

## Динамика двойного маятника с вязким трением в шарнирах. II. Диссипативные формы колебаний и оптимизация параметров демпфирования\*

А. С. Смирнов<sup>1,2</sup>, И. А. Кравчинский<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Российская Федерация, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29

<sup>2</sup> Институт проблем машиноведения Российской академии наук, Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

<sup>3</sup> ООО «Центр технологического консалтинга», Российская Федерация, 195277, Санкт-Петербург, Большой Сампсониевский пр., 28/2

**Для цитирования:** Смирнов А. С., Кравчинский И. А. Динамика двойного маятника с вязким трением в шарнирах. II. Диссипативные формы колебаний и оптимизация параметров демпфирования // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 584–599.

<https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.314>

Настоящая работа является продолжением статьи «Динамика двойного маятника с вязким трением в шарнирах. I. Математическая модель движения и построение диаграммы режимов», в которой была приведена линейная математическая модель движения двойного математического маятника с идентичными параметрами звеньев и концевых грузов при наличии вязкого трения в обоих шарнирных сочленениях, а также построена диаграмма диссипативных режимов его движения. Рассматривается вопрос о частном варианте пропорционального демпфирования, при котором формы колебаний диссипативной системы не искажаются силами трения, и приводятся основные формулы, описывающие динамику системы в этой ситуации. Для общего случая демпфирования путем рационального сочетания аналитических и численных методов исследования выявляются и определяются все ключевые величины, характеризующие движение системы по каждой из диссипативных форм колебаний. Помимо этого, рассматривается несколько задач об оптимальном демпфировании колебаний системы, причем наилучшие диссипативные параметры подбираются на основе критерия максимума степени устойчивости. Полученные результаты сопровождаются серией графических иллюстраций, позволяющих установить их зависимость от коэффициентов трения демпфирования и отметить их основные качественные и количественные особенности. Найденные решения могут оказаться полезными на практике при конструировании двухзвенных манипуляторов и исследовании их динамического поведения.

*Ключевые слова:* двойной маятник, вязкое трение, пропорциональное демпфирование, диссипативная форма колебаний, частота колебаний, фактор затухания, соотношение амплитуд, фазовый сдвиг, оптимизация, степень устойчивости.

**1. Введение.** Данная статья является непосредственным продолжением работы [1], в которой была приведена математическая модель движения двойного маятника с учетом вязкого трения в шарнирах, были получены приближенные ана-

---

\*Первую часть статьи см.: Смирнов А. С., Кравчинский И. А. Динамика двойного маятника с вязким трением в шарнирах. I. Математическая модель движения и построение диаграммы режимов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 2. С. 371–384. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.210>

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

литические выражения для корней характеристического уравнения в случае малого трения, построена диаграмма диссипативных режимов движения системы, а также установлены условия возникновения диссипативного внутреннего резонанса. В настоящей публикации будет обсуждено условие независимости форм колебаний диссипативного двойного маятника от демпфирования, будут приведены необходимые выражения для случая идентичных диссипативных коэффициентов шарнирного вязкого трения, будут построены и проанализированы диссипативные формы колебаний системы, а также будут решены задачи оптимизации параметров демпфирования из соображений наиболее эффективного затухания ее движений. Отметим, что во избежание путаницы ссылки на формулы и рисунки, представленные в работе [1], помечаются верхним индексом «1».

**2. Условие независимости форм колебаний от демпфирования.** Прежде чем обращаться к построению диссипативных форм колебаний двойного маятника с вязким трением в шарнирах в общем случае, остановимся на некоторых рассуждениях, которые существенно облегчат в дальнейшем проверку всех полученных результатов. Ясно, что в случае малого демпфирования формы колебаний, которые определяются соотношениями между амплитудами колебаний обобщенных координат при одночастотных движениях системы, практически не отличаются от соответствующих форм консервативной модели. Однако введение в многомерную механическую систему диссипативных сил, вообще говоря, искажает ее формы свободных колебаний, которые имели место при отсутствии трения [2]. При этом, если силы трения довольно велики, что зачастую и имеет место при специальном введении в систему элементов трения (демпферов колебаний), то они могут довольно заметно исказить исходные формы колебаний [3]. Тем не менее в некоторых частных случаях демпфирования, которые и имеют особое значение, оказывается, что введение в систему как малых, так и больших диссипативных сил никоим образом не изменяет форм ее консервативных колебаний. Это обстоятельство позволяет гасить колебания системы по ее собственным, т. е. естественным движениям, не искажая их общего характера, а лишь убавляя амплитуды каждой из форм [4].

В связи с этим представляет интерес выяснить, возможно ли сохранение форм колебаний двойного маятника при введении в систему диссипативных сил, и если да, то при каких коэффициентах вязкого трения  $b_1$  и  $b_2$  в диссипативной системе формы колебаний останутся такими же, как и в консервативной системе. Как известно [3], это будет иметь место лишь при так называемом пропорциональном демпфировании, когда матрицу диссипативных коэффициентов  $\mathbf{B}$  можно представить в виде линейной комбинации матрицы инерционных коэффициентов  $\mathbf{A}$  и матрицы квазиупругих коэффициентов  $\mathbf{C}$ , т. е. [5]:

$$\mathbf{B} = \gamma_A \mathbf{A} + \gamma_C \mathbf{C}, \quad (1)$$

где  $\gamma_A$  и  $\gamma_C$  — некоторые коэффициенты. Подставляя в соотношение (1) выражения для всех фигурирующих в нем матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$  согласно (2)<sup>1</sup> и (4)<sup>1</sup>, получим три скалярных соотношения:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 2ml^2\gamma_A + 2mgl\gamma_C, \\ -b_2 = ml^2\gamma_A, \\ b_2 = ml^2\gamma_A + mgl\gamma_C. \end{cases} \quad (2)$$

Последние два из них позволяют сразу выразить коэффициенты  $\gamma_A$  и  $\gamma_C$ :

$$\gamma_A = -\frac{b_2}{ml^2}, \quad \gamma_C = \frac{2b_2}{mgl}, \quad (3)$$

и после их подстановки в первое уравнение системы (2) мы приходим к простому соотношению  $b_1 = b_2$ , которое согласно (11)<sup>1</sup> эквивалентно условию  $\nu_1 = \nu_2$ . Именно это соотношение, определяющее идентичность диссипативных коэффициентов в обоих шарнирах двойного маятника, и является условием сохранения форм консервативных колебаний в диссипативной системе и, стало быть, их независимости от демпфирования. Поэтому во всех остальных вариантах, когда параметры  $\nu_1$  и  $\nu_2$  являются различными, формы колебаний уже будут так или иначе искажаться силами трения.

### 3. Исследование случая идентичных диссипативных коэффициентов.

Как уже упоминалось в работе [1], случай одинаковых диссипативных коэффициентов двойного маятника был ранее рассмотрен в статье [6]. Поэтому в настоящей работе будет дана сводка некоторых формул из указанной статьи с их развитием и сопутствующими комментариями, а также рядом дополнительных новых выражений, существенно необходимых для последующего построения диссипативных форм колебаний в общем случае.

