

Методы моделирования диссипативных характеристик слоистых композитов

В. М. Рябов¹, Б. А. Ярцев²

¹ Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
² Крыловский государственный научный центр,
Российская Федерация, 196158, Санкт-Петербург, Московское шоссе, 44

Для цитирования: Рябов В. М., Ярцев Б. А. Методы моделирования диссипативных характеристик слоистых композитов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 570–583.
<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.313>

Рассмотрены основные методы моделирования диссипативных характеристик слоистых композитов: принцип упруго-вязкоупругого соответствия и энергетический метод. Приведены математические модели затухающих колебаний слоистых анизотропных пластин. Описана численная процедура решения задачи о затухающих колебаниях трехслойной моноклинной пластины, содержащая двухэтапный метод решения комплексной задачи на собственные значения. Отмечено, что энергетический метод моделирования рассеяния энергии при колебаниях слоистых композитных структур является частным случаем метода, основанного на принципе упруго-вязкоупругого соответствия. Показано, что помимо классической формулировки энергетического метода, в которой члены уравнения баланса энергии приближенно находят по собственным формам и частотам колебаний консервативной механической системы, существует еще один приближенный способ вычисления диссипативных характеристик ортотропных композитных структур. К достоинствам этого способа следует отнести возможность использования существующих коммерческих программных комплексов (Ansys и др.), численно реализующих метод конечных элементов, а к недостаткам — необходимость ограничиваться использованием классических теорий тонкостенных конструкций (Бернулли — Эйлера, Кирхгоффа — Лява) для описания деформирования композитных структур. Установлено, что использование классической формулировки энергетического метода позволяет с высокой точностью прогнозировать значения коэффициентов механических потерь до величин $\eta_{\max} = 0,02$. Дальнейшее увеличение уровней демпфирования конструкции сопровождается уменьшением точности прогноза.

Ключевые слова: композит, моделирование, колебания, собственная частота, диссипативные характеристики, принцип упруго-вязкоупругого соответствия, энергетический метод.

Характерные для полимерных композитов уровни диссипативных характеристик, превосходящие аналогичные показатели для металлов и сплавов на 1–2 десятичных порядка, позволяют рассматривать демпфирование в композитных конструкциях не как полезный вторичный эффект, а как один из основных параметров проектирования [1–7]. Поскольку рассеяние энергии в композитных структурах в первую очередь определяется вязкоупругой релаксацией напряжений в полимерной

матрице и волокнах, то наиболее распространенный способ прогнозирования диссипативных характеристик таких материалов связан с рассмотрением затухающих колебаний вязкоупругого анизотропного тела. Известны два основных метода моделирования процессов рассеяния энергии при затухающих колебаниях композитных структур: принцип упруго-вязкоупругого соответствия в линейной теории вязкоупругости и энергетический метод [5–7]. Рассмотрим эти методы.

1. Уравнения движения однородного упругого анизотропного тела могут быть получены либо на основе принципа Даламбера путем добавления в уравнения равновесия статической теории упругости к действующим силам F_i силы инерции $-\rho\ddot{u}_i$ [8, 9], либо используя вариационный принцип Гамильтона [10–13]. Согласно последнему принципу истинное движение выделяется из всех возможных движений, переводящих систему из одного и того же начального положения за один и тот же промежуток времени в одно и то же конечное положение тем, что для него и только для него интеграл действия принимает стационарное значение

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt - \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V F_i \delta u_i dV - \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{S_\sigma} f_i \delta u_i dS = 0. \quad (1)$$

Здесь $L = T - U$ — функция Лагранжа; T — кинетическая энергия системы; U — потенциальная энергия деформации. Внешние объемные F_i и поверхностные f_i силы рассматриваются как заданные.

При выводе уравнений вариационный принцип предпочтительнее, поскольку он позволяет на каждом этапе контролировать вводимые упрощения. Применение этого способа позволяет избежать ошибок при учете динамических членов. Дело в том, что динамические члены, которые необходимо учесть в уравнениях движения, должны быть согласованы с характером принятых гипотез в основной части уравнений, т. е. с видом напряженного состояния. Выполнить эти условия при использовании принципа Даламбера часто оказывается затруднительным, в то время как при применении вариационного принципа Гамильтона существует достаточно надежный критерий сохранения тех или иных динамических членов, состоящий в выполнении энергетических оценок погрешности пренебрежения отдельными членами в выражении для кинетической энергии системы. Кроме того, применение вариационного принципа Гамильтона позволяет наряду с уравнениями движения также получить и соответствующие граничные условия. Это особенно важно для приближенных одномерных и двумерных теорий, которые могут содержать известные внутренние противоречия.

2. В соответствии с принципом упруго-вязкоупругого соответствия решение задачи стационарных квазигармонических колебаний для вязкоупругого тела можно получить из решения соответствующей задачи для упругого тела путем замены упругих постоянных соответствующими комплексными модулями или комплексными коэффициентами податливости [14–16]. Граничные условия для двух задач должны быть одинаковыми и в каждой задаче инерционный член может быть выражен в форме $\partial^2 u_i / \partial t^2$.

Сведение трехмерных соотношений (1) к двумерным уравнениям вязкоупругих пластин и одномерным уравнениям вязкоупругих стержней выполняется путем введения кинематических гипотез. Например, для слоистых анизотропных пластин

элементы вектора перемещений представляются разложениями вида

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= \sum_{k=0}^m \bar{u}_k(x, y, t) z^k, \\ u_2(x, y, z, t) &= \sum_{k=0}^m \bar{v}_k(x, y, t) z^k, \\ u_3(x, y, z, t) &= \sum_{k=0}^n \bar{w}_k(x, y, t) z^k. \end{aligned} \quad (2)$$

Число удерживаемых членов разложений (2) определяется степенью неоднородности пластины по толщине. Если неоднородность пластины невелика, то при описании ее деформирования достаточно ограничиться значениями $m = 1$, $n = 0$ (уточненная теория пластин первого порядка [17, 18]). При исследовании трехслойной пластины, образованной жесткими наружными и мягким средним слоями, используется уточненная теория Болотина [12]. Для жестких слоев в правых частях равенств (2) удерживаются слагаемые $m = 1$, $n = 0$ [19], а необходимость учета обжатия мягкого слоя требует удержания слагаемых при $m = n = 1$ [20].

