УДК 534/539 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3
MSC 74K10

Асимптотическая модель длинноволновых колебаний ультратонкой полосы-балки с учетом поверхностных эффектов

Г. И. Михасев[1], *Н. Д. Ле*[2]

[1] Школа Астронавтики, Харбинский политехнический университет,
Китай, 150001, Харбин, ул. Вест Дажи, 92
[2] Белорусский государственный университет,
Беларусь, 220030, Минск, пр. Независимости, 4

Для цитирования: *Михасев Г. И., Ле Н. Д.* Асимптотическая модель длинноволновых колебаний ультратонкой полосы-балки с учетом поверхностных эффектов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 557–569. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.312

Работа посвящена выводу асимптотически корректных уравнений, описывающих длинноволновые колебания ультратонкой упругой полосы-балки с учетом поверхностных эффектов в рамках поверхностной теории упругости Гуртина — Мурдоха. В качестве исходных используются двухмерные уравнения движения упругой изотропной среды. В общем случае полоса-балка находится по действием переменных нестационарных поверхностных сил. На лицевых поверхностях предполагается наличие остаточных касательных напряжений. В качестве малого параметра рассматривается отношение толщины полосы к характерной длине изгибной деформации. В рамках теории Гуртина — Мурдоха рассматривается два случая, предусматривающие наличие больших: а) остаточных напряжений на лицевых поверхностях; б) эффектов поверхностной инерции. Методом асимптотического интегрирования по толщине полосы-балки получены соотношения для перемещений и напряжений в ультратонкой полосе-балке, а также выведены эквивалентные одномерные уравнения типа Тимошенко, учитывающие поверхностные эффекты. В качестве примера рассмотрены свободные колебания шарнирно-опертой балки с учетом поверхностных эффектов.

Ключевые слова: ультратонкая полоса-балка, поверхностная упругость, остаточные напряжения, длинноволновые колебания, асимптотика, эквивалентные одномерные модели.

1. Введение. За последнее десятилетие появилось большое количество работ, посвященных моделированию механического поведения балок и пластин с учетом размерных эффектов. С одной стороны, актуальность подобных исследований обусловлена широким использованием ультратонких упругих тел субмикронной толщины в качестве ответственных чувствительных элементов в наносенсорах и нанорезонаторах [1, 2], атомно-силовых микроскопах [3], нановыключателях и нанопинцентах [4] и во многих других низкоразмерных электромеханических системах. С другой стороны, экспериментальные исследования, а также работы, основанные на атомистическом моделировании нанообъектов (например, см. [5–7]), показали несостоятельность классических моделей теории упругости и стимулировали их усовершенствование. Наиболее распространенными теориями для наноразмерных упругих тел оказались нелокальная теория упругости Эрингена [8], градиентная теория Айфантиса [9], а также модели Штайгмана — Огдена [10] и Гуртина — Мурдоха [11], учитывающие поверхностную энергию. Последняя из вышеупомянутых теорий [11] оказалась очень продуктивной, поскольку позволила получить ряд принципиально новых результатов (среди многих, см. [12–16], а также обзорную статью [17]). В частности, учет поверхностных касательных напряжений и инерции позволил обнаружить новый класс волн — антиплоских поверхностных волн сдвига [12, 13], а также новые моды этих волн с гармоническим законом изменения амплитуд по толщине нанопластины [14, 15]. Анализ НДС в наноразмерных телах показал, что учет поверхностных напряжений приводит к существенному перераспределению напряжений в окрестности геометрических сингулярностей. Также установлено, что эффективные свойства наноструктурированных композитных материалов сильно зависят от поверхностных упругих модулей [17].

Что касается моделей наноразмерных балок, пластин и оболочек, основанных на учете поверхностных эффектов, то, по-видимому, первая из них была предложена Лим и Хе [18] для упругих пленок наноразмерной толщины, а затем доработана Лу и др. [19, 20] для ультратонких пластин. В частности, в статье [19] впервые выведены уравнения, основанные на модифицированных гипотезах Кирхгофа, одна из которых предполагает линейное распределение нормальных напряжений по толщине пластины с учетом их наличия на свободных поверхностях; авторы также получили уравнения, соответствующие теории первого порядка типа Миндлина, которые учитывают как поперечные сдвиги в объеме, так и поверхностные напряжения. Модифицированные уравнения третьего порядка с кубическим распределением напряжений сдвига по толщине пластины, включающие поверхностные эффекты, получены в работе [21]. Комбинированный подход использован в недавно опубликованной статье [22], в которой на основе нелокальной теории деформации и градиента напряжений, а также теории поверхностной упругости, авторы вывели уравнения для нанобалок, соответствующие гипотезам Тимошенко. Отметим серию работ Альтенбаха, Еремеева и Морозова по моделированию тонких пластин и оболочек с учетом поверхностных напряжений (например, см. [23–26]): выполняя интегрирование трехмерных уравнений по толщине и вводя гипотезу о линейном распределении тангенциальных перемещений как функций поперечной координаты, авторы вывели двухмерные уравнения теории тонких пластин и оболочек, а также соотношения для эффективных свойств.

Особенностью большинства из вышепомянутых работ является введение гипотез о распределении либо перемещений, либо(и) напряжений по толщине тонкого упругого тела, что априори фиксирует погрешность предлагаемой модели. Целью данной работы является разработка асимптотической модели длинноволновых деформаций ультратонкой полосы с учетом поверхностных эффектов, которая свободна от каких-либо гипотез и основана на асимптотическом интегрировании двухмерных уравнений упругости по толщине полосы [27]. Рассматривается два принципиально разных случая, в одном из которых велики остаточные напряжения на лицевых поверхностях, а во втором имеет место сильный эффект поверхностной инерции. Для обоих случаев выведены одномерные дифференциальные уравнения типа Тимошенко, учитывающие поверхностные эффекты. Изучено влияние поверхностных упругих констант и плотности на нижний спектр собственных колебаний шарнирно-опертой полосы-балки.

