МЕХАНИКА

УДК 531.384
MSC 37G05, 37G60, 70E18

Эффект трансгрессии в задаче о качении шара в углублении*

А. С. Кулешов, Н. М. Видов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119234, Москва, Ленинские горы, 1

Для цитирования: *Кулешов А. С., Видов Н. М.* Эффект трансгрессии в задаче о качении шара в углублении // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 549–556.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.311

Рассматривается задача о качении тяжелого шара (твердого тела, ограниченного поверхностью сферы, и такого, что его центр масс совпадает с центром сферы, а все главные центральные моменты инерции равны между собой) без проскальзывания по выпуклой поверхности в окрестности ее нижней точки эллиптического типа. Описывается эволюция компоненты угловой скорости шара в проекции на вертикальное направление.

Ключевые слова: неголономная система, однородный шар, эффект трансгрессии.

1. Введение. Понятие «эффект трансгрессии» было введено в работах Я. В. Татаринова [1, 2] при изучении движения консервативных неголономных систем, обладающих многообразием равновесий. Предполагалось изучать подобный эффект путем использования метода нормальных форм [3–6]. Дальнейшее исследование эффекта трансгрессии в различных неголономных системах проводилось в работах А. С. Кулешова с соавторами: данный эффект был исследован в задаче о движении почти голономного маятника [7] и в задаче о движении стержня по поверхности цилиндра [8]. Также в статье [8] была изложена общая методика изучения эффекта трансгрессии в неголономных механических системах. В данной работе указанная методика применяется в задаче о движении тяжелого однородного шара в углублении.

*Исследование выполнено за счет проекта Российского научного фонда № 24-11-20009.

2. Постановка задачи. Пусть однородный шар (твердое тело, ограниченное поверхностью сферы и такое, что его центр масс совпадает с центром сферы, а все главные центральные моменты инерции равны между собой) катится без проскальзывания по неподвижной поверхности под действием силы тяжести в окрестности нижней точки данной поверхности, причем эта точка является точкой эллиптического типа.

Будем считать, что центр масс S шара принадлежит поверхности, заданной уравнением $z = f\,(x,\,y)$, причем в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$ функция $f\,(x,\,y)$ может быть представлена в виде ряда по степеням переменных x и y с точностью до членов четвертого порядка малости:

$$
\begin{gathered}
f\,(x,y) = \frac{1}{2}\left(k_1x^2 + k_2y^2\right) + \frac{1}{6}\left(l_{11}x^3 + l_{22}y^3 + 3\left(l_{12}x + l_{21}y\right)xy\right) + \\
+\frac{1}{24}\left(m_1x^4 + m_2y^4 + 6m_3x^2y^2 + 4\left(m_{12}x^2 + m_{21}y^2\right)xy\right) + \cdots
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь k_i, $l_{i\,j}$, $m_{i,\,j}$, $i,\,j = 1, 2$ и m_i, $i = 1, 2, 3$ — коэффициенты разложения функции $f\,(x,\,y)$ в ряд по степеням x и y в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$. Без ограничения общности предположим, что $k_1 \neq k_2$, $k_i > 0$, $i = 1, 2$. Тогда с точностью до членов второго порядка малости по x и y поверхность (1) представляет собой эллиптический параболоид. Пусть M — масса шара, r — его радиус, $\lambda M r^2$ — момент инерции шара относительно произвольной оси, проходящей через центр масс, g — величина ускорения свободного падения. Обозначим через $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ скорость центра масс шара и его угловую скорость. Пусть $Oxyz$ — неподвижная система координат, в которой задана поверхность (1), а векторы $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ задают ортонормированный базис, причем $\boldsymbol{e}_z$ направлен противоположно направлению вектора силы тяжести. Движение шара происходит без проскальзывания, поэтому

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{v} = \left[\boldsymbol{\omega} \times r\boldsymbol{n}\right] = r\left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{n}\right], \\
\boldsymbol{n} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z\right).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Уравнения движения шара могут быть получены с помощью общих теорем динамики — закона изменения импульса и закона изменения кинетического момента относительно центра масс:

$$
M\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -Mg\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{R}, \tag{3}
$$

$$
\lambda M r^2\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = r\left[\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n}\right]. \tag{4}
$$