Подстановка разложений (2) в функционал Гамильтона (1) и его последующая минимизация сводят задачу о затухающих колебаниях конструкции к алгебраической проблеме комплексных собственных значений

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = 0. \quad (3)$$

Матрица жесткости \mathbf{C} вычисляется по амплитудным значениям потенциальной энергии деформации U слоистой анизотропной пластины, а матрица масс \mathbf{M} — по амплитудным значениям кинетической энергии T слоистой анизотропной пластины.

Известно, что при построении низкочастотной части спектра собственных колебаний даже квазигомогенной прямоугольной пластины конечных размеров возникает трудность, связанная с удовлетворением граничных условий. Для изотропной или ортотропной пластины при шарнирном закреплении кромок возможно получение решения в явном виде в результате разделения переменных. Для моноклиной пластины разделение переменных невозможно ни при каких граничных условиях и для построения решения приходится прибегать к вариационным численным методам [21, 22]. Поэтому, не умаляя общности рассуждений, приведем краткое описание численной процедуры решения задачи о затухающих колебаниях трехслойной моноклиной композитной пластины.

В уравнение (3) входят производные функций $\bar{u}_k, \bar{v}_k, \bar{w}_k$, поэтому будем искать приближения к ним в аналитическом виде, а не численно во избежание потери точности при последующем дифференцировании.

Предварительно с помощью замен переменных перейдем к стандартному отрезку $[-1, 1]$ по обоим переменным x, y . Используем метод Рунге — искомые функции определяем в виде разложений

$$\sum_{m, n=1}^N a_{mn} \phi_m(x) \psi_n(y) \quad (4)$$

при подходящем выборе системы ϕ_m, ψ_n [23]. Подстановка приближений вида (4) в систему (3) и последующая процедура метода Рунге приводят к системе линейных алгебраических уравнений порядка $N_1 = 10N^2$.

При разработке комплекса программ, реализующих описанную схему, необходимо согласовать возможности вычислительной техники (скорость вычислений, объем оперативной и внешней памяти, простота реализации и выполнения необходимых математических операций, в том числе на комплексной плоскости и т. п.) с требованиями, предъявляемыми к параметрам метода.

Прежде всего, возникает вопрос о рациональном выборе координатной системы ϕ_m, ψ_n . Использование тригонометрических систем нерационально из-за невысокой скорости сходимости (она имеет порядок $N_1^{-3/2}$, см. [24]) и ввиду большого порядка системы (так, при $N = 10$ он равен 1000). Теоретически можно брать большие значения N , но тогда необходимо привлекать внешнюю память, что резко увеличит время выполнения программ из-за постоянного обращения к ней. В случае использования полиномиальных координатных функций скорость сходимости зависит лишь от свойств решения (его гладкости) и может быть сколь угодно большой.

В качестве координатных функций целесообразно выбирать многочлены Лежандра [25], домноженные при необходимости (для выполнения соответствующих граничных условий в решаемой задаче) на $(1 - x)$ и $(1 + x)$ в подходящих степенях, т. е. использовать функции $\phi_n(x), \psi_n(x)$ вида

$$(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta P_{n-1}(x), \quad \alpha, \beta = 0, 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Многочлены Лежандра $P_n(x)$ легко вычисляются с помощью трехчленных рекуррентных соотношений, а производные выбранных функций просто выражаются через многочлены Якоби.

При формировании матрицы системы линейных алгебраически уравнений наряду со значениями координатных функций и их производных, определяемых описанным способом точно, приходится многократно вычислять интегралы вида

$$\int_{-1}^1 \phi_m^{(p)}(x) \phi_n^{(q)}(x) dx, \quad \int_{-1}^1 \psi_m^{(p)}(y) \psi_n^{(q)}(y) dy$$

для всевозможных значений параметров p, q, m, n . Теоретически эту операцию можно осуществить аналитически, так как интегрируются многочлены, к тому же относительно небольшие по абсолютной величине на отрезке интегрирования, однако этот путь неустойчив из-за большого разброса коэффициентов многочленов.

Для устойчивого вычисления указанных интегралов используются квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности [25] вида

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k).$$

Они точны для многочленов степени не выше $2n - 1$, и потому требуемые величины вычисляются практически точно при подходящем выборе n . Узлы x_k и коэффициенты A_k не зависят от интегрируемой функции и могут быть вычислены заранее.

Для решения системы линейных алгебраических уравнений реализован метод Жордана [26] с выбором главного элемента по всей матрице.

Необходимым условием существования нетривиальных решений однородной системы (3) является равенство нулю ее определителя, т. е.

$$F(\omega) \equiv \det(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (5)$$

Это и есть уравнение для определения собственных частот колебаний.

Вначале разыскивается вещественное решение. Вещественные собственные частоты находятся следующим образом: задается некоторый диапазон $[\omega_{\text{start}}, \omega_{\text{finish}}]$, в котором предположительно расположена искомая частота. Заданный диапазон пробегается с некоторым шагом, каждый раз вычисляется знак определителя $F(\omega)$. Если знак меняется, то соответствующий частичный интервал содержит частоту, при которой определитель равен нулю. Далее описанная процедура повторяется для найденного частичного интервала, уменьшая шаг. Затем по найденной таким способом с требуемой точностью частоте находится какое-либо нетривиальное решение однородной системы, оно и определит соответствующую форму собственных колебаний.