2. Постановка задачи. Рассмотрим ультратонкую упругую изотропную пластинку с параметрами Ляме λ, μ и плотностью ρ, которая занимает область $\mathcal{D} = \{0 \leq x_1 \leq l, 0 \leq x_2 \leq h, |x_3| \leq \infty\}$. Лицевые поверхности пластинки покрыты нанопленками, механические свойства которых в рамках поверхностной теории упругости Гуртина—Мурдоха характеризуются остаточными напряжениями $s_0^\pm$, упругими константами $\lambda_0^\pm, \mu_0^\pm$ и поверхностными плотностями $\rho_0^\pm$. Здесь и ниже знаки минус и плюс соответствуют нижней и верхней поверхностям пластинки. В общем случае на пластинку действуют поверхностные силы $\mathbf{Q}^\pm = \left(q_1^\pm, q_2^\pm, 0\right)$, компоненты которых суть функции координаты x_1 и времени t. Будем считать, что в объеме пластинки реализуется плоское деформированное состояние с вектором перемещения $\mathbf{U} = \{U_1, U_2, 0\}$, где $U_1 = U_1(x_1, x_2, t)$ и $U_2 = U_2(x_1, x_2, t)$. Тогда пластинку можно заменить полосой толщиной h. С учетом того, что полоса может иметь конечную длину, в дальнейшем будем называть ее полосой-балкой. Обозначим через $\hat{\sigma}_{ij}$ и $\hat{e}_{ij}$ компоненты тензоров напряжений и линейных деформаций соответственно в объеме, где $i, j = 1, 2$, а через $s_{11}^\pm, s_{12}^\pm$ — компоненты поверхностных напряжений на поверхностях.

Уравнения движения упругой изотропной полосы-балки имеют вид

$$\hat{\sigma}_{ij,j} - \rho \ddot{U}_i = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

где

$$\hat{\sigma}_{ij} = \lambda \hat{e}_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \hat{e}_{ij}, \quad \hat{e}_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}), \quad i, j = 1, 2. \tag{2}$$

Здесь и далее запятая в нижних индексах указывает на дифференцирование по соответствующей координате, следующей после запятой, а двоеточие в (1) — дифференцирование по времени $\hat{t}$.

В соответствии с теорией поверхностной упругости Гуртина—Мурдоха [11], поверхностные напряжения определяются по формулам

$$s_{11}^\pm = s_0^\pm + (\lambda_0^\pm + 2\mu_0^\pm) U_{1,1}^\pm, \quad s_{12}^\pm = s_0^\pm U_{2,1}^\pm, \tag{3}$$

где производные компонент перемещений вычисляются на нижней и верхней границах полосы.

Рассмотрим граничные условия на лицевых поверхностях. В рамках теории Гуртина—Мурдоха [11] данные условия при $x_2 = h$ и $x_2 = 0$ (берутся знаки плюс и минус соответственно) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{12}^\pm &= \pm s_{11,1}^\pm \mp \rho_0^\pm \ddot{U}_1^\pm + q_1^\pm, \\ \sigma_{22}^\pm &= \pm s_{12,1}^\pm \mp \rho_0^\pm \ddot{U}_2^\pm + q_2^\pm. \end{aligned} \tag{4}$$

Будем исследовать длинноволновые колебания/деформации с характерной длинной волны L, так что $\varepsilon = h/L$ — безразмерный малый параметр. Введем следующие асимптотические оценки:

$$\frac{\lambda_0^\pm + 2\mu_0^\pm}{EL} = \varepsilon^{\alpha_1} \kappa_1^\pm, \quad \frac{s_0^\pm}{EL} = \varepsilon^{\alpha_2} \kappa_2^\pm, \quad \frac{\rho_0^\pm}{\rho L} = \varepsilon^{\alpha_3} \kappa_3^\pm, \quad \alpha_k > 0, \kappa_k \sim 1, \tag{5}$$

где E — модуль Юнга материала полосы-балки. Параметры α_k могут принимать различные положительные значения в зависимости от механических свойств материала в объеме (в случае отсутствия нанопокрытия) и нанопленки, толщины покрытия, а также величины остаточного напряжения [11, 12]. Например, для свободной поверхности железа $\rho_0/\rho \sim 10^{-9}$ м, $\mu_0/\mu \sim 10^{-11}$ м, а для железной нанопленки 10^3Å на стеклянной подложке $\rho_0/\rho \sim \mu_0/\mu \sim 10^{-7}$ м. В первом случае, в зависимости от выбора параметра $\varepsilon = h/L$ и в отсутствие остаточного напряжения, можно принять $\alpha_1 = 3, \alpha_3 = 1$, во втором случае — $\alpha_1 = \alpha_3 = 3$. Здесь рассмотрим случаи

$$\begin{aligned} &\text{А)} \qquad \alpha_k = 3 \quad \text{для} \quad k = 1, 2, 3; \\ &\text{Б)} \qquad \alpha_1 = 3, \quad s_0^{\pm} = 0, \quad \alpha_3 = 1, \end{aligned}$$

из которых первый предусматривает наличие больших остаточных напряжений, а второй — сильные инерционные эффекты на свободной поверхности.

Перейдем к безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} &\{x_1, x_2, \hat{t}\} = \{lx, hy, \omega_*^{-1} t\}, \quad \omega_*^2 = \frac{\varepsilon^4 E}{h^4 \rho}, \quad q_1^{\pm} = \varepsilon E S^{\pm}, \quad q_2^{\pm} = E q^{\pm}, \\ &\{U_1, U_2\} = h\{\varepsilon^{-3} u, \varepsilon^{-4} w\}, \quad \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\} = E\{\varepsilon^{-1} \tau, \sigma\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Выполненное в (6) масштабирование компонент безразмерных вектора перемещений и тензора напряжений соответствует длинноволновой деформации полосы-балки [27].