Из уравнения (3) выразим силу реакции $\boldsymbol{R}$ и подставим в уравнение (4):

$$
\lambda r\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \left[\left(g\boldsymbol{e}_z + \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) \times \boldsymbol{n}\right]. \tag{5}
$$

Радиус-вектор центра масс шара имеет вид

$$
\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + f\,(x,\,y)\,\boldsymbol{e}_z,
$$

следовательно
$$\boldsymbol{v} = \dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{y}\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{6}$$

Обозначим также
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{e}_x + \omega_y\boldsymbol{e}_y + \Omega\boldsymbol{e}_z,$$
тогда уравнения связей (2) в проекциях на оси системы координат $Oxyz$ запишутся в следующем виде:
$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\left(r\omega_y + r\Omega\frac{\partial f}{\partial y}\right),\\
&\dot{y} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\left(r\omega_x + r\Omega\frac{\partial f}{\partial x}\right),\\
&\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} = \frac{r}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\left(\omega_y\frac{\partial f}{\partial x} - \omega_x\frac{\partial f}{\partial y}\right).
\end{aligned} \tag{7}$$

Видно,что третье уравнение системы (7) получается из первых двух. Выразим теперь из первых двух уравнений системы (7) компоненты ω_x и ω_y угловой скорости шара в зависимости от x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, Ω:
$$\begin{aligned}
\omega_x &= -\frac{\dot{y}}{r}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} - \Omega\frac{\partial f}{\partial x},\\
\omega_y &= \frac{\dot{x}}{r}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} - \Omega\frac{\partial f}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Дифференцируя по времени выражение (6) для скорости $\boldsymbol{v}$, получим выражение для ускорения центра масс шара:
$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \ddot{x}\boldsymbol{e}_x + \ddot{y}\boldsymbol{e}_y + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ddot{x} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dot{x}^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dot{x}\dot{y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\dot{y}^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y}\right)\boldsymbol{e}_z. \tag{9}$$

Подставим в левую часть системы уравнений (5) выражения (8) для $\dot{\omega}_x$ и $\dot{\omega}_y$, а в правую часть этой системы — выражение (9) для $\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ и выражение (2) для $\boldsymbol{n}$. Получим замкнутую систему трех уравнений относительно трех неизвестных функций x, y и Ω. Разрешим данную систему относительно старших производных $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\dot{\Omega}$, а после разложим правые части полученных уравнений системы в ряд по степеням переменных x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$. Тогда в первом приближении получим следующие уравнения:
$$(\lambda + 1)\,\ddot{x} = -k_1 g x + \lambda r\Omega k_2\dot{y}, \quad (\lambda + 1)\,\ddot{y} = -k_2 g y - \lambda r\Omega k_1\dot{x}, \quad \dot{\Omega} = 0. \tag{10}$$

В первом приближении получается, что Ω постоянна. Чтобы решить первые два уравнения системы (10), положим

$$x = F\cos(\mu t + \varphi), \quad y = G\sin(\mu t + \varphi).$$

Подстановка этих выражений для x и y в первые два уравнения системы (10) приводит к системе уравнений

$$\left(\frac{k_1 g}{\lambda+1} - \mu^2\right) F = \frac{\lambda r \Omega k_2}{\lambda+1}\mu G, \quad \left(\frac{k_2 g}{\lambda+1} - \mu^2\right) G = \frac{\lambda r \Omega k_1}{\lambda+1}\mu F.$$

Отсюда для определения μ имеем биквадратное уравнение

$$\mu^4 - \left(\frac{(k_1+k_2)\,g}{\lambda+1} + \frac{\lambda^2 r^2 \Omega^2 k_1 k_2}{(\lambda+1)^2}\right)\mu^2 + \frac{k_1 k_2 g^2}{(\lambda+1)^2} = 0.$$

Очевидно, что при $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_1 \neq k_2$ корни этого уравнения будут положительны и различны при всех значениях Ω. Шар будет совершать колебания в плоскости, перпендикулярной вертикальной оси и проходящей через точку $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ — наинизшую точку углубления.