При отсутствии температурно-частотной зависимости модулей накопления, компоуемых в слоистую структуру разнородных вязкоупругих слоев, матрица \mathbf{C} не зависит от частоты ω и вычисляется один раз, как и матрица \mathbf{M} , а затем они используются многократно. В противном случае с изменением частоты все элементы матрицы \mathbf{C} необходимо вычислять заново, что резко увеличивает время вычислений описанным выше способом. Для преодоления этого затруднения задается некоторый начальный диапазон $[\omega_{\text{start}}, \omega_{\text{finish}}]$, содержащий искомую частоту. Затем вычисляются модули накопления вязкоупругих слоев при некоторой фиксированной частоте из этого диапазона, например для $\omega = (\omega_{\text{start}} + \omega_{\text{finish}})/2$, после чего решается уравнение (5) с вычисленными «постоянными» матрицами \mathbf{C} , \mathbf{M} . Далее берется некоторая небольшая окрестность полученной частоты и повторяется только что описанная процедура до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность. Как правило, достаточно 4–5 шагов таких итераций.

В случае затухающих колебаний модули накопления заменяются соответствующими комплексными модулями. Искомые собственные частоты становятся комплексными числами и указанный способ их нахождения неприменим.

В качестве начального приближения к искомой комплексной частоте выбирается комплексное число $\omega^{(0)}$, вещественная часть которого равна частоте упругих собственных колебаний с модулями, равными вещественным частям соответствующих комплексных модулей, а мнимая часть — произвольному значению в пределах ожидаемого коэффициента механических потерь, после чего строится итерационная последовательность

$$\omega^{(k+1)} = \omega^{(k)} - \frac{F(\omega^{(k)})}{F'(\omega^{(k)})} - \frac{F^2(\omega^{(k)})F''(\omega^{(k)})}{2F'^3(\omega^{(k)})}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Эта последовательность сходится с третьим порядком к искомой частоте, т. е. погрешность на следующем шаге приближенно равна кубу предыдущей погрешности [26].

Необходимые в расчетах производные точно определить невозможно, поэтому они находятся приближенно по формулам численного дифференцирования второго порядка точности

$$F'(z) \approx \frac{F(z + h_z) - F(z - h_z)}{2h_z}, \quad F''(z) \approx \frac{F(z + h_z) - 2F(z) + F(z - h_z)}{h_z^2}$$

при подходящем выборе шага h_z в зависимости от точки z .

Следовательно, на каждом шаге итерации требуется трижды вычислять значение определителя большого порядка, что и определяет основное время работы программы.

Отметим, что на величину определителя влияют его порядок $N_1 = 10N^2$, значение искомой частоты ω , а также способ нормировки уравнений, позволяющий избежать промежуточных переполнений и исчезновений порядков чисел. С ростом N_1 определитель быстро убывает по модулю. Простейший эффективный способ масштабирования состоит в умножении каждой строки определителя на одно и то же число a , в результате чего он изменится в a^{N_1} раз. Например, при $a = 2$ и $N_1 = 1000$ имеем $a^{N_1} \approx 10^{300}$. Следовательно, достаточно взять $a \in [1, 2]$ для того, чтобы удерживать величину определителя в разумных пределах.

По вычисленным значениям вещественных и мнимых частей комплексных собственных частот находятся величины коэффициентов механических потерь.

Для этого рассмотрим произвольное комплексное число $z = a + ib$. Запишем его в тригонометрической форме:

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) = r (\cos \phi + i \sin \phi) = r \exp(i\phi),$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\phi = \arctg(b/a)$.

Отметим, что при малых значениях величины b/a можно положить $\phi \approx b/a$.

Искомая комплексная частота затухающих колебаний ω находится из уравнения (5). Положим

$$\lambda = \omega^2 = \operatorname{Re} \lambda + i \operatorname{Im} \lambda = \operatorname{Re} \lambda (1 + i\eta), \quad (6)$$

где $\eta = \operatorname{Im} \lambda / \operatorname{Re} \lambda$ — коэффициент механических потерь колебаний с частотой ω .

Учитывая (6), запишем

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\lambda} = \sqrt{\operatorname{Re} \lambda} \sqrt{1 + i\eta}, \\ \sqrt{1 + i\eta} &= \sqrt[4]{1 + \eta^2} \exp\left(i \frac{\arctg \eta}{2}\right). \end{aligned}$$

Находя отсюда вещественную и мнимую части комплексной собственной частоты, придем к соотношению

$$\frac{\operatorname{Im} \omega}{\operatorname{Re} \omega} = \operatorname{tg} \frac{\arctg \eta}{2},$$

откуда

$$\eta = \operatorname{tg} \left(2 \arctg \frac{\operatorname{Im} \omega}{\operatorname{Re} \omega} \right) = \frac{2 \frac{\operatorname{Im} \omega}{\operatorname{Re} \omega}}{1 - \left(\frac{\operatorname{Im} \omega}{\operatorname{Re} \omega} \right)^2}. \quad (7)$$

При малых значениях коэффициента механических потерь ($\eta \ll 1$) формула (7) заменяется приближенным соотношением

$$\eta \approx 2 \arctg \frac{\operatorname{Im} \omega}{\operatorname{Re} \omega} \approx 2 \frac{\operatorname{Im} \omega}{\operatorname{Re} \omega}. \quad (8)$$

Приближенное соотношение (8) широко используется множеством исследователей затухающих колебаний композитных конструкций, образованных совокупностью произвольно ориентированных вязкоупругих армированных слоев [1–7].

Таким образом, для вычисления коэффициентов механических потерь не нужно определять соответствующие собственные формы, что представляет собой достаточно сложную и менее устойчивую задачу.