С учетом (6) уравнения движения (1) совместно с соотношениями (2) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} &w_{,y} = -\varepsilon^2 c_v u_{,x} + \varepsilon^4 c_3 \sigma, \quad u_{,y} = -w_{,x} + \varepsilon^2 c_g \tau, \\ &\tau_{,y} = -c_0 u_{,xx} - \varepsilon^2 c_v \sigma_{,x} + \varepsilon^2 u_{,tt}, \quad \sigma_{,y} = -\tau_{,x} + w_{,tt}, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$c_0 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{E(\lambda + 2\mu)}, \quad c_v = \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)}, \quad c_g = \frac{E}{\mu}, \quad c_3 = \frac{E}{(\lambda + 2\mu)}. \tag{8}$$

Система (7) не содержит уравнение относительно безразмерного аналога напряжению $\hat{\sigma}_{11}$. Однако данное напряжение без труда находится из уравнения физического состояния (2) после решения системы уравнений (7).

Перепишем граничные условия (4) в безразмерном виде. Для случаев А) и Б) получаем:

$$\begin{aligned} &\tau^{\pm} = \pm\varepsilon^2 \left(\kappa_1^{\pm} u_{,xx} \pm S^{\pm} - \varepsilon^2 \kappa_3^{\pm} u_{,tt}\right), \\ &\sigma^{\pm} = \pm\left(\kappa_2^{\pm} w_{,xx} \pm q^{\pm}\right) \mp \varepsilon^2 \kappa_3^{\pm} w_{,tt} \end{aligned} \tag{9}$$

и

$$\begin{aligned} &\tau^{\pm} = \pm\varepsilon^2 \left(\kappa_1^{\pm} u_{,xx} \pm S^{\pm} - \kappa_3^{\pm} u_{,tt}\right), \\ &\sigma^{\pm} = q^{\pm} \mp \kappa_3^{\pm} w_{,tt} \end{aligned} \tag{10}$$

соответственно.

Таким образом, мы пришли к краевой задаче (9) или (10) для уравнений (7) с соответствующими граничными условиями на границах $x = 0, l$ в случае, если полоса-балка ограничена, или при $x = \pm\infty$ для бесконечной полосы.

3. Асимптотическое решение. Решение поставленной выше задачи будем искать в виде формальных асимптотических рядов по степеням малого параметра ε [27]:

$$Z(x,y,t) = Z_0(x,y,t) + \varepsilon^2 Z_2(x,y,t) + \ldots, \tag{11}$$

где $Z(x,y,t)$ — любая из неизвестных функций, фигурирующих в уравнениях (7). Подстановка (11) в уравнения (7) и граничные условия приводит к последовательности краевых задач для функций Z_i.

В нулевом приближении уравнения (7) имеют простой вид:

$$w_{0,\,y} = 0, \quad u_{0,\,y} = -w_{0,\,x}, \quad \tau_{0,\,y} = -c_0 u_{0,\,xx}, \quad \sigma_{0,\,y} = -\tau_{0,\,x} + w_{0,\,tt} \tag{12}$$

с граничными условиями

$$\tau_0^{\pm} = 0, \quad \sigma_0^{\pm} = \pm\left(\kappa_2^{\pm} w_{0,\,xx} \pm q^{\pm}\right) \tag{13}$$

и

$$\tau_0^{\pm} = 0, \quad \sigma_0^{\pm} = q^{\pm} \mp \kappa_3^{\pm} w_{0,\,tt} \tag{14}$$

для случаев А) и Б) соответственно.

Решения первых трех уравнений системы (12), независимо от рассматриваемого случая, имеют вид

$$w_0 = w_0(x,t), \quad u_0 = -\frac{1}{2}(2y-1)w_{0,\,x} + a_1(t)x + a_0(t), \quad \tau_0 = \frac{1}{2}c_0(y^2-y)w_{0,\,xxx}, \tag{15}$$

где $a_0(t), a_1(t)$ — неизвестные функции, которые находятся из краевых задач для перемещений полосы в направлении оси x с соответствующими граничными условиями для этих перемещений или мембранных усилий на краях полосы. В частности, если эти условия являются однородными или если полоса является неограниченной в направлении x_1, то, как показано в [28], $a_j \equiv 0$ для $j = 0, 1$.

Интегрируя последнее уравнение системы (12) и удовлетворяя граничным условиям (13) или (14) на нижней и верхней гранях, приходим к следующим соотношениям для безразмерного напряжения σ_0:

$$\sigma_0 = -\frac{1}{12}c_0(2y^3 - 3y^2)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \kappa_2^- \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + q^-(x,t), \tag{16}$$

и

$$\sigma_0 = -\frac{1}{12}c_0(2y^3 - 3y^2)\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (y + \kappa_3^-)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + q^-(x,t) \tag{17}$$

для случаев А) и Б) соответственно, а также к дифференциальным уравнениям относительно перемещения w_0:

$$\text{А)} \qquad \mathbf{D}_1 w_0 \equiv \frac{c_0}{12}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} - \kappa_2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \mathcal{F}_0(x,t), \tag{18}$$

и

$$\text{Б)} \qquad \mathbf{D}_2 w_0 \equiv \frac{c_0}{12}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + (1 + \kappa_3)\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \mathcal{F}_0(x_1,t), \tag{19}$$

где $\kappa_j = \kappa_j^+ + \kappa_j^-$, $\mathcal{F}_0(x,t) = q^+(x,t) - q^-(x,t)$.