Поскольку в первом приближении Ω является постоянной, то будем считать эту постоянную малой величиной. Тогда слагаемые $\lambda r \Omega k_2 \dot{y}$ и $-\lambda r \Omega k_1 \dot{x}$ в правых частях первого и второго уравнения системы (10) будут иметь второй порядок малости. Теперь правые части уравнений системы, получаемой из системы (5), будем раскладывать в ряд по степеням переменных x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$ и Ω. Тогда уравнения первого приближения еще более упрощаются и получают вид (см., например [9])

$$(\lambda+1)\,\ddot{x} = -k_1 g x, \quad (\lambda+1)\,\ddot{y} = -k_2 g y, \quad \dot{\Omega} = 0. \tag{11}$$

В этом случае общее решение системы уравнений (11) имеет вид

$$x = c_1\cos\left(\sqrt{\frac{k_1 g}{\lambda+1}}t\right) + c_2\sin\left(\sqrt{\frac{k_1 g}{\lambda+1}}t\right), \quad y = c_3\cos\left(\sqrt{\frac{k_2 g}{\lambda+1}}t\right) + c_4\sin\left(\sqrt{\frac{k_2 g}{\lambda+1}}t\right), \tag{12}$$

т. е. шар будет совершать колебательные движения с различными частотами в направлении неподвижных осей x и y.

Во втором приближении третье уравнение системы, получаемой из системы (5), не меняется, т. е. Ω по-прежнему остается постоянной. Однако первые два уравнения пополняются новыми слагаемыми и принимают вид

$$\begin{aligned}
&(\lambda+1)\,\ddot{x} = -k_1 g x - \frac{g}{2}\left(l_{11}x^2 + 2l_{12}xy + l_{21}y^2\right) + \lambda r \Omega k_2 \dot{y},\\
&(\lambda+1)\,\ddot{y} = -k_2 g y - \frac{g}{2}\left(l_{12}x^2 + 2l_{21}xy + l_{22}y^2\right) - \lambda r \Omega k_1 \dot{x},\\
&\dot{\Omega} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Ненулевые слагаемые в третьем уравнении получаются лишь в третьем порядке:

$$\dot{\Omega} = -\frac{\Omega}{\lambda+1}\left(k_1^2 \dot{x} x + k_2^2 \dot{y} y\right).$$

Слегка упростим систему уравнений (13). Для этого введем следующие обозначения:

$$k_1 = \frac{(\lambda+1)\,\omega_1^2}{g}, \quad k_2 = \frac{(\lambda+1)\,\omega_2^2}{g}, \quad u = \frac{\lambda r\Omega}{g}. \tag{14}$$

С учетом введенных обозначений (14) система уравнений (13) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} = -\omega_1^2 x - \frac{g}{2(\lambda+1)}\left(l_{11}x^2 + 2l_{12}xy + l_{21}y^2\right) + \omega_2^2 u\dot{y},\\
&\ddot{y} = -\omega_2^2 y - \frac{g}{2(\lambda+1)}\left(l_{12}x^2 + 2l_{21}xy + l_{22}y^2\right) - \omega_1^2 u\dot{x},\\
&\dot{u} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

В следующем разделе описывается процедура приведения системы уравнений (15) к нормальной форме и последующий анализ эволюции компоненты угловой скорости Ω шара.

3. Нормальная форма и ее анализ. Приведем систему уравнений (15) к нормальной форме. В соответствии с теорией, изложенной в работе [8], для этого сначала необходимо записать систему уравнений (15) в таких переменных, в которых система первого приближения имеет диагональный вид. Для системы уравнений (15) соответствующие переменные, которые мы обозначим z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, вводятся по формулам

$$x = \frac{z_1 - z_2}{2i\omega_1^2}, \quad \dot{x} = \frac{z_1 + z_2}{2\omega_1}, \quad y = \frac{z_3 - z_4}{2i\omega_2^2}, \quad \dot{y} = \frac{z_3 + z_4}{2\omega_2}, \quad u = z_5. \tag{16}$$