Полагая далее для краткости  $\nu = \nu_1 = \nu_2$  и принимая во внимание соотношение (1) между матрицами **A**, **B** и **C**, будем иметь согласно (7)<sup>1</sup> в этом случае следующее характеристическое уравнение:

$$\det\{[\mathbf{A}(\lambda^2 + \gamma_A\lambda) + \mathbf{C}(\gamma_C\lambda + 1)]\} = 0. \quad (4)$$

Из сопоставления данного уравнения с частотным уравнением консервативной задачи  $\det\{(\mathbf{C} - k_{s_0}^2\mathbf{A})\} = 0$ , которому удовлетворяют значения (12)<sup>1</sup>, немедленно вытекает, что корни характеристического уравнения  $\lambda$  диссипативной задачи определяются из следующих двух уравнений:

$$\lambda^2 + \gamma_A\lambda + k_{10}^2(\gamma_C\lambda + 1) = 0, \quad \lambda^2 + \gamma_A\lambda + k_{20}^2(\gamma_C\lambda + 1) = 0. \quad (5)$$

Отметим, что сохранение форм колебаний консервативной системы в диссипативном случае здесь возникает потому, что матричные алгебраические уравнения для диссипативной задачи  $[\mathbf{A}(\lambda^2 + \gamma_A\lambda) + \mathbf{C}(\gamma_C\lambda + 1)]\Phi = 0$  и для консервативной задачи  $(\mathbf{C} - k_{s_0}^2\mathbf{A})\Phi = 0$  ввиду (5) фактически оказываются идентичными. Поэтому выпишем сразу формы колебаний  $\Phi_{(1)}$  и  $\Phi_{(2)}$  в известном виде [6]:

$$\Phi_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Phi_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Переходя теперь в (5) к безразмерному корню характеристического уравнения по второй формуле (11)<sup>1</sup> и используя соотношения (3), приведем уравнения (5) к виду

$$p^2 + 2(3 - 2\sqrt{2})\nu p + 2 - \sqrt{2} = 0, \quad p^2 + 2(3 + 2\sqrt{2})\nu p + 2 + \sqrt{2} = 0. \quad (7)$$

Таким образом, уравнение четвертой степени (10)<sup>1</sup> при  $\nu = \nu_1 = \nu_2$  распадается на два квадратных уравнения (7), в чем можно убедиться и непосредственно. Их решения, очевидно, представляются в форме

$$p_{1,2} = -n_1 \pm i\omega_1, \quad p_{3,4} = -n_2 \pm i\omega_2, \quad (8)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} n_1 &= (3 - 2\sqrt{2})\nu \approx 0.172\nu, & n_2 &= (3 + 2\sqrt{2})\nu \approx 5.828\nu, \\ \omega_1 &= \sqrt{2 - \sqrt{2} - (17 - 12\sqrt{2})\nu^2}, & \omega_2 &= \sqrt{2 + \sqrt{2} - (17 + 12\sqrt{2})\nu^2}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подчеркнем, что из приближенных формул (17)<sup>1</sup>, полученных ранее для в общем случае различных, но малых значений  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , при  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$  мы также приходим к первым двум выражениям (9), которые теперь, однако, являются точными и справедливы не только для малых значений  $\nu$ . Также обратим внимание на то, что величины  $\omega_1$  и  $\omega_2$  согласно последним двум выражениям (9) могут быть как вещественными, так и мнимыми. В случае, когда эти величины являются вещественными, они представляют собой безразмерные частоты свободных колебаний двойного маятника с учетом вязкого трения. Видно, что величины  $\omega_1$  и  $\omega_2$  вещественны, если соответственно выполняются условия:

$$\begin{aligned} \omega_1 \in R &\Rightarrow \nu < \nu_{10} = \sqrt{10 + 7\sqrt{2}} \approx 4.461, \\ \omega_2 \in R &\Rightarrow \nu < \nu_{20} = \sqrt{10 - 7\sqrt{2}} \approx 0.317. \end{aligned} \quad (10)$$

При этом обратим внимание на то, что  $\nu_{20} < \nu_{10}$ . Таким образом, при  $\nu = \nu_{20}$  получаем  $\omega_2 = 0$ , и мы имеем два кратных корня  $p_{3,4} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}$ , тогда как при  $\nu = \nu_{10}$  получаем уже  $\omega_1 = 0$ , и теперь мы имеем два кратных корня  $p_{1,2} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}$ . Эти результаты отвечают точкам, лежащим на пересечении дискриминантных кривых и биссектрисы  $\nu_1 = \nu_2$  первого квадранта на диаграмме диссипативных режимов движения, приведенной на рис. 3<sup>1</sup>. Из сказанного вытекает, что при  $\nu < \nu_{20}$  вещественны обе частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и потому существуют обе формы колебаний; в диапазоне  $\nu_{20} < \nu < \nu_{10}$  вещественна только частота  $\omega_1$  и существует только первая форма колебаний; а если  $\nu > \nu_{10}$ , то форм колебаний уже не существует. Конечно, на диаграмме режимов с рис. 3<sup>1</sup> этим трем ситуациям отвечает попадание биссектрисы  $\nu_1 = \nu_2$  в области I, II и III соответственно, что также подтверждает полное согласие выведенных формул с ранее полученными результатами. Из первых двух формул (9) следует, что при существовании обеих частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$  величины  $n_1$  и  $n_2$ , представляющие факторы затухания каждой из форм колебаний, всегда удовлетворяют неравенству  $n_2 > n_1$ , так что и здесь формы колебаний будут гаситься отнюдь не одинаково, и вторая форма затухает гораздо быстрее, чем первая. При этом соотношение между  $n_2$  и  $n_1$  не зависит от  $\nu$ , а потому оказывается таким же, как и для случая малого трения, где оно определяется по формуле (18)<sup>1</sup> при  $\eta = \nu_2/\nu_1 = 1$ . Необходимо отметить также, что, хотя при достаточно большом трении одна или сразу обе формы колебаний не будут существовать ввиду аperiodического характера затухания одной или двух составляющих полного решения, столбцы (6) все равно будут их характеризовать, однако эти столбцы ввиду отсутствия колебательного характера следует называть уже формами движения.

Возвращаясь к поведению частот колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и учитывая, что при увеличении параметра  $\nu$  сначала обратится в нуль вторая частота, а в консервативной задаче частоты (12)<sup>1</sup> были упорядочены по возрастанию, заключаем, что с увеличением  $\nu$ , начиная с некоторого его значения, вторая частота становится меньше первой. Это значение и отвечает диссипативному внутреннему резонансу, условия

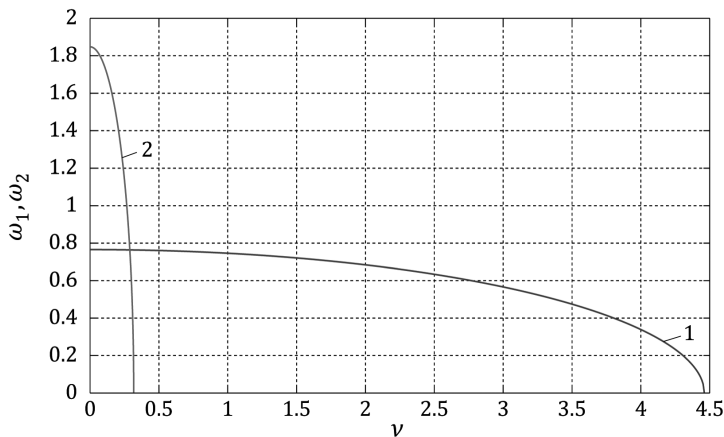


Рис. 1. Графики зависимости частот колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  от параметра  $\nu$ .