Уравнения (18), (19) обобщают классические уравнения изгибных колебаний балки, основанные на гипотезах Эйлера — Бернулли, и в рамках поверхностной теории Гуртина — Мурдоха учитывают наличие на нижней и верхней гранях ультратонкой полосы-балки сильных остаточных касательных напряжений (А) или поверхностной инерции (Б).

В следующем приближении уравнения (7) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&w_{2,\,y} = -c_v u_{0,\,x}, \quad u_{2,\,y} = -w_{2,\,x} + c_g \tau_0, \\
&\tau_{2,y} = -c_0 u_{2,\,xx} - c_v \sigma_{0,\,x} + u_{0,\,tt}, \quad \sigma_{2,\,y} = -\tau_{2,\,x} + w_{2,\,tt}.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

А граничные условия на поверхностях для обоих случаев становятся неоднородными:

$$
\begin{aligned}
&\text{А)} \qquad \tau_2^{\pm} = \pm\left(\kappa_1^{\pm} u_{0,\,xx} \pm S^{\pm}\right), \quad \sigma_2^{\pm} = \pm\left(\kappa_2^{\pm} w_{2,\,xx} \pm q^{\pm}\right) \mp \kappa_3^{\pm} w_{0,\,tt}, \\
&\text{Б)} \qquad \tau_2^{\pm} = \pm\left(\kappa_1^{\pm} u_{0,\,xx} \pm S^{\pm} - \kappa_3^{\pm} u_{0,\,tt}\right), \quad \sigma_2^{\pm} = \mp\kappa_3^{\pm} w_{2,\,tt}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Опуская детали интегрирования данной краевой задачи, выпишем уравнения, позволяющие найти поправки к компонентам вектора перемещения и тензора напряжений. В случае А) получаем поправки к перемещениям

$$
\begin{aligned}
w_2 &= \frac{1}{2} c_v (y^2 - y) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + w_{20}(x,t) - c_v a_1(t) y, \\
u_2 &= \frac{1}{12} c_4 (2y^3 - 3y^2) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - y \frac{\partial w_{20}}{\partial x} + u_{20}(x,t),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

а также к напряжениям

$$
\begin{aligned}
\tau_2 = &-\frac{c_0}{12}(y^4 - 2y^3 + y)\frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} - \frac{1}{2}[(\kappa_1^+ - \kappa_1^-)y + \kappa_1^-]\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \frac{c_0 c_g}{4}(y^2 - y)\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x} + \\
&+ \frac{c_0}{2}(y^2 - y)\frac{\partial^3 w_{20}}{\partial x^3} - (S^- - S^+)y + S^-,
\end{aligned}
\tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_2 = &\frac{c_0}{120}(2y^5 - 5y^4 + 5y^2)\frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} + \frac{1}{4}[(\kappa_1^+ - \kappa_1^-)y^2 + 2\kappa_1^- y]\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \\
&+ \frac{c_6}{12}(2y^3 - 3y^2)\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x} + \kappa_3^- \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - \frac{c_0}{12}(2y^3 - 3y^2)\frac{\partial^4 w_{20}}{\partial x^4} - \\
&- \kappa_2^- \frac{\partial^2 w_{20}}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 w_{20}}{\partial t^2} + \frac{y^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(S^- - S^+) - y\frac{\partial S^-}{\partial x} - \frac{c_0}{2}\frac{d^2 a_1}{dt^2} y^2,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где функции u_{20}, w_{20} находятся из уравнений

$$
\begin{aligned}
c_0 \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x^2} = &\frac{c_0}{12}\frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} + \frac{1}{2}(\kappa_1^+ - \kappa_1^- + 2c_v\kappa_2^-)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \frac{c_v}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x} + \\
&+ \frac{c_0}{2}\frac{\partial^3 w_{20}}{\partial x^3} - c_v \frac{\partial q^-}{\partial x} + S^- - S^+ + \frac{d^2 a_1}{dt^2}x + \frac{d^2 a_0}{dt^2}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

и

$$
\mathbf{D}_1 w_{20} = -\frac{c_0}{60}\frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} - \frac{\kappa_1}{4}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{c_6}{12}\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x} - \kappa_3 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(S^+ + S^-) + \frac{c_0}{2}\frac{d^2 a_1}{dt^2}.
\tag{26}
$$

В случае Б) формулы (22) остаются неизменными, а поправки к напряжениям принимают вид

$$\tau_2 = -\frac{c_0}{12}(y^4 - 2y^3 + y)\frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} - \frac{1}{2}[(\kappa_1^+ - \kappa_1^-)y + \kappa_1^-]\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{c_0}{2}(y^2 - y)\frac{\partial^3 w_{20}}{\partial x^3} + \\ + \frac{1}{4}\left[c_0 c_g(y - y^2) + 2(\kappa_3^+ - \kappa_3^-)y + 2\kappa_3^-\right]\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x} - (S^- - S^+)y + S^-, \tag{27}$$

$$\sigma_2 = \frac{c_0}{120}(2y^5 - 5y^4 + 5y^2)\frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} + \frac{1}{4}[(\kappa_1^+ - \kappa_1^-)y^2 + 2\kappa_1^- y]\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \\ + \frac{1}{12}\left[c_6(2y^3 - 3y^2) + 3(\kappa_3^- - \kappa_3^+)y^2 - 6\kappa_3^- y\right]\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x} - \frac{c_0}{12}(2y^3 - 3y^2)\frac{\partial^4 w_{20}}{\partial x^4} + \\ + (\kappa_3^- + y)\frac{\partial^2 w_{20}}{\partial t^2} - + \frac{y^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(S^- - S^+) - y\frac{\partial S^-}{\partial x} - \frac{c_0}{2}\frac{d^2 a_1}{dt^2}y^2, \tag{28}$$

