary objective of this paper is to explore extensions of the classical Enestörm — Kakeya theorem and its diverse generalizations regarding the distribution of polynomial zeros, transitioning from the complex domain to the quaternionic context.

Keywords: quaternionic polynomial, Zeros, Eneström — Kakeya theorem.

References

1. Cauchy A. L. Exercises de mathématique. *Oeuvres* **9**, 122 (1829).

2. Marden M. Geometry of Polynomials. *Math. Surveys* **3** (1966).

3. Milovanović G. V., Mitrinović D. S., Rassias Th. M. *Topics in Polynomials: Extremal problems, Inequalities, Zeros.* Singapore, World Scientific Publishing (1994).

4. Eneström G. Remarque sur un théoréme relatif aux racines de I'equation $a_nx^n + \ldots + a_0 = 0$ *oú* tous les coefficients a sont réels et positifs. *Tôhoku Math. J.* **18**, 34–36 (1920).

5. Wani I. A., Mir M. I., Nazir I. Location of zeros of lacunary-type polynomials. *Applied Mathematics E-Notes* **23**, 49–59 (2023).

6. Wani I. A., Mir M. I., Nazir I. Location of zeros of lacunary-type polynomials. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 1, 73–85 (2023).

https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.107 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 1 (2023), 57–67].

7. Wani I. A., Mir M. I., Nazir I. Location of zeros of lacunary-type polynomials in annular regions. *J. Classical Anal.* **20**, 103–116 (2022).

8. Eneström G. Härledning af en allmän formel för antalet pensionärer, som vid en godtyeklig tidpunkt förefinnas inom en sluten pensionskassa. *Öfversigt af Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar* **50**, 405–415 (1893).

9. Kakeya S. On the limits of the roots of an algebraic equation with positive coefficients. *Tôhoku Math. J.* **2**, 140–142. (1912–1913).

10. Aziz A., Zargar B. A. Some extensions of Eneström-Kakeya theorem. *Glasńik Math.* **31**, 239–244 (1996).

11. Govil N. K., Rahman Q. I. On the Eneström-Kakeya theorem. *Tôhoku Math. J.* **20**, 126–136 (1920).

12. Joyal A., Labelle G., Rahman Q. I. On the location of zeros of polynomials. *Can. Math. Bull.* **10**, 53–63 (1967).

13. Hussain A. On the Eneström — Kakeya theorem for quaternionic polynomial. *Filomat* **37**, 4981–4990 (2023).

14. Hussain A. A note on Eneström — Kakeya theorem for quaternionic polynomials. *Korean J. Math.* **30**, 503–513 (2022).

15. Wani I. A., Hussain A. A note on location of the zeros of quaternionic polynomial. *Armenian J. Math.* **15**, 1–12 (2023).

16. Malik A. H. Bounds for the zeros of a quaternionic polynomial with restricted coefficients. *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.* (2022) (in print).

17. Sudbery A. Quaternionic analysis. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **85**, 199–224 (1979).

18. Carney N. Gardner R., Keaton R., Powers A. The Eneström — Kakeya theorem for polynomials of a quaternionic variable. *J. Approx. Theory* **250**, 1–10, art. 105325 (2020).

19. Tripathi D. A note on Eneström — Kakeya theorem for a polynomial with quaternionic variable. *Arab. J. Math.* **9**, 707–714 (2020).

20. Gentili G., Stoppato C. Zeros of regular functions and polynomials of a quaternionic variable. *Michigan Math. J.* **56**, 655–667 (2008).

21. Gentili G., Struppa D. A new theory of regular functions of a quaternionic variable. *Adv. Math.* **216**, 279–301 (2007).

Received: August 7, 2023
Revised: November 18, 2023
Accepted: February 22, 2024

Authors' information:

Adil Hussain — malikadil6909@gmail.com
Irfan Ahmad Wani — irfanmushtaq62@gmail.com