которого в общем случае уже были найдены ранее в работе [1]. Приравнивая  $\omega_1$  и  $\omega_2$  согласно (9), находим искомое значение  $\nu_*$ , а также общую частоту колебаний  $\omega_*$ :

$$\nu_* = \frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.289, \quad \omega_* = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \approx 0.764. \quad (11)$$

Можно проверить, что из уравнений (34)<sup>1</sup> и (36)<sup>1</sup> при  $\nu = \nu_1 = \nu_2$  вытекают те же самые результаты. Кроме того, они находятся в полном соответствии и с рис. 4<sup>1</sup>, где точка пересечения кривой, отвечающей внутреннему резонансу, с биссектрисой первого квадранта отвечает значению  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_*$ . Таким образом, тот факт, что частота  $\omega_2$  может быть меньше частоты  $\omega_1$ , подчеркивает, что здесь термины «первая частота» (т. е. низшая) и «вторая частота» (т. е. высшая) не указывают на упорядоченность частот колебаний по возрастанию, а находятся в соответствии с терминами «первая форма» и «вторая форма», которые уже не вызывают затруднений. В самом деле, как в консервативной, так и в диссипативной системе согласно (6) при движении на частоте  $\omega_1$  оба звена отклоняются в одну сторону от вертикали, тогда как при движении на частоте  $\omega_2$  — в разные стороны.

Для наглядности построим на рис. 1 графики зависимости безразмерных частот колебаний  $\omega_1$  (кривая 1) и  $\omega_2$  (кривая 2) от параметра  $\nu$  в диапазонах (10), где отчетливо наблюдается случай совпадения частот  $\omega_1 = \omega_2$ , отвечающий условиям (11).

Здесь также представляет интерес обсудить случай малых значений параметра  $\nu$  и оценить поправки, вносимые диссипацией в величины частот. Раскладывая выражения для  $\omega_1$  и  $\omega_2$  согласно (9) в ряды и удерживая лишь квадратичные слагаемые по  $\nu$ , находим:

$$\omega_1 \approx \omega_{10} (1 - \rho_1 \nu^2), \quad \omega_2 \approx \omega_{20} (1 - \rho_2 \nu^2), \quad (12)$$

где, напомним,  $\omega_{10} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$  и  $\omega_{20} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$  — безразмерные частоты колебаний двойного маятника в рамках консервативной модели, а также приняты обозначения:

$$\rho_1 = \frac{10 - 7\sqrt{2}}{4}, \quad \rho_2 = \frac{10 + 7\sqrt{2}}{4}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что коэффициенты  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , стоящие в скобках в формулах (12) при  $\nu^2$ , характеризуют поправки за счет диссипативных сил к каждой из частот колебаний по сравнению с их исходными консервативными значениями  $\omega_{10}$  и  $\omega_{20}$ . Поскольку  $\rho_1 < \rho_2$ , величина второй частоты сильнее зависит от диссипативных факторов, что видно и из графиков, представленных на рис. 1. Более детальный анализ показывает, что  $\rho_2/\rho_1 = 99 + 70\sqrt{2} \approx 197.99$ , так что поправка ко второй частоте оказывается намного существеннее, чем аналогичная поправка к первой частоте, и этот факт также следует принимать во внимание.

Остается записать общее решение матричного уравнения движения (5)<sup>1</sup> при  $\nu = \nu_1 = \nu_2$ . Рассматривая случай  $\nu < \nu_{20}$ , когда обе частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  существуют, и учитывая, что каждой паре корней (8) отвечают формы колебаний (6) соответственно, представим решение в комплексном виде:

$$\varphi = \Phi_{(1)} e^{-n_1 \tau} (C_1 e^{i\omega_1 \tau} + D_1 e^{-i\omega_1 \tau}) + \Phi_{(2)} e^{-n_2 \tau} (C_2 e^{i\omega_2 \tau} + D_2 e^{-i\omega_2 \tau}), \quad (14)$$

где  $\tau = kt$  — безразмерное время, а комплексные константы интегрирования  $C_1$ ,  $D_1$ ,  $C_2$  и  $D_2$  определяются из начальных условий движения (при  $t = 0$  задаются  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0$ ). При этом из вещественности  $\varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T$  вытекает, что имеют место соотношения  $D_1 = \overline{C_1}$ , а  $D_2 = \overline{C_2}$ . Представим далее комплексные числа в показательной форме:

$$\begin{aligned} C_1 &= |C_1| e^{i \arg C_1}, & D_1 &= \overline{C_1} = |C_1| e^{-i \arg C_1}, \\ C_2 &= |C_2| e^{i \arg C_2}, & D_2 &= \overline{C_2} = |C_2| e^{-i \arg C_2}, \end{aligned} \quad (15)$$

причем здесь учтено, что у комплексно-сопряженных чисел модули одинаковы, а аргументы противоположны. Это позволяет записать решение (14) в вещественной скалярной форме:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \cdot 1 \cdot e^{-n_1 \tau} \cos(\omega_1 \tau + \alpha_1) + A_2 \cdot 1 \cdot e^{-n_2 \tau} \cos(\omega_2 \tau + \alpha_2), \\ \varphi_2 &= A_1 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-n_1 \tau} \cos(\omega_1 \tau + \alpha_1) + A_2 \cdot (-\sqrt{2}) \cdot e^{-n_2 \tau} \cos(\omega_2 \tau + \alpha_2), \end{aligned} \quad (16)$$

где приняты следующие обозначения:

$$A_1 = 2|C_1|, \quad A_2 = 2|C_2|, \quad \alpha_1 = \arg C_1, \quad \alpha_2 = \arg C_2. \quad (17)$$

Ясно, что  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  представляют собой новые, уже вещественные константы интегрирования. Отметим, что если рассматриваются значения  $\nu_{20} < \nu < \nu_{10}$ , при которых существует только первая форма колебаний, то в формулах (16) следует модифицировать вторые слагаемые с тем, чтобы они уже представляли аperiодическое затухание, а если же исследуется случай  $\nu > \nu_{10}$ , то в этих формулах все составляющие должны характеризовать аperiодическое затухание. Тем не менее в настоящем изложении нас будут интересовать лишь колебательные движения в диссипативной системе.

Таким образом, при пропорциональном демпфировании соотношения между амплитудами колебаний для каждой из форм колебаний остаются такими же, как и в консервативной системе, однако сами колебания при этом становятся затухающими и обладают уже иными частотами по сравнению с консервативным вариантом.

**4. Построение и анализ диссипативных форм колебаний.** Перейдем теперь к определению диссипативных форм колебаний в общем случае. Для этого вернемся к характеристическому уравнению (10)<sup>1</sup> и определим при помощи численных методов его корни по заданным значениям параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Будем рассматривать далее тот случай, когда мы имеем две пары комплексно-сопряженных корней, т. е. когда  $\nu_1$  и  $\nu_2$  отвечают области I на диаграмме диссипативных режимов движения с рис. 3<sup>1</sup>, так что положим:

$$p_{1,2} = -n_1 \pm i\omega_1 = p_{1,2}(\nu_1, \nu_2), \quad p_{3,4} = -n_2 \pm i\omega_2 = p_{3,4}(\nu_1, \nu_2), \quad (18)$$

где, как и прежде,  $n_1$  и  $n_2$  представляют собой факторы затухания, а  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — частоты колебаний. Отметим сразу, что нумерация диссипативных форм колебаний и всех соответствующих им величин здесь и далее осуществляется таким образом, чтобы они являлись развитием консервативных форм колебаний, а также отвечали ранее полученным результатам для пропорционального демпфирования, представляя тем самым их естественное обобщение. Далее необходимо вернуться к матричному алгебраическому уравнению (6)<sup>1</sup> и рассмотреть одно из двух отвечающих ему скалярных уравнений (в силу их линейной зависимости исходя из условия существования нетривиального решения), например, второе как наиболее простое:

$$(ml^2\lambda^2 - b_2\lambda)\Phi_1 + (ml^2\lambda^2 + b_2\lambda + mgl)\Phi_2 = 0, \quad (19)$$