где

$$c_0\frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x^2} = \frac{c_0}{12}\frac{\partial^5 w_0}{\partial x^5} + \frac{\kappa_1}{2}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - \frac{1}{2}\left[c_v + \kappa_3^+ - \kappa_3^-(1 - 2c_v)\right]\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x} + \\ + \frac{c_0}{2}\frac{\partial^3 w_{20}}{\partial x^3} - c_v\frac{\partial q^-}{\partial x} + S^- - S^+ + \frac{d^2 a_1}{dt^2}x + \frac{d^2 a_0}{dt^2}, \tag{29}$$

$$\mathbf{D}_2 w_{20} = -\frac{c_0}{60}\frac{\partial^6 w_0}{\partial x^6} - \frac{\kappa_1}{4}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{1}{12}(c_6 + 3\kappa_3)\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^2 \partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(S^+ + S^-) + \frac{c_0}{2}\frac{d^2 a_1}{dt^2}. \tag{30}$$

Процедура построения высших приближений может быть формально продолжена, однако она приводит к громоздким уравнениям для разыскиваемых величин. Найденные соотношения могут быть использованы как для оценки НДС, так и для исследования свободных и вынужденных колебаний ультратонкой полосы-балки при длинноволновом деформировании с учетом поверхностных эффектов.

Отметим также, что найденные из рассмотрения первых двух приближений законы распределения перемещений и напряжений по толщине полосы-балки существенно отличаются от аналогичных законов, полученных или введенных в качестве гипотез в выше процитированных работах.

4. Эквивалентные одномерные модели. Полученные выше двухмерные уравнения могут быть использованы для вывода эквивалентных одномерных моделей для полосы-балки. Нормальное перемещение срединной линии $y = {}^1\!/_2$ полосы, с учетом $(22)_2$, находится как

$$W = w_0 + \varepsilon^2\left(w_{20} - \frac{1}{2}c_v a_1 - \frac{c_v}{8}w_{0,\,xx}\right). \tag{31}$$

Подействуем на обе стороны формулы (31) оператором $\mathbf{D}_k$ (см. (18) и (19)), где $k = 1, 2$ для случаев А) и Б) соответственно. В результате приходим к уравнениям:

$$I_n\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \delta_{1n}\kappa_2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mathbf{J}_n\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + O\left(\varepsilon^4\right) = \mathcal{F}(x,t), \quad n = 1, 2, \tag{32}$$

где δ_{1n} — символ Кронекера,

$$I_1 = \frac{c_0}{12} + \varepsilon^2 \left(\frac{\kappa_1}{4} + \frac{\kappa_2}{5} \right), \quad I_2 = \frac{1}{12}(c_0 + 3\varepsilon^2 \kappa_1),$$

$$\mathbf{J}_1 = 1 + \varepsilon^2 \left[\kappa_3 - \left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right], \quad \mathbf{J}_2 = 1 + \kappa_3 - \varepsilon^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12} + \frac{9\kappa_3}{20} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad (33)$$

$$\mathcal{F}(x,t) = \mathcal{F}_0 - \varepsilon^2 \left\{ \left(\frac{1}{5} + \frac{c_v}{8} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(S^+ + S^- \right) - \frac{c_0 - c_v}{2} \frac{d^2 a_1}{dt^2} \right\}.$$

Здесь I_n — приведенная или эффективная безразмерная жесткость на изгиб; $\mathbf{J}_n$ — так называемый модифицированный оператор инерции, а $\mathcal{F}(x,t)$ — приведенная к срединной линии полосы-балки безразмерная поперечная сила. Если принять $\kappa_k = 0$ для всех $k = 1, 2, 3$, то оба уравнения (32) вырождаются в одно уравнение типа Тимошенко, учитывающее поперечные сдвиги. При $n = 1$ получаем уравнение, которое учитывает большие остаточные напряжения на лицевых поверхностях, а при $n = 2$ имеем уравнение, учитывающее сильные инерционные эффекты на данных поверхностях.

Для полосы-балки конечной длины уравнения (32) должны быть дополнены граничными условиями на торцах. Вывод корректных граничных условий для эквивалентных одномерных уравнений (32) представляет собой непростую задачу. В работе [28] данные условия были получены для прямоугольной двухслойной пластины с высококонтрастными упругими параметрами в терминах функций Z_i, найденных в первых двух приближениях. Там же было показано, что данные условия эквивалентны классическим граничным условиям для W, если торцы свободно оперты, либо защемлены.

Новизна уравнений (32) заключается не только в учете поверхностных эффектов для ультратонкой полосы-балки, но и в том, что приведенная поперечная сила $\mathcal{F}(x,t)$ содержит компоненты, зависящие как от градиента касательных сил $S^{\pm}(x,t)$, действующих на поверхностях $x_2 = 0, h$, так и от динамической осевой силы $T_1^\circ(t)$, приложенной к одному из торцов полосы-балки, если она имеет конечную длину l. В самом деле, пусть левый торец $x_1 = 0$ шарнирно опертой по линии $x_1 = h/2$ полосы-балки защемлен в направлении x_1, а на правый $x_1 = l$ действует нестационарная сила $T_1^\circ(t)$. Тогда, как следует из (15), $a_0 = 0$. Результирующая осевая сила, действующая в сечении, ортогональном к оси x_1, находится как $T_1 = \int\limits_0^h \hat{\sigma}_{11} dx_2$. Находя напряжение $\hat{\sigma}_{11}$ согласно закону Гука (2) и принимая во внимание найденные выше соотношения для компонент перемещений и их поправок на оси $x_1 = h/2$, без труда находим

$$a_1(t) = \varepsilon^2 \frac{1 - \nu^2}{Eh} T_1^\circ(t) \left(1 + O(\varepsilon^2) \right), \qquad (34)$$

где ν — коэффициент Пуассона для материала упругой полосы. Таким образом, если $T_1^\circ/(Eh)$ — величина порядка ε^{-2}, то неоднородные уравнения (32), где

$$\mathcal{F}(t) = \frac{\varepsilon^4 \nu(1+\nu)}{2Eh} \frac{d^2 T_1^\circ}{dt^2}, \qquad (35)$$

позволяют предсказать динамическую реакцию полосы-балки на изгиб, если к ее торцу приложена нестационарная сила.