3. Энергетический метод заключается в анализе уравнения баланса энергии с учетом потерь на внутреннее трение для каждой собственной формы колебаний. При этом значения членов в уравнении баланса энергии приближенно находят по формам и частотам колебаний консервативной системы. Таким образом, каждой собственной форме колебаний ставят в соответствие коэффициент диссипации $\psi = 2\pi\eta$, определяемый как отношение рассеянной составляющей потенциальной энергии деформации ΔU к максимальной накопленной составляющей потенциальной энергии деформации U в элементе за один цикл свободных затухающих колебаний. Произведение коэффициента диссипации на соответствующую ему собственную частоту представляет собой относительную мощность диссипации q , характеризующую относительное рассеяние энергии за единицу времени при гармонических затухающих колебаниях. Коэффициенты диссипации определяют амплитуды вынужденных колебаний системы в установившемся режиме при резонансе, а мощности диссипации — скорости затухания свободных колебаний [27].

Покажем, что энергетический метод является частным случаем метода, основанного на принципе упруго-вязкоупругого соответствия.

Подставляя равенство (6) в соотношение Рэлея, получим

$$\omega^2 = \omega_R^2(1 + i \cdot \eta) = \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{C}_R \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}} + i \cdot \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{C}_I \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}}, \quad (9)$$

где $\omega = \omega_R + i \cdot \omega_I$ — комплексная собственная частота k -й моды колебаний; $\mathbf{C} = \mathbf{C}_R + i \cdot \mathbf{C}_I$ — комплексная матрица жесткости; \mathbf{M} — вещественная матрица масс; $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + i \cdot \mathbf{u}_I$ — комплексный собственный вектор k -й моды колебаний; $U = \mathbf{u}^T \mathbf{C}_R \mathbf{u}$ — максимальная накопленная составляющая потенциальной энергии деформации k -й моды колебаний; $\Delta U = \mathbf{u}^T \mathbf{C}_I \mathbf{u}$ — рассеянная составляющая потенциальной энергии деформации k -й моды колебаний; $T = \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{u}$ — максимальная кинетическая энергия k -й моды колебаний.

При нахождении элементов матриц $\mathbf{C}_R, \mathbf{C}_I, \mathbf{M}$ используются описанные выше квадратурные формулы наивысшей степени точности для вычисления интегралов от произведений координатных функций и их производных.

При малых возмущениях по непрерывности в равенстве (9) можно заменить \mathbf{u} на \mathbf{u}_R , т. е. воспользоваться приближенной формулой

$$\omega_R^2(1 + i \cdot \eta) \approx \frac{\mathbf{u}_R^T \mathbf{C}_R \mathbf{u}_R}{\mathbf{u}_R^T \mathbf{M} \mathbf{u}_R} + i \cdot \frac{\mathbf{u}_R^T \mathbf{C}_I \mathbf{u}_R}{\mathbf{u}_R^T \mathbf{M} \mathbf{u}_R}. \quad (10)$$

Приравнявая действительную и мнимую части в левой и в правой частях уравнения (10), запишем

$$\omega_R^2 \approx \frac{\mathbf{u}_R^T \mathbf{C}_R \mathbf{u}_R}{\mathbf{u}_R^T \mathbf{M} \mathbf{u}_R}, \quad (11)$$

$$\omega_I^2 = \omega_R^2 \cdot \eta \approx \frac{\mathbf{u}_R^T \mathbf{C}_I \mathbf{u}_R}{\mathbf{u}_R^T \mathbf{M} \mathbf{u}_R}. \quad (12)$$

Из равенств (11), (12) получим величину коэффициента механических потерь k -й моды собственных колебаний

$$\eta \approx \frac{\mathbf{u}_R^T \mathbf{C}_I \mathbf{u}_R}{\mathbf{u}_R^T \mathbf{C}_R \mathbf{u}_R}. \quad (13)$$

В знаменателе дроби (13) стоит максимальная потенциальная энергия деформации, накопленная за один цикл k -й моды колебаний упругой системы, вычисляемая по вещественным частям элементов комплексной матрицы жесткости и вещественным частям элементов собственного вектора. Числитель дроби (13) характеризует рассеянную за один цикл колебаний потенциальную энергию деформации, вычисляемую по мнимым частям элементов комплексной матрицы жесткости и вещественным частям комплексного собственного вектора. Отношение (13) представляет собой основной вариант математической формулировки энергетического метода прогнозирования диссипативных свойств композитных структур [27–29]. В соответствии с этим вариантом приближенное определение коэффициентов механических потерь композитных структур сводится к нахождению собственных частот и собственных форм колебаний консервативной механической системы с последующим вычислением числителя и знаменателя отношения (13).

Энергетический метод широко применяется на практике, прежде всего в силу его простоты и прозрачности механической процедуры, а также внешней привлекательности отсутствия необходимости решения обобщенной комплексной задачи вида (5). Однако с повышением демпфирующей способности достоверность прогноза по формуле (10), вообще говоря, падает. К тому же возмущения в матрице жесткости не эрмитовы, поскольку собственные значения оказываются комплексными, и элементы собственного вектора уже не будут вещественными и ортогональными. Поэтому первое слагаемое в правой части формулы (9) также вносит вклад в мнимую составляющую комплексной собственной частоты, не обязательно малую по сравнению со вторым слагаемым в (10). Вторые слагаемые в формулах (9) и (10) также не обязательно близки друг к другу из-за различия собственных векторов, чего формула (10) вовсе не учитывает. Следовательно, в отличие от решения обобщенной комплексной задачи вида (5), энергетический метод не позволяет обеспечить надежное прогнозирование диссипативных свойств композитных структур с высокой демпфирующей способностью.