где использованы представления для матриц **A**, **B** и **C** согласно (2)<sup>1</sup> и (4)<sup>1</sup>, а также учтено, что  $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2]^T$ . Образует далее отношение величин  $\Phi_2$  и  $\Phi_1$  и вычислим его согласно (19):

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = -\frac{ml^2\lambda^2 - b_2\lambda}{ml^2\lambda^2 + b_2\lambda + mgl} = -\frac{p^2 - 2\nu_2p}{p^2 + 2\nu_2p + 1}, \quad (20)$$

где приняты во внимание обозначения (11)<sup>1</sup>. Ясно, что в общем случае отношение (20) является комплексной величиной. Подставим в это выражение поочередно все корни (18) и определим величины  $\Phi_{2s}$ ,  $s = \overline{1, 4}$ , полагая для простоты  $\Phi_{1s} = 1$ , поскольку эти величины определяются с точностью до масштабного множителя. Так, подставляя  $p_1 = -n_1 + i\omega_1$ , получим  $\Phi_{21} = a_1$ , а подставляя  $p_2 = -n_1 - i\omega_1$ , получим  $\Phi_{22} = b_1$ , причем, очевидно,  $b_1 = \overline{a_1}$ . Аналогично подставляя  $p_3 = -n_2 + i\omega_2$ , получим  $\Phi_{23} = a_2$ , а подставляя  $p_4 = -n_2 - i\omega_2$ , получим  $\Phi_{24} = b_2$ , причем  $b_2 = \overline{a_2}$ . Выпишем далее выражения для  $a_1$  и  $a_2$ :

$$a_1 = -\frac{p_1^2 - 2\nu_2p_1}{p_1^2 + 2\nu_2p_1 + 1} = a_1(\nu_1, \nu_2), \quad a_2 = -\frac{p_3^2 - 2\nu_2p_3}{p_3^2 + 2\nu_2p_3 + 1} = a_2(\nu_1, \nu_2), \quad (21)$$

где учтено, что  $p_1 = -n_1 + i\omega_1 = p_1(\nu_1, \nu_2)$  и  $p_3 = -n_2 + i\omega_2 = p_3(\nu_1, \nu_2)$  согласно (18). Таким образом, общее решение задачи о диссипативных колебаниях системы может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= e^{-n_1\tau} (1 \cdot C_1 e^{i\omega_1\tau} + 1 \cdot D_1 e^{-i\omega_1\tau}) + e^{-n_2\tau} (1 \cdot C_2 e^{i\omega_2\tau} + 1 \cdot D_2 e^{-i\omega_2\tau}), \\ \varphi_2 &= e^{-n_1\tau} (a_1 \cdot C_1 e^{i\omega_1\tau} + b_1 \cdot D_1 e^{-i\omega_1\tau}) + e^{-n_2\tau} (a_2 \cdot C_2 e^{i\omega_2\tau} + b_2 \cdot D_2 e^{-i\omega_2\tau}), \end{aligned} \quad (22)$$

где вновь  $\tau = kt$  — безразмерное время, а  $C_1, D_1, C_2, D_2$  — комплексные константы интегрирования. При этом из вещественности  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  с учетом соотношений  $b_1 = \overline{a_1}$

и  $b_2 = \overline{a_2}$  вытекает, что  $D_1 = \overline{C_1}$ , а  $D_2 = \overline{C_2}$ . Записывая комплексные числа в показательной форме:

$$\begin{aligned} C_1 &= |C_1|e^{i \arg C_1}, & D_1 &= \overline{C_1} = |C_1|e^{-i \arg C_1}, \\ C_2 &= |C_2|e^{i \arg C_2}, & D_2 &= \overline{C_2} = |C_2|e^{-i \arg C_2}, \\ a_1 &= |a_1|e^{i \arg a_1}, & b_1 &= \overline{a_1} = |a_1|e^{-i \arg a_1}, \\ a_2 &= |a_2|e^{i \arg a_2}, & b_2 &= \overline{a_2} = |a_2|e^{-i \arg a_2}, \end{aligned} \quad (23)$$

перепишем решение (22) в вещественном виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \cdot 1 \cdot e^{-n_1 \tau} \cos(\omega_1 \tau + \alpha_1) + A_2 \cdot 1 \cdot e^{-n_2 \tau} \cos(\omega_2 \tau + \alpha_2), \\ \varphi_2 &= A_1 \cdot \delta_1 \cdot e^{-n_1 \tau} \cos(\omega_1 \tau + \alpha_1 + \theta_1) + A_2 \cdot \delta_2 \cdot e^{-n_2 \tau} \cos(\omega_2 \tau + \alpha_2 + \theta_2), \end{aligned} \quad (24)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 &= 2|C_1|, & A_2 &= 2|C_2|, & \alpha_1 &= \arg C_1, & \alpha_2 &= \arg C_2, \\ \delta_1 &= |a_1|, & \delta_2 &= -|a_2|, & \theta_1 &= \arg a_1, & \theta_2 &= \arg a_2 - \pi. \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  являются уже вещественными константами интегрирования. Таким образом, из соотношений (24) можно сделать вывод, что для описания движений по диссипативным формам колебаний необходимо указать, во-первых, частоты колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , во-вторых, факторы затухания  $n_1$  и  $n_2$ , в-третьих, соотношения  $\delta_1$  и  $\delta_2$  между экспоненциальными огибающими каждой из составляющих функций  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$  и, в-четвертых, фазовые сдвиги  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Из сказанного следует, что колебания по каждой из диссипативных форм будут синхронными, но не синфазными, как это было в (16) в случае пропорционального демпфирования. Поэтому теперь амплитудные значения функций  $\varphi_1(\tau)$  и  $\varphi_2(\tau)$  при колебаниях по каждой из форм в отдельности будут достигаться в разные моменты времени, что является важной особенностью диссипативных форм колебаний, и именно поэтому величины  $\delta_1$  и  $\delta_2$  не очень корректно называть соотношениями амплитуд, как это принято делать в консервативных задачах.

Следует пояснить и то, почему в (25) введены обозначения  $\delta_2 = -|a_2|$  и  $\theta_2 = \arg a_2 - \pi$ . В самом деле, при дальнейшем построении графиков зависимости всех величин, отвечающих каждой диссипативной форме колебаний, от диссипативных параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , мы будем отталкиваться от уже известного их поведения в частном случае пропорционального демпфирования  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ , для которого выше было построено аналитическое решение (16). Из сопоставления (24) с (16) вытекает, что в этом случае величины  $\delta_1$  и  $\delta_2$  не зависят от  $\nu$ , причем  $\delta_1 = \sqrt{2}$ ,  $\delta_2 = -\sqrt{2}$ . Конечно, в этом легко убедиться лишний раз непосредственно, если подставить значения корней характеристического уравнения (8) с учетом (9) в формулы (21), откуда будем иметь  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_2 = -\sqrt{2}$ , т.е. эти отношения оказываются вещественными, как это и ожидалось, причем  $a_1 > 0$ , т.е.  $\arg a_1 = 0$ , а  $a_2 < 0$ , т.е.  $\arg a_2 = \pi$ . Чтобы корректно обеспечить знак соотношения амплитуд при колебаниях по второй форме в рассматриваемом частном случае, необходимо положить именно  $\delta_2 = -|a_2|$ . Кроме того, в этом случае фазовые сдвиги отсутствуют, т.е.  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$ . Соотношение