Тогда в новых переменных система уравнений (15) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{z_1} = {} & i\omega_1 z_1 + \frac{gl_{11}}{8\,(\lambda+1)\,\omega_1^3}\,(z_1 - z_2)^2 + \frac{gl_{12}}{4\,(\lambda+1)\,\omega_1\omega_2^2}\,(z_1 - z_2)\,(z_3 - z_4) + \\
& + \frac{gl_{21}\omega_1}{8\,(\lambda+1)\,\omega_2^4}\,(z_3 - z_4)^2 - \frac{\omega_1\omega_2}{2}\,(z_3 + z_4)\,z_5,\\
\dot{z_2} = {} & -i\omega_1 z_2 + \frac{gl_{11}}{8\,(\lambda+1)\,\omega_1^3}\,(z_1 - z_2)^2 + \frac{gl_{12}}{4\,(\lambda+1)\,\omega_1\omega_2^2}\,(z_1 - z_2)\,(z_3 - z_4) + \\
& + \frac{gl_{21}\omega_1}{8\,(\lambda+1)\,\omega_2^4}\,(z_3 - z_4)^2 - \frac{\omega_1\omega_2}{2}\,(z_3 + z_4)\,z_5,\\
\dot{z_3} = {} & i\omega_2 z_3 + \frac{g\omega_2 l_{12}}{8\,(\lambda+1)\,\omega_1^4}\,(z_1 - z_2)^2 + \frac{gl_{21}}{4\,(\lambda+1)\,\omega_1^2\omega_2}\,(z_1 - z_2)\,(z_3 - z_4) + \\
& + \frac{gl_{22}}{8\,(\lambda+1)\,\omega_2^3}\,(z_3 - z_4)^2 + \frac{\omega_1\omega_2}{2}\,(z_1 + z_2)\,z_5,\\
\dot{z_4} = {} & -i\omega_2 z_4 + \frac{g\omega_2 l_{12}}{8\,(\lambda+1)\,\omega_1^4}\,(z_1 - z_2)^2 + \frac{gl_{21}}{4\,(\lambda+1)\,\omega_1^2\omega_2}\,(z_1 - z_2)\,(z_3 - z_4) + \\
& + \frac{gl_{22}}{8\,(\lambda+1)\,\omega_2^3}\,(z_3 - z_4)^2 + \frac{\omega_1\omega_2}{2}\,(z_1 + z_2)\,z_5,\\
\dot{z_5} = {} & 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Видно, что линейная часть системы уравнений (17) имеет диагональный вид. После процедуры нормализации система уравнений (17) записывается в нормальной форме:

$$\dot{z}_1 = i\omega_1 z_1, \quad \dot{z}_2 = -i\omega_1 z_2, \quad \dot{z}_3 = i\omega_2 z_3, \quad \dot{z}_4 = -i\omega_2 z_4, \quad \dot{z}_5 = 0. \tag{18}$$

В системе уравнений (18) через z_i, $i = 1, \ldots, 5$, обозначены уже новые переменные, в которых система уравнений (17) записывается в нормальной форме. Чтобы сократить число обозначений, за этими переменными сохраняются обозначения z_i, $i = 1, \ldots, 5$. Таким образом, в нормальной форме (18) все члены второго порядка отсутствуют, а последнее уравнение дает $z_5 = \mathrm{const}$, т. е. $\Omega = \mathrm{const}$. Нормализация членов третьего порядка малости приводит к тому, что в правых частях уравнений для z_1, z_2, z_3, z_4 появляются резонансные члены, но последнее уравнение своей формы не меняет: по-прежнему $z_5 = \mathrm{const}$, т. е. $\Omega = \mathrm{const}$. Для полного изучения эффекта трансгрессии в данной системе, который заключается здесь в эволюции медленной переменной Ω, понадобится учет членов более высокого порядка малости. В результате исследования оказалось, что в последнем уравнении системы, получаемой из системы уравнений (5) и приведенной к нормальной форме, резонансные члены появляются только в шестом порядке малости. Соответствующее уравнение будет иметь вид

$$\dot{z}_5 = R_1 z_1^2 z_2^2 \left(\frac{3 z_3 z_4}{\omega_2^2} - \frac{z_1 z_2}{\omega_1^2} \right) + R_2 z_3^2 z_4^2 \left(\frac{z_3 z_4}{\omega_2^2} - \frac{3 z_1 z_2}{\omega_1^2} \right), \tag{19}$$