5. Пример. В качестве простейшего примера рассмотрим свободные колебания шарнирно опертой по краям $x_1 = 0, l$ полосы-балки и исследуем влияние поверхностных эффектов на нижний спектр собственных частот. Подставляя функцию $W = A\sin(\pi m x)\mathrm{e}^{i\omega t}$ в уравнения (32), где ω — искомая частота, m — число полуволн вдоль оси полосы-балки, приходим к двум соотношениям для безразмерной частоты:

$$\omega_m^2 = \frac{(\pi m)^2 \left\{\kappa_2 + \left[\frac{c_0}{12} + \varepsilon^2\left(\frac{\kappa_1}{4} + \frac{\kappa_2}{5}\right)\right](\pi m)^2\right\}}{1 + \varepsilon^2\left[\kappa_3 + \left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12}\right)(\pi m)^2\right]}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{36}$$

и

$$\omega_m^2 = \frac{\left(\frac{c_0}{12} + \varepsilon^2\frac{\kappa_1}{4}\right)(\pi m)^4}{1 + \kappa_3 + \varepsilon^2\left(\frac{1}{5} + \frac{c_6}{12} + \frac{9\kappa_3}{20}\right)(\pi m)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{37}$$

для случаев А) и Б) соответственно. Размерная частота получается умножением ω_m на характерную частоту ω_*, введенную по формуле (6).

Напомним, что безразмерные параметры $\kappa_1 = \kappa_1^+ + \kappa_1^-$ и $\kappa_2 = \kappa_2^+ + \kappa_2^-$, введенные согласно (5), учитывают суммарный эффект напряжений на поверхности вследствие деформирования полосы-балки в объеме, а также из-за наличия остаточных касательных напряжений $s_0^{\pm}$ в нанопокрытии, а параметр $\kappa_3 = \kappa_3^+ + \kappa_3^-$ фиксирует суммарный эффект поверхностной инерции. Как видно из полученных соотношений (36) и (37), учет поверхностных напряжений, включая остаточные, а также поверхностной инерции приводит к обратным эффектам: поверхностные напряжения повышают частоты, а поверхностная инерция их снижает. При этом в случае А) превалирующим является эффект остаточных напряжений, а в случае Б) — эффект поверхностной инерции.

6. Выводы. Методом асимптотического интегрирования двухмерных уравнений по толщине упругой изотропной полосы-балки, находящейся под действием поверхностных переменных нестационарных сил, получены соотношения для перемещений и напряжений, учитывающие поверхностные эффекты в рамках теории Гуртина—Мурдоха для двух случаев, когда велики: а) остаточные напряжения, б) эффекты поверхностной инерции. Выведенные формулы распределения перемещений и напряжений по толщине полосы являются асимптотически корректными в случае длинноволновой деформации и значительно отличаются от аналогичных соотношений, полученных в рамках моделей, основанных на введении традиционных кинематических гипотез [18–22]. Для рассматриваемых случаев интенсивности остаточных поверхностных напряжений и инерции получены неоднородные дифференциальные уравнения типа Тимошенко, учитывающие наличие поперечных сдвигов в объеме, а также поверхностных эффектов. В отличие от известных уравнений полученные уравнения могут быть использованы для анализа вынужденных изгибных колебаний под действием не только нормальной нагрузки, но и при действии переменных поверхностных касательных сил, а также слабых нестационарных сил, приложенных к торцам полосы-балки. На примере ультратонкой шарнирно-опертой полосы-балки показано, что поверхностные напряжения приводят к росту собственных частот из нижнего спектра, а учет поверхностной инерции, наоборот, снижает эти частоты.

Предложенная в статье методология может быть использована для вывода асимптотически корректных уравнений длинноволновой деформации ультратонких пластин и оболочек с учетом поверхностных эффектов.

Литература

1. Qiao Q., Xia J., Lee C., Zhou G. Applications of photonic crystal nanobeam cavities for sensing. *Micromachines* **9** (11), 541 (2018). https://doi.org/10.3390/mi9110541

2. Pfeifer H., Paraïso K. T., Zang L., Painter O. Design of tunable GHz-frequency optomechanical crystal resonators. *Optics Express* **24** (11), 11407–11419 (2016). https://doi.org/10.1364/OE.24.011407

3. Lee H. L., Chang W. J. Sensitivity of V-shaped atomic force microscope cantilevers based on a modified couple stress theory. *Microelectronic Engineering* **88** (11), 3214–3218 (2011). https://doi.org/10.1016/j.mee.2011.09.001

4. Mikhasev G., Radi E., Misnik V. Modeling pull-in instability of CNT nanotweezers under electrostatic and van der Waals attractions based on the nonlocal theory of elasticity. *International Journal of Engineering Science* **195**, 104012 (2024). https://dx.doi.org/10.1016/j.ijengsci.2023.104012

5. Cuenot S., Fretigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Physical Review B* **69** (16), 165410–165415 (2004).