Помимо математической формулировки энергетического метода (13) из равенства (12) следует еще один приближенный способ вычисления диссипативных характеристик ортотропных композитных структур:

$$\eta \approx \frac{\omega_I^2}{\omega_R^2}. \quad (14)$$

В соответствии с равенством (14) для нахождения η достаточно определить собственные частоты и собственные формы колебаний двух конструкций одинаковой геометрии и массы: при формировании матрицы жесткости первой конструкции \mathbf{C}_R используются вещественные части комплексных модулей, в то время как при формировании матрицы жесткости второй конструкции \mathbf{C}_I — мнимые части комплексных модулей. Из анализа собственных форм колебаний, полученных в результате решения двух задач на собственные значения, необходимо установить пары тождественных собственных форм, которым соответствуют собственные частоты ω_R и ω_I ,

в дальнейшем идентифицируемые как вещественные и мнимые части комплексных собственных частот.

К достоинствам приближенного способа вычисления диссипативных характеристик ортотропных композитных структур (14), в первую очередь, следует отнести возможность использования существующих коммерческих программных комплексов (Ansys и др.), численно реализующих метод конечных элементов. В этом случае тождественность собственных форм колебаний ортотропных композитных конструкций определяется визуально по графическим изображениям собственных форм, т. е. по доминирующим составляющим собственных векторов. Например, при поперечных колебаниях балки Тимошенко из двух составляющих k -го собственного вектора (поперечные линейные смещения оси балки $w_k(x)$ и порождаемые поперечной силой углы поворота $\alpha_k(x)$) в картине собственных форм доминирует функция $w_k(x)$. Очевидно, что влияние функции $\alpha_k(x)$ на собственные формы колебаний возрастает по мере увеличения тона колебаний или уменьшения длины балки.

Заметим, что используемые при формировании матриц C_R и C_I вещественные и мнимые части комплексных модулей характеризуются различными значениями отношения E_i/G_{i3} ($i = 1, 2$). Поэтому учет деформаций сдвига в уравнениях собственных колебаний двух конструкций одинаковой геометрии и массы, отличающихся величинами E_i/G_{i3} , приводит к различному изменению их собственных частот и собственных форм. Таким образом, использование уточненных теорий стержней, пластин и оболочек при моделировании собственных колебаний тонкостенных конструкций в принципе не позволяет найти пару тождественных собственных форм, соответствующих собственным частотам ω_R и ω_I . Преодоление отмеченной проблемы связано с использованием классических теорий Бернулли — Эйлера и Кирхгофа — Лява. В этом случае k -й собственный вектор имеет лишь одну составляющую $w_k(x)$.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим влияние относительной длины l/h на собственные частоты f_1 и коэффициенты механических потерь η_1 основного тона затухающих колебаний двух безопорных балок Тимошенко (высота поперечного сечения $h = 0,005$ м; длина $l \in [0,05; 1,5]$ м.) Первая балка изготовлена из однонаправленного углепластика HMS/DX-209 ($E_1 = 191 \cdot (1 + i \cdot 7,8 \cdot 10^{-4})$ ГПа, $G_{13} = 3 \cdot (1 + i \cdot 1,16 \cdot 10^{-2})$ ГПа, $\rho = 1580$ кг/м³). Вторая балка изготовлена из однонаправленного углепластика с повышенными диссипативными характеристиками, вещественные части комплексных модулей $\text{Re } E_1$ и $\text{Re } G_{13}$ которого равны вещественным частям комплексных модулей однонаправленного углепластика HMS/DX-209, а мнимые части комплексных модулей $\text{Im } E_1$ и $\text{Im } G_{13}$ в 25 раз превышают мнимые части комплексных модулей однонаправленного углепластика HMS/DX-209. Армирующие волокна ориентированы в направлении осей балок ($\theta = 0^0$).

На рис. 1 приведены графики зависимостей безразмерной собственной частоты $\bar{f}_1 = \bar{f}_1(l/h)$ и коэффициента механических потерь $\eta_1 = \eta_1(l/h)$ основного тона колебаний от относительной длины рассматриваемых балок, полученные на основе принципа упруго-вязкоупругого соответствия (9).

Здесь $\bar{f}_1 = f_1 \cdot l^2 \sqrt{\rho / \text{Re } E_1 \cdot h^2}$ — безразмерная собственная частота основного тона поперечных колебаний балки Тимошенко. Графики функций $\bar{f}_1 = \bar{f}_1(l/h)$, полученные на основе энергетического метода в формах (13) и (14), на рис. 1 не показаны, так как они пренебрежимо мало отличаются от изображенных кривых. При $(l/h) \in [1; 300]$ расхождения $\Delta_{\bar{f}(N)} = (\bar{f}_{1(N)} / \bar{f}_{1(9)}) \in [0,99999; 1,00002]$. Здесь и далее $N = (9)$, $N = (13)$, $N = (14)$ соответствуют результатам вычислений