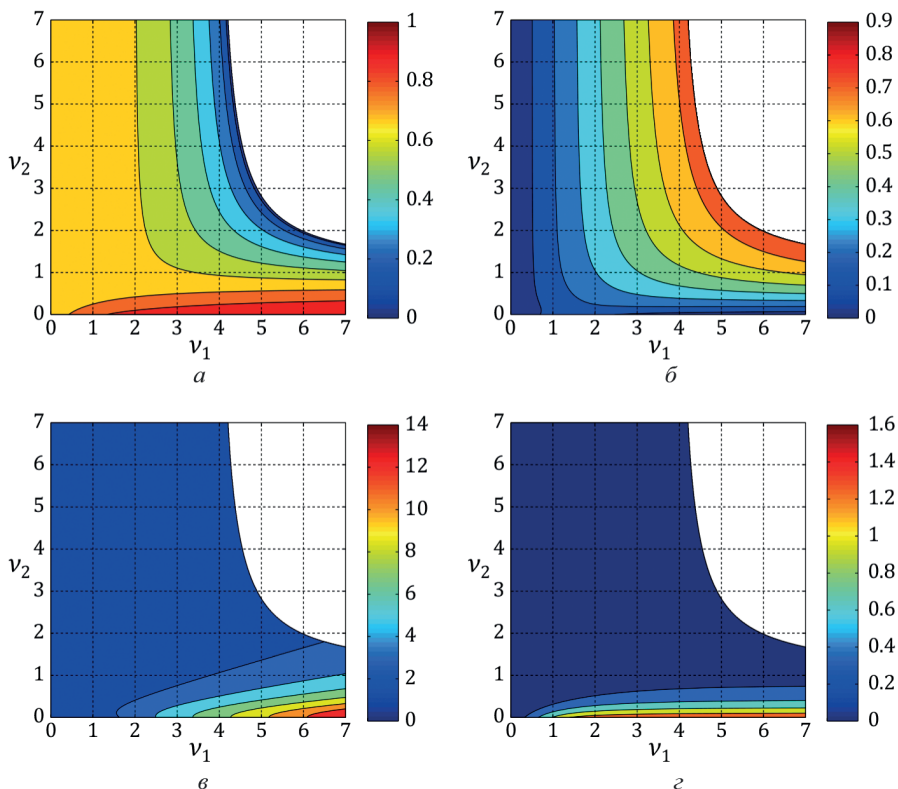


Рис. 2. Графики зависимости величин, описывающих движение по первой диссипативной форме колебаний, от параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$ : а —  $\omega_1 = \omega_1(\nu_1, \nu_2)$ ; б —  $n_1 = n_1(\nu_1, \nu_2)$ ; в —  $\delta_1 = \delta_1(\nu_1, \nu_2)$ ; г —  $\theta_1 = \theta_1(\nu_1, \nu_2)$ .

$\theta_2 = \arg a_2 - \pi$  как раз обеспечивает выполнение второго из выписанных условий, гарантируя при этом корректность общего решения (24).

Отметим, что построенное решение (24) отвечает области I на диаграмме диссипативных режимов движения, где существуют обе диссипативные формы колебаний. Ясно, что в области II существует только первая форма колебаний, как это уже было указано для частного случая пропорционального демпфирования, а в области III формы колебаний уже не существуют. Естественно, в этих случаях одна или обе составляющие общего решения (24) нуждаются в корректировке, однако в силу исследования лишь диссипативных форм колебаний вновь следует подчеркнуть, что мы ограничиваемся здесь изучением только колебательных движений по этим формам.

Перейдем теперь к построению графиков зависимости всех указанных ранее ключевых величин, характеризующих движение системы по первой и второй диссипативным формам колебаний, от безразмерных параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$  на плоскости этих параметров в виде линий уровня, что позволит дать полное количественное описание этих форм и завершить их исследование. Принимая во внимание сказанное выше, будем строить графики для первой формы колебаний в областях I и II, тогда как для второй формы колебаний — только в области I. Сначала приведем все необходимые графики для первой диссипативной формы колебаний: частоты колебаний

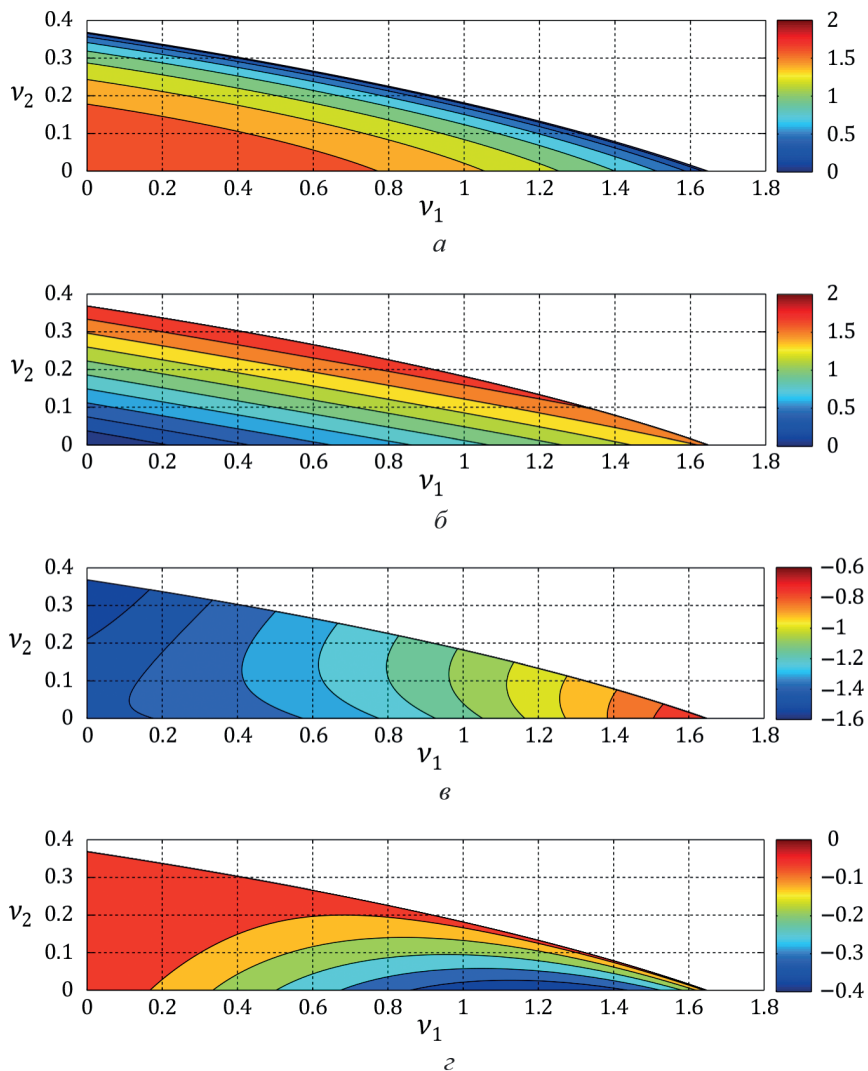


Рис. 3. Графики зависимости величин, описывающих движение по второй диссипативной форме колебаний, от параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$ : а —  $\omega_2 = \omega_2(\nu_1, \nu_2)$ ; б —  $n_2 = n_2(\nu_1, \nu_2)$ ; в —  $\delta_2 = \delta_2(\nu_1, \nu_2)$ ; г —  $\theta_2 = \theta_2(\nu_1, \nu_2)$ .