6. Zhang H., Sun C. T. Nanoplate model for platelike nanomaterials. *AIAA Journal* **42** (10), 2002–2009 (2004).

7. Zhou L. G., Huang H. Are surface elastically softer or stiffer? *Applied Physics Letters* **84**, 1940–1942 (2004).

8. Eringen A. C. *Nonlocal continuum field theories*. New York, Springer (2002).

9. Aifanties E. Update on a class of gradient theories. *Mechanics of Materials* **35** (3–6), 259–280 (2003).

10. Steigmann D. J., Ogden R. W. Elastic surface-substrate interactions. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A — Mathematical Physical and Engineering Sciences* **455**, 437–474 (1999).

11. Gurtin M. E., Murdoch A. I. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures* **14** (6), 431–440 (1978).

12. Eremeyev V. A., Rosi G., Naili S. Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy. *Mechanics Research Communications* **74**, 8–13 (2016). https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.02.018

13. Zhu F., Pan E., Qian Z., Wang Y. Dispersion curves, mode shapes, stresses and energies of SH and Lamb waves in layered elastic nanoplates with surface/interface effect. *International Journal of Engineering Science* **142**, 170–184 (2019). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.003

14. Mikhasev G. I., Botogova M. G., Eremeyev V. A. Anti-plane waves in an elastic thin strip with surface energy. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A* **380**, 20210373–15 (2022). https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0373

15. Mikhasev G. I., Erbas B., Eremeyev V. A. Anti-plane shear waves in an elastic strip rigidly attached to an elastic half-space. *International Journal of Engineering Science* **184**, 103809 (2023). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103809

16. Gorbushin N., Eremeyev V. A., Mishuris G. On stress singularity near the tip of a crack with surface stresses. *International Journal of Engineering Science* **146**, 103183 (2020). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103183

17. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica* **24** (1), 52–82 (2011).

18. Lim C. W., He L. H. Size-dependent nonlinear response of thin elastic films with nanoscale thickness. *International Journal of Mechanical Science* **46**, 1715–1726 (2004).

19. Lu P., He L. H., Lee H. P., Lu C. Thin plate theory including surface effects. *International Journal of Solids and Structures* **43**, 4631–4647 (2006).

20. Lu L., Guoa X., Zhao J. On the mechanics of Kirchhoff and Mindlin plates incorporating surface energy. *International Journal of Engineering Science* **124**, 24–40 (2018). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.11.020

21. Zhou J., Lu P., Xue Y., Lu C. A third-order plate model with surface effect based on the Gurtin — Murdoch surface elasticity. *Thin-Walled Structures* **185**, 110606 (2023).

22. Yang W., Wang S., Kang W., Yu T., Li Y. A unified high-order model for size-dependent vibration of nanobeam based on nonlocal strain/stress gradient elasticity with surface effect. *International Journal of Engineering Science* **182**, 103785 (2023). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.10378

23. Альтенбах Х., Еремеев В. А., Морозов Н. Ф. Об уравнениях линейной теории оболочек при учете поверхностных напряжений. *Известия РАН. Механика твердого тела* **3**, 30–44 (2010).

24. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the shell theory on the nanoscale with surface stresses. *International Journal of Engineering Science* **49** (12), 1294–1301 (2011). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.03.011

25. Altenbach H., Eremeyev V. A., Morozov N. F. Surface viscoelasticity and effective properties of thin-walled structures at the nanoscale. *International Journal of Engineering Science* **59**, 83–89 (2012). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.03.004

26. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the elastic plates and shells with residual surface stresses. *Procedia IUTAM* **21**, 25–32 (2017). https://doi.org/10.1016/j.piutam.2017.03.033

27. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko — Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **97** (3), 296–308 (2017). https://doi.org/10.1002/zamm.201600052

28. Mikhasev G. Asymptotic long-wave model for a high-contrast two-layered elastic plate. *Mathematics and Mechanics of Solids* **29** (4), 776–795 (2024). https://doi.org/10.1177/10812865231215294

Статья поступила в редакцию 20 января 2024 г.;
доработана 17 февраля 2024 г.;
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

Контактная информация:

Михасев Геннадий Иванович — д-р физ.-мат. наук, проф.; mikhasev@hit.edu.cn
Ле Нгуен Динь — аспирант; dinhnguyen081017@gmail.com

Asymptotic model of long-wave vibrations of an ultrathin strip-beam taking into account surface effects

G. I. Mikhasev[1], *N. D. Le*[2]

[1] School of Astronautics, Harbin Institute of Technology,
92, West Dazhi street, Harbin, 150001, China
[2] Belarusian State University,
4, pr. Nezavisimosti, Minsk, 220030, Belarus

For citation: Mikhasev G. I., Le N. D. Asymptotic model of long-wave vibrations of an ultrathin strip-beam taking into account surface effects. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 557–569.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.312 (In Russian)

The paper is concerned with the derivation of asymptotically consistent equations governing long-wave vibrations of an ultrathin elastic strip-beam taking into account surface effects within the framework of the Gurtin — Murdoch theory of the surface elasticity. Two-dimensional equations of motion of an elastic isotropic medium are used as the initial ones. In the general case, the strip-beam is under the action of variable unsteady surface forces. The presence of residual shear stresses is assumed on the face surfaces. The ratio of the strip thickness to the characteristic length of bending deformation is considered as a small parameter. Within the framework of the Gurtin — Murdoch theory, two cases are considered, providing for the presence of large a) residual stresses on the faces, b) effects of surface inertia. Using the method of asymptotic integration over the transverse direction, relations for displacements and stresses in an ultra-thin strip-beam are obtained, and equivalent one-dimensional the Timoshenko type equations taking into account surface effects are derived. As an example, free vibrations of a simply supported beam accounting for the surface effects are considered.

Keywords: ultrathin strip-beam, surface elasticity, residual stresses, long-wave vibrations, asymptotic, equivalent 1D models.