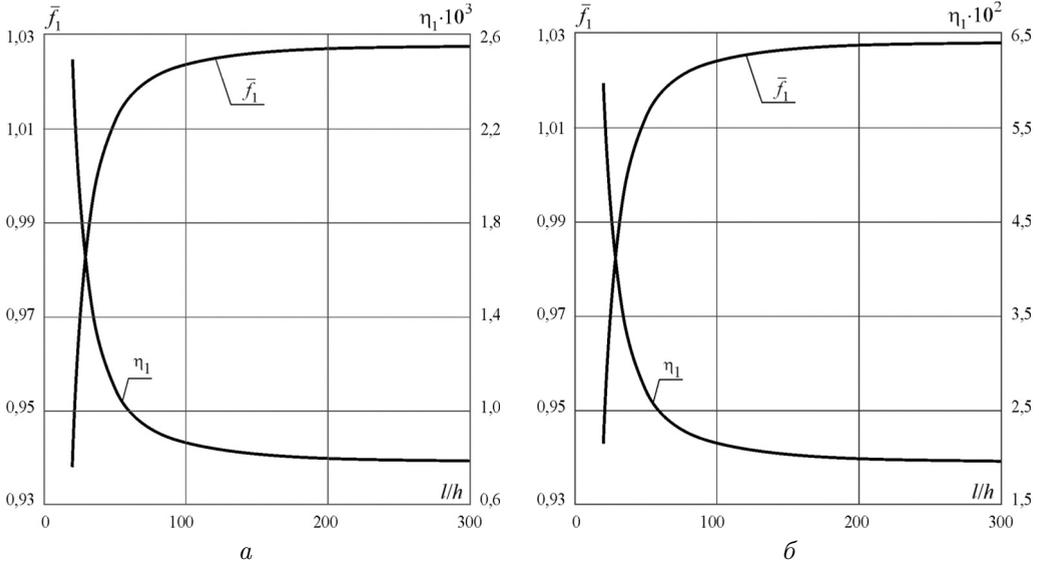


Рис. 1. Зависимости безразмерной собственной частоты и коэффициента механических потерь основного тона поперечных колебаний от относительной длины безопорной балки Тимошенко, изготовленной из углепластика HMS/DX-209 (а) и углепластика с повышенными диссипативными характеристиками (б).

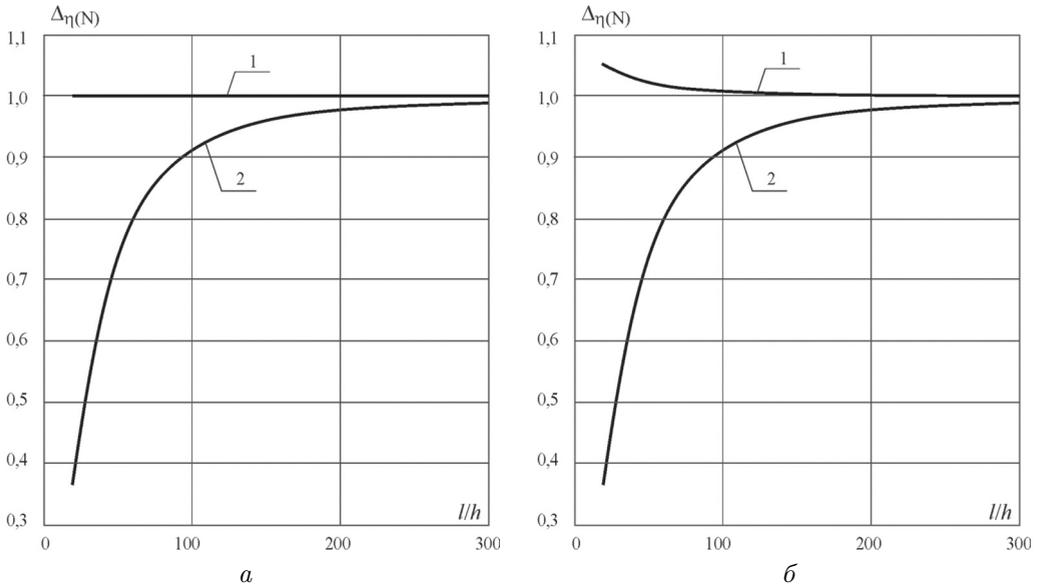


Рис. 2. Зависимости расхождений значений коэффициентов механических потерь основного тона поперечных колебаний от относительной длины безопорной балки Тимошенко, изготовленной из углепластика HMS/DX-209 (а) и углепластика с повышенными диссипативными характеристиками (б).

на основе принципа упруго-вязкоупругого соответствия (9) и энергетического метода в формах (13) и (14).

Графики зависимостей расхождений значений коэффициентов механических потерь основного тона колебаний от относительной длины рассматриваемых балок $\Delta_{\eta(N)} = \Delta_{\eta(N)}(l/h)$ ($\Delta_{\eta(N)} = \eta_{1(N)}/\eta_{1(9)}$), полученных на основе энергетического метода в формах (13) (кривые 1), (14) (кривые 2) и на основе принципа упруго-вязкоупругого соответствия (9), приведены на рис. 2.

Из анализа приведенных на рис. 1 и рис. 2 зависимостей следует:

— расхождения значений коэффициентов механических потерь композитных конструкций, полученных на основе энергетического метода в форме (13) и на основе принципа упруго-вязкоупругого соответствия (9) при $\eta_{\max} \leq 0,02$, пренебрежимо малы ($\Delta_{\eta(13)} \rightarrow 0$). Повышение диссипативных характеристик сопровождается увеличением этих расхождений: $\Delta_{\eta(13)} = 1,05$ при $\eta_{\max} = 0,06$. Очевидно, что дальнейшее повышение η будет приводить к росту $\Delta_{\eta(13)}$;

— достаточная для практических приложений точность прогнозирования диссипативных характеристик на основе энергетического метода в форме (14) может быть обеспечена при $(l/h) \geq 100$.