$$R_1 = \frac{\left((\lambda+1)\left(4\omega_1^2-\omega_2^2\right) m_{12}\omega_1^2 + \left(4\omega_1^2-\omega_2^2\right) g l_{11} l_{12} + 3 g l_{12} l_{21} \omega_1^2\right)\lambda}{16\left(9\omega_1^2-\omega_2^2\right)\left(4\omega_1^2-\omega_2^2\right) g^3 \omega_1^4},$$

$$R_2 = \frac{\left((\lambda+1)\left(4\omega_2^2-\omega_1^2\right) m_{21}\omega_2^2 + \left(4\omega_2^2-\omega_1^2\right) g l_{21} l_{22} + 3 g l_{12} l_{21} \omega_2^2\right)\lambda}{16\left(9\omega_2^2-\omega_1^2\right)\left(4\omega_2^2-\omega_1^2\right) g^3 \omega_2^4}.$$

Учитывая формулы (16), легко получить, что

$$z_1 = \omega_1 \dot{x} + i\omega_1^2 x, \quad z_2 = \omega_1 \dot{x} - i\omega_1^2 x, \quad z_3 = \omega_2 \dot{y} + i\omega_2^2 y, \quad z_4 = \omega_2 \dot{y} - i\omega_2^2 y.$$

Следовательно,

$$z_1 z_2 = \omega_1^2 \dot{x}^2 + \omega_1^4 x^2, \qquad z_3 z_4 = \omega_2^2 \dot{y}^2 + \omega_2^4 y^2. \tag{20}$$

Учитывая, что в первом порядке малости x и y определяются формулами (12), т. е.

$$x = c_1 \cos\omega_1 t + c_2 \sin\omega_1 t, \quad y = c_3 \cos\omega_2 t + c_4 \sin\omega_2 t,$$

получаем

$$\dot{x} = \omega_1 \left(c_2 \cos\omega_1 t - c_1 \sin\omega_1 t\right), \quad \dot{y} = \omega_2 \left(c_4 \cos\omega_2 t - c_3 \sin\omega_2 t\right).$$

Подставляя выражения для x, $\dot{x}$, y, $\dot{y}$ в формулы (20), находим, что

$$z_1 z_2 = \omega_1^4 \left(c_1^2 + c_2^2\right), \qquad z_3 z_4 = \omega_2^4 \left(c_3^2 + c_4^2\right).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (19) может быть представлено в виде

$$\dot{z}_5 = R_1\omega_1^8 \left(c_1^2 + c_2^2\right)^2 \left(3\omega_2^2 \left(c_3^2 + c_4^2\right) - \omega_1^2 \left(c_1^2 + c_2^2\right)\right) +$$

$$+R_2\omega_2^8 \left(c_3^2 + c_4^2\right)^2 \left(\omega_2^2 \left(c_3^2 + c_4^2\right) - 3\omega_1^2 \left(c_1^2 + c_2^2\right)\right).$$

Из полученного уравнения следует, что в системе будет наблюдаться равномерное изменение переменной z_5, т. е. угловой скорости Ω с постоянной скоростью, имеющей шестой порядок малости. На временах порядка $\frac{1}{\varepsilon}$ координата z_5 изменяется на величину пятого порядка малости. Следовательно, в рассматриваемой системе наблюдается эволюция «медленной» переменной Ω (трансгрессия), имеющая пятый порядок.

4. Заключение. В работе была рассмотрена задача о качении без проскальзывания однородного шара по неподвижной поверхности под действием силы тяжести в окрестности нижней точки данной поверхности, имеющей эллиптический тип. В результате исследования было установлено, что в процессе движения проекция угловой скорости шара на вертикаль меняется со скоростью шестого порядка малости. В этом заключается эффект трансгрессии в задаче о качении шара в углублении.

Литература

1. Татаринов Я. В. Сложение нелинейных колебаний с эволюцией вблизи многообразия равновесий обратимых систем. *Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика* **5**, 93–95 (1990).

2. Татаринов Я. В. Следствия неинтегрируемого возмущения интегрируемых связей: нелинейные эффекты вблизи многообразия равновесий. *Прикладная математика и механика* **56** (4), 604–614 (1992).