References

1. Qiao Q., Xia J., Lee C., Zhou G. Applications of photonic crystal nanobeam cavities for sensing. *Micromachines* **9** (11), 541 (2018). https://doi.org/10.3390/mi9110541

2. Pfeifer H., Paraïso K. T., Zang L., Painter O. Design of tunable GHz-frequency optomechanical crystal resonators. *Optics Express* **24** (11), 11407–11419 (2016). https://doi.org/10.1364/OE.24.011407

3. Lee H. L., Chang W. J. Sensitivity of V-shaped atomic force microscope cantilevers based on a modified couple stress theory. *Microelectronic Engineering* **88** (11), 3214–3218 (2011). https://doi.org/10.1016/j.mee.2011.09.001

4. Mikhasev G., Radi E., Misnik V. Modeling pull-in instability of CNT nanotweezers under electrostatic and van der Waals attractions based on the nonlocal theory of elasticity. *International Journal of Engineering Science* **195**, 104012 (2024). https://dx.doi.org/10.1016/j.ijengsci.2023.104012

5. Cuenot S., Fretigny C., Demoustier-Champagne S., Nysten B. Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy. *Physical Review B* **69** (16), 165410–165415 (2004).

6. Zhang H., Sun C. T. Nanoplate model for platelike nanomaterials. *AIAA Journal* **42** (10), 2002–2009 (2004).

7. Zhou L. G., Huang H. Are surface elastically softer or stiffer? *Applied Physics Letters* **84**, 1940–1942 (2004).

8. Eringen A. C. *Nonlocal continuum field theories.* New York, Springer (2002).

9. Aifanties E. Update on a class of gradient theories. *Mechanics of Materials* **35** (3–6), 259–280 (2003).

10. Steigmann D. J., Ogden R. W. Elastic surface-substrate interactions. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A — Mathematical Physical and Engineering Sciences* **455**, 437–474 (1999).

11. Gurtin M. E., Murdoch A. I. Surface stress in solids. *International Journal of Solids and Structures.* **14** (6), 431–440 (1978).

12. Eremeyev V. A., Rosi G., Naili S. Surface/interfacial anti-plane waves in solids with surface energy. *Mechanics Research Communications* **74**, 8–13 (2016). https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2016.02.018

13. Zhu F., Pan E., Qian Z., Wang Y. Dispersion curves, mode shapes, stresses and energies of SH and Lamb waves in layered elastic nanoplates with surface/interface effect. *International Journal of Engineering Science* **142**, 170–184 (2019). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.06.003

14. Mikhasev G. I., Botogova M. G., Eremeyev V. A. Anti-plane waves in an elastic thin strip with surface energy. *Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A* **380**, 20210373–15 (2022). https://doi.org/10.1098/rsta.2021.0373

15. Mikhasev G. I., Erbas B., Eremeyev V. A. Anti-plane shear waves in an elastic strip rigidly attached to an elastic half-space. *International Journal of Engineering Science* **184**, 103809 (2023). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103809

16. Gorbushin N., Eremeyev V. A., Mishuris G. On stress singularity near the tip of a crack with surface stresses. *International Journal of Engineering Science* **146**, 103183 (2020). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2019.103183

17. Wang J., Huang Z., Duan H., Yu S., Feng X., Wang G., Zhang W., Wang T. Surface stress effect in mechanics of nanostructured materials. *Acta Mechanica Solida Sinica* **24** (1), 52–82 (2011).

18. Lim C. W., He L. H. Size-dependent nonlinear response of thin elastic films with nanoscale thickness. *International Journal of Mechanical Science* **46**, 1715–1726 (2004).

19. Lu P., He L. H., Lee H. P., Lu C. Thin plate theory including surface effects. *International Journal of Solids and Structures* **43**, 4631–4647 (2006).

20. Lu L., Guoa X., Zhao J. On the mechanics of Kirchhoff and Mindlin plates incorporating surface energy. *International Journal of Engineering Science* **124**, 24–40 (2018). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2017.11.020

21. Zhou J., Lu P., Xue Y., Lu C. A third-order plate model with surface effect based on the Gurtin — Murdoch surface elasticity. *Thin-Walled Structures* **185**, 110606 (2023).

22. Yang W., Wang S., Kang W., Yu T., Li Y. A unified high-order model for size-dependent vibration of nanobeam based on nonlocal strain/stress gradient elasticity with surface effect. *International Journal of Engineering Science* **182**, 103785 (2023). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.10378

23. Al'tenbakh Kh., Eremeev V. A., Morozov N. F. On the equations of the linear theory of shells taking into account surface stresses. Izvestiia RAN. *Mekhanika tverdogo tela* **3**, 30–44 (2010). (In Russian)

24. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the shell theory on the nanoscale with surface stresses. *International Journal of Engineering Science* **49** (12), 1294–1301 (2011). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.03.011.

25. Altenbach H., Eremeyev V. A., Morozov N. F. Surface viscoelasticity and effective properties of thin-walled structures at the nanoscale. *International Journal of Engineering Science* **59**, 83–89 (2012). https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.03.004

26. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the elastic plates and shells with residual surface stresses. *Procedia IUTAM* **21**, 25–32 (2017). https://doi.org/10.1016/j.piutam.2017.03.033

27. Tovstik P. E., Tovstik T. P. Generalized Timoshenko — Reissner models for beams and plates, strongly heterogeneous in the thickness direction. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* **97** (3), 296–308 (2017). https://doi.org/10.1002/zamm.201600052

28. Mikhasev G. Asymptotic long-wave model for a high-contrast two-layered elastic plate. Mathematics and Mechanics of Solids (2024). https://doi.org/10.1177/10812865231215294

Received: January 20, 2024
Revised: February 17, 2024
Accepted: February 22, 2024

Authors' information:

Gennadii I. Mikhasev — mikhasev@hit.edu.cn
Nguen D. Le — dinhnguyen081017@gmail.com