Литература

1. Bert C. W. Composite materials: a survey of damping capacity of fiber reinforced composites. *Damping Applications for Vibration Control: papers, presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers*. New York, ASME (Applied mechanics symposia series; AMD-38), 53–63 (1980).
2. Gibson R. F. Dynamic mechanical properties of advanced composite materials and structures: a review. *Shock and Vibration Digest* **19** (7), 13–22 (1987).
3. Зиновьев П. А., Ермаков Ю. Н. Характеристики рассеяния энергии при колебаниях в элементах конструкций из волокнистых композитов (обзор). Москва, ЦНИИ научно-технической информации (1989).
4. Benchekchou B., Coni M., Howarth H. V. C., White R. G. Some aspects of vibration damping improvement in composite materials. *Composites. Part B: Engineering* **29** (6), 809–817 (1998). [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(98\)00024-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(98)00024-9)
5. Chandra R., Singh S. P., Gupta K. Damping studies in fiber-reinforced composites — a review. *Composite Structures* **46** (1), 41–51 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00041-0](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00041-0)
6. Finegan I. C., Gibson R. F. Recent research on enhancement of damping in polymer composites. *Composite Structures* **44** (2–3), 89–98 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00073-7](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00073-7)
7. Treviso A., Van Genechten B., Mundo D., Tournour M. Damping in composite materials: Properties and models. *Composites: Part B* **78**, 144–152 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.03.081>
8. Ляв А. *Математическая теория упругости*. Москва; Ленинград, ОНТИ (1935).
9. Работнов Ю. Н. *Механика деформируемого твердого тела*. Москва, Наука (1979).
10. Бабич В. М., Киселев А. П. *Упругие волны. Высокочастотная теория*. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург (2014).
11. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. Москва, Мир (1987).
12. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. *Механика многослойных конструкций*. Москва, Машиностроение (1980).
13. Ланцош К. *Вариационные принципы механики*. Москва, Мир (1965).
14. Бленд Д. *Теория линейной вязкоупругости*. Москва, Мир (1965).
15. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. Москва, Мир (1974).
16. Hashin J. Complex Moduli of Viscoelastic composites: II. Fiber-reinforced materials. *International Journal of Solids and Structures* **6**, 797–807 (1970).
17. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* **12** (2), A69–A77 (1945).

18. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* **18**, 1031–1036 (1951).
19. Паршина Л. В., Рябов В. М., Ярцев Б. А. Рассеяние энергии при колебаниях неоднородных композитных структур. 1. Постановка задачи. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **5** (63), вып. 2, 300–309 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.210>
20. Рябов В. М., Ярцев Б. А., Паршина Л. В. Связанные колебания вязкоупругих трехслойных композитных пластин. 1. Постановка задачи. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **7** (65), вып. 3, 469–480 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.309>
21. Товстик П. Е. Двухмерная модель анизотропной пластины второго порядка точности. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **6** (64), вып. 1, 157–169 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.112157>
22. Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Two-dimensional linear models of multilayered anisotropic plates. *Acta Mechanica* **230**, 2891–2904 (2019).
23. Михлин С. Г. *Численная реализация вариационных методов*. Москва, Наука (1966).
24. Даугавет И. К. *Теория приближенных методов. Линейные уравнения*. Санкт-Петербург, БХВ-Петербург (2006).
25. Мысовских И. П. *Лекции по методам вычислений*. Москва, Физматгиз (1962).
26. Березин И. С., Жидков Н. П. *Методы вычислений*. Т. 2. Москва, Физматгиз (1962).
27. Смердов А. А. Рассеяние энергии при колебаниях композитных оболочек. *Инженерный журнал: наука и инновации* **19** (7), 1–13 (2013). <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2013-7-858>
28. Berthelot J. M. *Dynamics of composite materials and structures*. Institute of Advanced Materials and Mechanics. Vallouise (2010).
29. Lin D. X., Ni R. G., Adams R. D. Prediction and measurement of the vibrational damping parameters of carbon and glass fibre-reinforced plastics plates. *Journal of Composite Materials* **18** (3), 132–152 (1984).

Статья поступила в редакцию 11 августа 2023 г.;
доработана 3 ноября 2023 г.;
рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

Контактная информация:

Рябов Виктор Михайлович — д-р физ.-мат. наук, проф.; v.ryabov@spbu.ru
Ярцев Борис Александрович — д-р техн. наук; boris_yar@mail.ru

Methods for modeling the dissipative characteristics of layered composites

V. M. Ryabov¹, B. A. Yartsev²

¹ St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
² Krylov State Research Center, 44, Moskovskoe shosse, St. Petersburg, 196158, Russian Federation

For citation: Ryabov V. M., Yartsev B. A. Methods for modeling the dissipative characteristics of layered composites. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 570–583. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.313> (In Russian)

The main methods for modeling dissipative characteristics of layered composites are considered: the principle of elastic-viscoelastic correspondence and energy method. Mathematical models of damped oscillations are given for layered anisotropic plates. A numerical procedure for solving the problem of damped oscillations of a three-layer monoclinic plate containing a two-stage method for solving a complex eigenvalue problem. It is noted that the energy method for modeling energy dissipation at vibrations of layered composite structures is a special case of the method, based on the principle of elastic-viscoelastic correspondence. Shown, that in addition to the classical formulation of the

energy method, in which the terms energy balance equations are approximately found by their own forms and vibration frequencies of a conservative mechanical system, there is one more an approximate method for calculating the dissipative characteristics of orthotropic composite structures. The advantages of this method are the possibility of using existing commercial software systems (Ansys et al.), which numerically implement the finite element method, and shortcomings — the need to be limited to the use of classical theories of thin-walled structures (Bernoulli—Euler, Kirchhoff—Love) for descriptions of deformation of composite structures. It has been found that the use the classical formulation of the energy method allows with a high accurately predict the values of mechanical loss coefficients up to $\eta_{\max} = 0.02$. Further increase in damping levels construction is accompanied by a decrease in the accuracy of the forecast.

Keywords: composite, modeling, oscillations, natural frequency, dissipative characteristics, elastic-viscoelastic correspondence principle, energy method.