$\omega_1 = \omega_1(\nu_1, \nu_2)$  (рис. 2, а), фактора затухания  $n_1 = n_1(\nu_1, \nu_2)$  (рис. 2, б), соотношения между экспоненциальными огибающими  $\delta_1 = \delta_1(\nu_1, \nu_2)$  (рис. 2, в) и фазового сдвига  $\theta_1 = \theta_1(\nu_1, \nu_2)$  (рис. 2, г). Далее построим аналогичные графики и для второй диссипативной формы колебаний: частоты колебаний  $\omega_2 = \omega_2(\nu_1, \nu_2)$  (рис. 3, а), фактора затухания  $n_2 = n_2(\nu_1, \nu_2)$  (рис. 3, б), соотношения между экспоненциальными огибающими  $\delta_2 = \delta_2(\nu_1, \nu_2)$  (рис. 3, в) и фазового сдвига  $\theta_2 = \theta_2(\nu_1, \nu_2)$  (рис. 3, г).

Для проверки корректности всех графиков, построенных на рис. 2 и 3, необходимо использовать общие положения, отмеченные в работе [1], а также аналитические выражения, полученные в настоящей работе для случая идентичных диссипативных коэффициентов  $\nu_1 = \nu_2$ . Особенно много проверок можно осуществить в отношении

частот колебаний. В самом деле, сначала следует принять во внимание, что на границе областей I и II должно быть  $\omega_2 = 0$ , а на границе областей II и III —  $\omega_1 = 0$ . Кроме того, на кривой, отвечающей диссипативному внутреннему резонансу в области I, имеем  $\omega_1 = \omega_2$ , причем  $\omega_1 < \omega_2$  в подобласти I, а, тогда как  $\omega_1 > \omega_2$  в подобласти I, b (рис. 4<sup>1</sup>). Также для случая  $\nu = \nu_1 = \nu_2$  частоты колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  как функции  $\nu$  определяются соответствующими формулами (9). Наконец, дополнительной проверкой может служить и то обстоятельство, что в случае достаточно малых значений  $\nu_1$  и  $\nu_2$  частоты колебаний почти не отличаются от их консервативных значений  $\omega_{10} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$  и  $\omega_{20} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ , поскольку поправочные слагаемые с  $\nu_1$  и  $\nu_2$  будут иметь второй порядок малости, как это упоминалось в работе [1]. Для проверки факторов затухания вспомним, что для случая  $\nu = \nu_1 = \nu_2$  они задаются соответствующими формулами (9), определяющими их линейный характер по  $\nu$ . В качестве дополнительной проверки можно использовать и то, что ранее были получены приближенные линейные зависимости (17)<sup>1</sup> для факторов затухания при малых значениях  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Что касается проверки соотношений между экспоненциальными огибающими, то для ее осуществления примем во внимание, что вариант  $\nu = \nu_1 = \nu_2$  отвечает пропорциональному демпфированию, для которого  $\delta_1 = \sqrt{2}$  и  $\delta_2 = -\sqrt{2}$ , и эти величины не зависят от параметра  $\nu$ . Наконец, проверка фазовых сдвигов также выполняется для случая пропорционального демпфирования  $\nu = \nu_1 = \nu_2$ , для которого эти фазовые сдвиги отсутствуют, т. е. имеем в этом случае  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 0$ .

Анализируя все зависимости, приведенные на рис. 2 и 3, можно убедиться в том, что они проходят все указанные выше проверки, и это позволяет сделать вывод об их справедливости как в качественном, так и в количественном отношении, и завершить на этом разговор о диссипативных формах колебаний двойного маятника с вязким трением в шарнирах.

**5. Оптимизация параметров вязкого демпфирования.** В завершение разговора о динамическом поведении диссипативного двойного маятника обратимся к постановке и обсуждению серии оптимизационных задач о выборе наилучших коэффициентов его демпфирования, обеспечивающих наиболее эффективное подавление его колебаний. С этой целью рассмотрим наиболее простой с точки зрения вычислений и часто встречающийся критерий оптимизации, основанный на максимизации степени устойчивости системы  $\Delta$ , под которой понимается модуль вещественной части корня характеристического уравнения (10)<sup>1</sup>, лежащего наиболее близко к мнимой оси плоскости корней (конечно, все корни при этом лежат левее мнимой оси) [7, 8]. Данный критерий был успешно применен ранее в целом ряде задач оптимизации [9–13], где он продемонстрировал свое важное прикладное значение. Сказанное означает, что величину  $\Delta$  можно представить в виде

$$\Delta = \min_i |\operatorname{Re} p_i|, \quad i = \overline{1, 4}. \quad (26)$$

Все четыре корня уравнения (10)<sup>1</sup> при различных значениях диссипативных параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , как и прежде, следует находить при помощи численных методов, но не ограничиваясь теперь рассмотрением только комплексно-сопряженных корней, как это делалось ранее при исследовании диссипативных форм колебаний, где нас интересовали лишь колебательные движения. В самом деле, оптимальные значения коэффициентов демпфирования могут оказаться расположенными как в области I, так и в областях II и III на диаграмме диссипативных режимов с рис. 3<sup>1</sup>. После

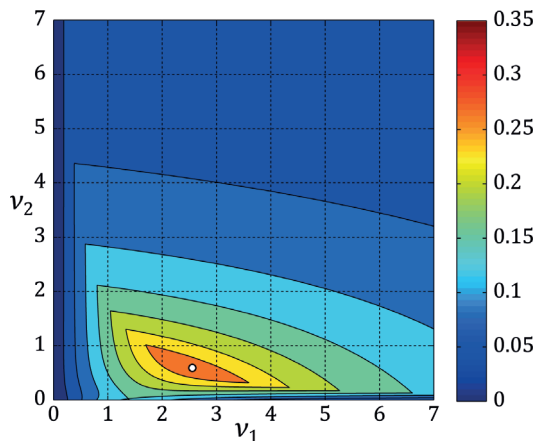


Рис. 4. График зависимости степени устойчивости  $\Delta$  от параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$ .

нахождения всех четырех корней в зависимости от  $\nu_1$  и  $\nu_2$  к ним следует применить процедуру отыскания степени устойчивости по формуле (26), что приведет к установлению зависимости  $\Delta$  от двух переменных  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , т.е. позволит получить функцию  $\Delta = \Delta(\nu_1, \nu_2)$ , которую затем следует максимизировать по обоим указанным переменным. Для определения точки максимума этой функции можно построить ее график на плоскости  $\nu_1\nu_2$  в виде линий равного уровня (рис. 4). По этому графику легко определить точку максимума данной функции:  $\nu_{1*} = 2.552$ ,  $\nu_{2*} = 0.591$  (для наглядности она отмечена кружком), при этом значение функции в этой точке, отвечающее наибольшей степени устойчивости,  $\Delta_* = 0.303$ . Эту точку мы далее будем называть глобально оптимальным решением. Отметим, что в данном случае три корня уравнения (10)<sup>1</sup> будут располагаться на плоскости корней на одной вертикали, а четвертый корень — левее них.

Выясним теперь, как изменится оптимальное решение в том случае, когда мы будем иметь возможность распоряжаться лишь одним диссипативным коэффициентом, считая другой из них заданным. Для этого проведем еще два численных эксперимента. В первом из них будем задавать значения  $\nu_1$  и определять для них наилучшие по принятому критерию (26) значения  $\nu_{2**}$ , а во втором — задавать значения  $\nu_2$  и определять для них наилучшие по тому же критерию значения  $\nu_{1**}$ . Соответствующие зависимости  $\nu_2 = \nu_{2**}(\nu_1)$  и  $\nu_1 = \nu_{1**}(\nu_2)$  приведены на рис. 5, а (красным и синим цветом соответственно), при этом видно, что отдельные участки этих кривых совпадают. Кроме того, определим в процессе указанных двух экспериментов и наилучшие значения степени устойчивости  $\Delta$ , в результате чего получим в первом случае зависимость  $\Delta = \Delta(\nu_1)$  при  $\nu_2 = \nu_{2**}(\nu_1)$ , а во втором — зависимость  $\Delta = \Delta(\nu_2)$  при  $\nu_1 = \nu_{1**}(\nu_2)$  (также построены красным и синим цветом соответственно). Обе эти зависимости приведены на рис. 5, б, где по горизонтальной оси откладываются величины  $\nu_1$  и  $\nu_2$  соответственно.