3. Брюно А. Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений.* Москва, Наука (1979).

4. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений. I. *Труды Московского математического общества* **25**, 119–262 (1971).

5. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений. II. *Труды Московского математического общества* **26**, 199–239 (1972).

6. Edneral V. F. Looking for Periodic Solutions of ODE Systems by the Normal Form Method. In: Wang D., Zheng Z. (eds). *Differential Equations with Symbolic Computation. Trends in Mathematics.* Birkhauser Basel, 173–200 (2005).

7. Кулешов А. С., Улятовская И. И. Эффект трансгрессии в задаче о движении почти голономного маятника. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 2, 356–360 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.217

8. Кулешов А. С., Видов Н. М. Эффект трансгрессии в задаче о движении стержня по цилиндру. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 3, 568–580 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.310

9. Routh E. J. *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject.* Cambridge, Cambridge University Press (2013).

Статья поступила в редакцию 6 ноября 2023 г.;
доработана 21 декабря 2023 г.;
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

Контактная информация:

Кулешов Александр Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, доц.; kuleshov@mech.math.msu.su
Видов Никита Михайлович — аспирант; nikitavidov98@gmail.com

The transgression effect in the problem of a ball rolling in a hole*

A. S. Kuleshov, N. M. Vidov

Lomonosov Moscow State University,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119234, Russian Federation

For citation: Kuleshov A. S., Vidov N. M. The transgression effect in the problem of a ball rolling in a hole. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 549–556. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.311 (In Russian)

We consider the problem of rolling without sliding a heavy ball (a rigid body bounded by the surface of a sphere and such that its center of mass coincides with the center of the sphere, and all the principal central moments of inertia are equal to each other) along the convex surface in the vicinity of its lower point of elliptical type. The evolution of the angular velocity of the ball in projection onto the vertical (the transgression effect) is described.

Keywords: nonholonomic system, homogeneous ball, transgression effect.

References

1. Tatarinov Ya. V. Composition of nonlinear oscillations with evolution in the vicinity of equilibrium manifolds of reversible systems. *Vestnik of Moscow University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics* **5**, 93–95 (1990). (In Russian)

2. Tatarinov Ya. V. Consequences of nonintegrable perturbations of integrable constraints: nonlinear effects of motion near the equilibrium manifold. *J. Appl. Maths. Mechs.* **56** (4), 507–517 (1992).

3. Bruno A. D. Local Methods in Nonlinear Differential Equations. Berlin; Heidelberg, Springer (1989) [Rus. ed.: Bruno A. D. *Lokal'nyi metod nelineinogo analiza differentsial'nykh uravnenii.* Moscow, Nauka Publ. (1979)].

4. Bruno A. D. Analytical form of differential equations I. *Trans. Mosc. Math. Soc.* **25**, 119–262 (1971). (In Russian)

5. Bruno A. D. Analytical form of differential equations. II. *Trans. Mosc. Math. Soc.* **26**, 199–239 (1972). (In Russian)

6. Edneral V. F. Looking for Periodic Solutions of ODE Systems by the Normal Form Method. In: Wang D., Zheng Z. (eds). *Differential Equations with Symbolic Computation. Trends in Mathematics.* Birkhauser Basel, 173–200 (2005).

7. Kuleshov A. S., Ulyatovskaya I. I. The transgression effect in the problem of motion of an almost holonomic pendulum. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 2, 356–360 (2020). https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2020.217 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **54**, iss. 2 (594–597) (2020)].

8. Kuleshov A. S., Vidov N. M. Transgression Effect in the Problem of the Motion of a Rod on a Cylinder. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 3, 568–580 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.310 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 3, 403–411 (2023). https://doi.org/10.1134/s1063454123030068].

9. Routh E. J. *The Advanced Part of a Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies: Being Part II of a Treatise on the Whole Subject.* Cambridge, Cambridge University Press (2013).

Received: November 6, 2023
Revised: December 21, 2023
Accepted: February 22, 2024

Authors' information:

Alexander S. Kuleshov — kuleshov@mech.math.msu.su
Nikita M. Vidov — nikitavidov98@gmail.com

*The research was funded by the Russian Science Foundation (project no. 24-11-20009).