References

1. Bert C.W. Composite materials: a survey of damping capacity of fiber reinforced composites. *Damping Applications for Vibration Control: Papers, presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers*. New York, ASME (Applied mechanics symposia series; AMD-38), 53–63 (1980).
2. Gibson R. F. Dynamic mechanical properties of advanced composite materials and structures: a review. *Shock and Vibration Digest* **19** (7), 13–22 (1987).
3. Zinoviev P. A., Ermakov Yu. N. Vibrational energy dissipation characteristics in fiber composites structural elements (review). Moscow, Central Research Institute scientific and technical Information (1989). (In Russian)
4. Benchechou B., Coni M., Howarth H. V. C., White R. G. Some aspects of vibration damping improvement in composite materials. *Composites. Part B: Engineering* **29** (6), 809–817 (1998). [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(98\)00024-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(98)00024-9)
5. Chandra R., Singh S. P., Gupta K. Damping studies in fiber-reinforced composites — a review. *Composite Structures* **46** (1), 41–51 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(99\)00041-0](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(99)00041-0)
6. Finegan I. C., Gibson R. F. Recent research on enhancement of damping in polymer composites. *Composite Structures* **44** (2–3), 89–98 (1999). [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(98\)00073-7](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(98)00073-7)
7. Treviso A., Van Genechten B., Mundo D., Tournour M. Damping in composite materials: Properties and models. *Composites: Part B* **78**, 144–152 (2015). <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2015.03.081>
8. Love A. E. H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4th ed. Cambridge, Cambridge University Press (1927) [Rus. ed.: Love A. E. H. *Matematicheskaja teorija uprugosti*. Moscow; Leningrad, ONTI Publ. (1935)].
9. Rabotnov Yu. N. *Mechanics of a Deformable Solid Body*. Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian)
10. Babich V. M., Kiselev A. P. *Elastic waves. A high-frequency theory*. St Petersburg, BKhV-Petersburg Publ. (2014). (In Russian)
11. Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. 3rd ed. Oxford, Pergamon Press (1982) [Rus. ed.: Washizu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti*. Moscow, Mir Publ. (1987)].
12. Bolotin V. V., Novichkov Yu. N. *Mechanics of multilayer structures*. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1980). (In Russian)
13. Lanczos C. *The variational principles of mechanics*. 2nd ed. Toronto, University of Toronto Press (1962) [Rus. ed.: Lanczos C. *Variatsionnye printsipy mekhaniki*. Moscow, Mir Publ. (1965)].
14. Bland R. D. *The theory of linear viscoelasticity*. Oxford, Pergamon Press (1960) [Rus. ed.: Bland R. D. *Teoriia lineinoi viazkouprugosti*. Moscow, Mir Publ. (1965)].
15. Christensen R. M. *Theory of viscoelasticity: An introduction*. 2nd ed. New York, Academic Press (1982) [Rus. ed.: Christensen R. M. *Vvedenie v teoriiu viazkouprugosti*. Moscow, Mir Publ. (1974)].
16. Hashin Z. Complex Moduli of Viscoelastic composites: II. Fiber-reinforced materials. *International Journal of Solids and Structures* **6**, 797–807 (1970).
17. Reissner E. The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* **12** (2), A69-A77 (1945).

18. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* **18**, 1031–1036 (1951).
19. Parshina L. V., Ryabov V. M., Yartsev B. A. Energy dissipation during vibrations of nonuniform composite structures. 1. Formulation of the problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **5** (63), iss. 2, 300–309 (2018). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2018.210> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **51** (2), 175–181 (2018). <https://doi.org/10.3103/S1063454118020073>].
20. Ryabov V. M., Yartsev B. A., Parshina L. V. Coupled Vibrations of Viscoelastic Three-Layer Composite Plates. 1. Formulation of the Problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **7** (65), iss. 3, 469–480 (2020). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2020.309> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **53**, iss. 3, 320–328 (2020). <https://doi.org/10.1134/S1063454120030127>].
21. Tovstik P. E. Two-Dimensional Model of Second-Order Accuracy for an Anisotropic Plate. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **6** (64), iss. 1, 157–169 (2019). <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2019.112157> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **52**, iss. 1, 112–121 (2019). <https://doi.org/10.3103/S1063454119010126>].
22. Belyaev A. K., Morozov N. F., Tovstik P. E., Tovstik T. P. Two-dimensional linear models of multilayered anisotropic plates. *Acta Mechanica* **230**, 2891–2904 (2019).
23. Mikhlin S. G. *Numerical implementation of variational methods*. Moscow, Nauka Publ. (1966). (In Russian)
24. Daugavet I. K. *The Theory of Approximate Methods. Linear Equations*. St Petersburg, BKhV-Peterburg Publ. (2006). (In Russian)
25. Mysovskik I. P. *Lectures on Numerical Methods*. Netherlands, Wolters-Noordhoff Publishing Groningen (1969) [Rus. ed.: Mysovskik I. P. *Lektsii po metodam vychislenii*. Moscow, Fizmatgiz (1962)].
26. Berezin I. S., Zhidkov N. P. *Methods of computations*. Vol. 2. Moscow, Fizmatgiz Publ. (1962). (In Russian)
27. Smerdov A. A. Energy dissipation during vibrations of composite shells. *Engineering Journal: Science and Innovations* **19** (7), 1–13 (2013). <http://dx.doi.org/10.18698/2308-6033-2013-7-858> (In Russian)
28. Berthelot J. M. *Dynamics of composite materials and structures*. Institute of Advanced Materials and Mechanics. Vallouise (2010).
29. Lin D. X., Ni R. G., Adams R. D. Prediction and measurement of the vibrational damping parameters of carbon and glass fibre-reinforced plastics plates. *Journal of Composite Materials* **18** (3), 132–152 (1984).

Received: August 11, 2023
 Revised: November 3, 2023
 Accepted: February 22, 2024

Authors' information:

Victor M. Ryabov — v.ryabov@spbu.ru
 Boris A. Yartsev — boris_yar@mail.ru