Остается указать координаты характерных точек на рис. 5, а и б, которые для наиболее наглядного их соответствия удобно представить в виде цветных кружков. Так, зеленый кружок на рис. 5, а, определяющий максимум на кривой  $\nu_2 = \nu_{2**}(\nu_1)$ , отвечает значениям  $\nu_1 = 0.288$ ,  $\nu_2 = 5.755$ , при этом  $\Delta = 0.058$ , и на рис. 5, б он, разумеется, превращается в два кружка с одинаковой степенью устойчивости. Голу-

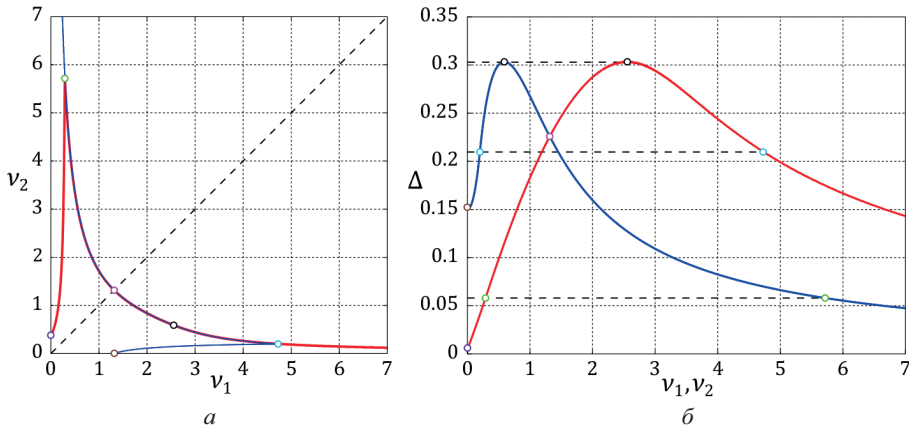


Рис. 5. Графики зависимости: а –  $\nu_2 = \nu_{2**}(\nu_1)$  и  $\nu_1 = \nu_{1**}(\nu_2)$ ; б –  $\Delta = \Delta(\nu_1)$  при  $\nu_2 = \nu_{2**}(\nu_1)$  и  $\Delta = \Delta(\nu_2)$  при  $\nu_1 = \nu_{1**}(\nu_2)$ .

бой кружок на рис. 5, а, определяющий максимум на кривой  $\nu_1 = \nu_{1**}(\nu_2)$ , отвечает значениям  $\nu_1 = 4.723$ ,  $\nu_2 = 0.200$ , при этом  $\Delta = 0.210$ , чему на рис. 5, б вновь соответствуют уже два кружка. Розовый кружок на рис. 5, а лежит на пересечении кривых  $\nu_2 = \nu_{2**}(\nu_1)$  и  $\nu_1 = \nu_{1**}(\nu_2)$  с прямой  $\nu_1 = \nu_2$ , когда диссипативные коэффициенты в обоих шарнирах одинаковы. Для этого случая аналитическое решение было построено в работе [6], и, так же как и глобально оптимальное значение, оно отвечает тому варианту, когда три корня характеристического уравнения располагаются на плоскости корней на одной вертикали, а четвертый корень лежит левее них. Разумеется, такая ситуация реализуется, если корни  $p_{1,2}$  в обозначениях (8) и (9) еще являются комплексно-сопряженными, а корни  $p_{3,4}$  уже становятся вещественными и отрицательными, причем вещественные части корней  $p_{1,2}$  и модуль корня  $p_4$  со знаком «+» совпадают. В результате получаем следующие значения:

$$\nu_1 = \nu_2 = \sqrt{\frac{13\sqrt{2} + 18}{21}} \approx 1.316, \quad \Delta = \sqrt{\frac{5\sqrt{2} - 6}{21}} \approx 0.226, \quad (27)$$

и, конечно, ввиду равенства  $\nu_1$  и  $\nu_2$  им отвечает лишь один кружок на рис. 5, б. Кроме того, коричневому кружку на рис. 5, а и б отвечают значения  $\nu_1 = 1.307$ ,  $\nu_2 = 0$ ,  $\Delta = 0.153$ , а фиолетовому кружку – значения  $\nu_1 = 0$ ,  $\nu_2 = 0.364$ ,  $\Delta = 0.005$ . Наконец, черный кружок на рис. 5, а отвечает глобально оптимальному варианту  $\nu_{1*} = 2.552$ ,  $\nu_{2*} = 0.591$ , для которого  $\Delta_* = 0.303$  есть наибольшее возможное значение степени устойчивости, и на рис. 5, б ему отвечают точки максимума кривых  $\Delta = \Delta(\nu_1)$  при  $\nu_2 = \nu_{2**}(\nu_1)$  и  $\Delta = \Delta(\nu_2)$  при  $\nu_1 = \nu_{1**}(\nu_2)$ .

Таким образом, при решении оптимизационных задач были выявлены предельные возможности в отношении пассивного гашения колебаний системы по критерию максимума степени устойчивости. Кроме того, приведенные значения степени устойчивости в различных характерных точках на рис. 5 позволяют легко понять, насколько эти варианты уступают глобально оптимальному, что крайне важно при практической реализации наилучшего демпфирования. Конечно, аналогичную оценку эффективности оптимального решения можно произвести, рассматривая любые

другие комбинации параметров  $\nu_1$  и  $\nu_2$  и пользуясь графиком, приведенным на рис. 4.

**6. Заключение.** В данной работе были исследованы вопросы о динамическом поведении двойного математического маятника с идентичными параметрами его звеньев и концевых грузов, испытывающего действие шарнирного вязкого трения. Установлено, что в диссипативной системе формы колебаний остаются такими же, как и в консервативной системе, лишь при идентичных диссипативных коэффициентах вязкого трения в обоих шарнирах, отвечающих случаю пропорционального демпфирования. Это обстоятельство позволило получить в данной ситуации достаточно простые формулы для частот колебаний и факторов затухания, которые послужили базой для исследования диссипативных форм колебаний в общем случае при различных диссипативных параметрах. Было показано, что для описания движения системы по диссипативным формам колебаний необходимо знать частоты колебаний, факторы затухания, соотношения между экспоненциальными огибающими и фазовые сдвиги. Значения всех этих величин для обеих форм колебаний в зависимости от двух безразмерных диссипативных коэффициентов были найдены при помощи численного исследования на основе полученных аналитических выражений, и они были представлены графически в виде линий уровня на плоскости этих коэффициентов. Кроме того, также было указано, как можно осуществить проверку полученных результатов в известных частных случаях. В завершение были рассмотрены оптимизационные задачи о поиске наилучших диссипативных параметров как в глобальной постановке, когда оптимизация осуществляется по обоим коэффициентам демпфирования, так и в упрощенном варианте, когда один из коэффициентов фиксируется и находится оптимальное значение другого коэффициента. Полученные результаты имеют нетривиальную структуру и представляют несомненный теоретический интерес, а также они могут найти определенное практическое применение в прикладных задачах механики маятниковых систем, робототехники и биомеханики.

## Литература

1. Смирнов А. С., Кравчинский И. А. Динамика двойного маятника с вязким трением в шарнирах. I. Математическая модель движения и построение диаграммы режимов. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 2, 371–384 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.210>
2. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле*. Москва, Наука (1967).
3. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний*. Москва, Высшая школа (1980).
4. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. I. Постановка задачи. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 2, 357–365 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215357>
5. Болотин В. В. (ред.) *Вибрации в технике. Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем*. Москва, Машиностроение (1978).
6. Леонтьев В. А., Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимальное демпфирование колебаний двухзвенного манипулятора. *Робототехника и техническая кибернетика* **2** (19), 52–59 (2018).
7. Смольников Б. А. *Проблемы механики и оптимизации роботов*. Москва, Наука (1991).
8. Смирнов А. С., Муравьев А. С. Оптимизация демпфирования колебаний в системах с небольшим числом степеней свободы. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 1, 164–174 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.116>
9. Болотник Н. Н. *Оптимизация амортизационных систем*. Москва, Наука (1983).
10. Нагаев Р. Ф., Степанов А. В. Об оптимизации коэффициента затухания свободных колебаний двухмассовой системы. *Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела* **4**, 24–28 (1979).

11. Смирнов А. С., Смольников Б. А. Оптимизация режимов гашения колебаний пространственного двойного маятника. II. Решение задачи и анализ результатов. *Вестник Санкт-Петербургского университета Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 1, 121–138 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.111121>

12. Миреп С. А., Прилепский И. В. Оптимальные параметры гравитационной системы спутник-стабилизатор. *Космические исследования* **48** (2), 198–208 (2010).

13. Кумахшев С. А. Активное гашение колебаний несущих конструкций перемещением внутренней массы. *Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого): материалы XV Междунар. научн. конф.* Москва, 3–5 июня 2020 г., 250–252 (2020).

Статья поступила в редакцию 7 августа 2023 г.;

доработана 27 января 2024 г.;

рекомендована к печати 22 февраля 2024 г.

#### Контактная информация:

Смирнов Алексей Сергеевич — ассистент, мл. науч. сотр.; [smirnov.alexey.1994@gmail.com](mailto:smirnov.alexey.1994@gmail.com)

Кравчинский Игорь Андреевич — аспирант; [igor.krav2000@gmail.com](mailto:igor.krav2000@gmail.com)

## Dynamics of a double pendulum with viscous friction in the joints.

### II. Dissipative oscillation modes and optimization of damping parameters\*

A. S. Smirnov<sup>1,2</sup>, I. A. Kravchinskiy<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University,

29, ul. Politekhnicheskaya, St. Petersburg, 195251, Russian Federation

<sup>2</sup> Institute for Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,

61, Bolshoy pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

<sup>3</sup> CMT-Engineering,

28/2, Bolshoy Sampsonievsky pr., St. Petersburg, 195277, Russian Federation

**For citation:** Smirnov A. S., Kravchinskiy I. A. Dynamics of a double pendulum with viscous friction in the joints. II. Dissipative oscillation modes and optimization of damping parameters. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 584–599. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.314> (In Russian)

This paper is a continuation of the article “Dynamics of a double pendulum with viscous friction in the joints. I. Mathematical model of motion and construction of the regime diagram”, in which a linear mathematical model of the motion of a double mathematical pendulum with identical parameters of links and end loads in the presence of viscous friction in both articulations was given, and a diagram of dissipative regimes of its motion was also constructed. The question of a particular variant of proportional damping is considered, in which the oscillation modes of a dissipative system are not distorted by friction forces, and basic formulas are given that describe the dynamics of the system in this situation. For the general case of damping, through a rational combination of analytical and numerical research methods, all key quantities characterizing the motion of the system on each of the dissipative oscillation modes are identified and determined. In addition, several problems of optimal damping of system oscillations are considered, and the best dissipative parameters are selected based on the criterion of the maximum degree of stability. The obtained results are accompanied by a series of graphical illustrations, which make it possible to establish their dependence on the damping coefficients and note their main qualitative and

---

\*See first part: Smirnov A. S., Kravchinskiy I. A. Dynamics of a double pendulum with viscous friction in the joints. I. Mathematical model of motion and construction of the regime diagram. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 2, pp. 371–384. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.210> (In Russian)

quantitative features. The solutions found can be useful in practice when designing two-link manipulators and studying their dynamic behavior.

*Keywords:* double pendulum, viscous friction, proportional damping, dissipative oscillation mode, oscillation frequency, damping factor, amplitude ratio, phase shift, optimization, degree of stability.

## References

1. Smirnov A. S., Kravchinskiy I. A. Dynamics of a double pendulum with viscous friction in the joints. I. Mathematical model of motion and construction of the regime diagram. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 2, 371–384 (2024). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.210> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **57**, iss. 2, 254–262 (2024). <https://doi.org/10.1134/S1063454124700109>].
2. Timoshenko S. P. *Vibration problems in engineering*. Toronto; New York; London, D. Van Nostrand Company (1955) [Rus. ed.: Timoshenko S. P. *Kolebaniia v inzhenernom dele*. Moscow, Nauka Publ. (1967)].
3. Biderman V. L. *Theory of mechanical oscillations*. Moscow, Vysshiaia shkola Publ. (1980). (In Russian)
4. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. I. Formulation of the problem. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 2, 357–365 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215357> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **55**, iss. 2, 243–248 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.215>].
5. Bolotin V. V. (ed). *Vibrations in technology. Directory. Vol. 1. Oscillations of linear systems*. Moscow, Mashinostroenie Publ. (1978). (In Russian)
6. Leontev V. A., Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimal damping of two-link manipulator oscillations. *Robotics and Technical Cybernetics* **2** (19), 52–59 (2018). (In Russian)
7. Smolnikov B. A. *Problems of mechanics and robotoptimization*. Moscow, Nauka Publ. (1991). (In Russian)
8. Smirnov A. S., Murayvov A. S. Optimization of oscillation damping in systems with a non-integer number of degrees of freedom. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 1, 164–175 (2022). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.116> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **55**, iss. 1, 116–123 (2022)].
9. Bolotnik N. N. *Optimization of amortization systems*. Moscow, Nauka Publ. (1983). (In Russian)
10. Nagaev R. F., Stepanov A. V. On optimization of the damping coefficient of free oscillations of a two-mass system. *Bulletin of the Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of Rigid Body* **4**, 24–28 (1979). (In Russian)
11. Smirnov A. S., Smolnikov B. A. Optimization of oscillation damping modes of spatial double pendulum. II. Solving the problem and analyzing the results. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 1, 121–138 (2023). <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.111121> (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University, Mathematics* **56**, iss. 1, 93–106 (2023) <https://doi.org/10.1134/S1063454123010132>].
12. Mirer S. A., Prilepskiy I. V. Optimum parameters of a gravitational satellite-stabilizer system. *Cosmic Research* **48** (2), 194–204 (2010).
13. Kumakshev S. A. Active damping of vibrations of load-bearing structures by moving the internal mass. *Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference): Proceedings of the XV International Conference*. Moscow, June 3–5, 2020, 250–252 (2020). (In Russian)

Received: August 7, 2023

Revised: January 27, 2024

Accepted: February 22, 2024

## Authors' information:

Aleksei S. Smirnov — [smirnov.alexey.1994@gmail.com](mailto:smirnov.alexey.1994@gmail.com)

Igor A. Kravchinskiy — [igor.krav2000@gmail.com](mailto:igor.krav2000@gmail.com)