К 300-ЛЕТИЮ СПбГУ

УДК 517.31, 517.38, 517.51, 517.53
MSC 01A50, 01A55, 33B15, 33C45, 41A17

О роли Петербурга в становлении математического анализа

А. Д. Баранов, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов, Н. А. Широков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Баранов А. Д., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н., Широков Н. А.* О роли Петербурга в становлении математического анализа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 605–626. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.401

В статье рассмотрены основные этапы развития математического анализа в Санкт-Петербурге в XVIII–XIX вв. Приведены краткие биографические сведения и описание важнейших результатов выдающихся представителей Петербургской математической школы — Л. Эйлера, М. В. Остроградского, В. Я. Буняковского, П. Л. Чебышёва, Ю. В. Сохоцкого, А. А. Маркова.

Ключевые слова: суммирование рядов, интегрирование, непрерывные дроби, теория аппроксимации, ортогональные многочлены.

Во второй половине XVII в. в мировой науке произошло важнейшее событие: И. Ньютоном и Г. В. Лейбницем был заложен фундамент дифференциального и интегрального исчислений. Вскоре началось плодотворное сотрудничество Г. В. Лейбница с братьями Якобом и Иоганном Бернулли. Однако дальнейшее развитие этого чрезвычайно важного направления интенсивнее всего происходило не в Лондоне, не в Берлине и не в Париже, а в совершенно «неподходящем» месте — в самой молодой европейской столице, в Санкт-Петербурге.

В допетровскую эпоху в России не было систематической науки и, в частности, не было математики. Однако после царского указа 1724 г. о создании Академии наук и Университета при ней ситуация стала быстро меняться. Сильнее всего эти изменения сказались на точных науках и особенно на математике. В этом решающую роль сыграл приезд в Санкт-Петербург 20-летнего швейцарца Леонарда Эйлера, ученика И. Бернулли. Уникальный талант, великолепная память и потрясающая работоспособность позволили ему в кратчайшие сроки создать математический центр мирового уровня. По счастливому стечению обстоятельств он оказался в условиях, позволивших ему в полной мере проявить свою гениальность. Л. Эйлер высоко ценил возможности, которые дала ему петербургская жизнь. Он так писал об этом руководителю канцелярии Петербургской академии И. Д. Шумахеру [1, с. 766]:

> *Что собственно до меня касается, то при отсутствии такого превосходного обстоятельства я бы вынужден был, главным образом, обратиться к другим занятиям, в которых, по всем признакам, мог бы заниматься только крохоборством. Когда его королевское величество*[1] *недавно спросил меня, где я изучал то, что знаю, я, согласно истине, ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской академии.*

Поэтому не удивительно, что наш краткий обзор развития математики в Санкт-Петербурге XVIII–XIX вв. начинается с работ Л. Эйлера. Его роль в создании российской науки уникальна. После него в развитии отечественной математики возник некоторый застой. Ситуация стала улучшаться в начале следующего, XIX в., когда не только в Петербурге и Москве, но и в других крупных городах России возрос интерес к изучению наук, стали доступны европейские учебники. Это повлияло на выбор жизненного пути П. Л. Чебышёва и Ю. В. Сохоцкого. Ставшее возможным и престижным обучение в лучших университетах Европы выбрали другие два героя нашего обзора — М. В. Остроградский и В. Я. Буняковский. Со временем уровень отечественной математики и ее преподавания вырос. Братья А. А. и В. А. Марковы окончили Петербургский университет.

Мы хотим дать возможность читателю оценить вклад этих математиков, связанных с Санкт-Петербургом, в становление и дальнейшее развитие математики. Наш, как и любой другой, обзор этой большой темы ни в какой степени не может претендовать на полноту. Немало дополнительной интересной информации читатель может найти в книге [2].

Леонард Эйлер (1703–1783)

Читайте, читайте Эйлера, он — наш общий учитель
П.-С. Лаплас

Леонард Эйлер работал в Петербурге в 1724–1741 и 1766–1783 гг., а в промежутке, в годы работы в Берлине, оставаясь членом Петербургской академии наук, не переставал публиковать свои статьи в Трудах Академии [3–5]. Мы опишем его основные достижения лишь в одном, но главном для него разделе математики — основах дифференциального и интегрального исчислений (теперь этот раздел называют математическим анализом).

Базельская задача (вычислить сумму обратных квадратов). Якоб Бернулли призывал в своей книге «Арифметические предложения о бесконечных рядах» (1689): «*Если кому-либо удастся найти то, что до сих пор не поддавалось нашим*

[1] Фридрих II, король Пруссии.

усилиям, и если он сообщит это нам, то мы будем очень ему обязаны» [6, с. 40]. Но при жизни Я. Бернулли решение так и не появилось.

Эйлер, опираясь на найденное им разложение синуса в бесконечное произведение (см. ниже), пришел [7] к равенству

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Этот результат вызвал огромный интерес и сразу ввел Эйлера в круг мировых математических лидеров.

Рассуждение Эйлера, чрезвычайно остроумное и слишком смелое для XVIII в., вызвало обоснованную критику других математиков, в частности, его друзей братьев Николая и Даниила Бернулли. Поэтому позже Эйлер неоднократно возвращался к базельской задаче. В частности, он вычислил сумму ряда с верными 20 десятичными знаками[2] и убедился, что известные тогда приближенные значения числа π дают такой же результат. Кроме того, Эйлер счел нужным дать и формальные (по меркам XVIII в.) доказательства. Одно из них, основанное на тейлоровском разложении арксинуса, он получил в 1741 г. Оно коротко и изящно[3]:

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)} \sin^{2k+1} x\,dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)}\,\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{6}\pi^2$. Другие способы вычисления этой суммы см. в [8, 9].

Позже Эйлер значительно усилил свое достижение, найдя суммы обратных четных степеней: для любого натурального числа m справедливо равенство

$$\zeta(2m) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}} = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!} B_{2m},$$

где B_{2m} — числа Я. Бернулли, которые легко вычисляются по рекуррентной формуле $B_n = -\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} B_{n-k}$, $B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2}$.

Разложение тригонометрических функций в сумму простейших дробей. В 1735 г. Эйлер получил разложение синуса в бесконечное произведение линейных множителей — аналог теоремы Безу для многочленов:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\Big).$$

Логарифмируя это равенство и затем переходя к производным, можно получить разложения

$$\pi \operatorname{ctg} \pi x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n+x}, \qquad \frac{\pi}{\sin \pi x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$$

[2]Видимо, с этим связаны и преобразование Эйлера медленно сходящихся рядов, и формула Эйлера — Маклорена.

[3]Ради упрощения записи далее считаем, что $(-1)!! = 0!! = 1$.

(суммы этих рядов понимаются в смысле *главного значения* — как предел симметричных частичных сумм $\sum_{n=-N}^{N} \ldots$).

Преобразование Эйлера числовых рядов. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \Big(a_0 + k a_1 + \ldots + \frac{k!}{j!(k-j)!} a_j + \ldots + a_k \Big).$$

Для сходимости ряда в правой части сходимость исходного ряда достаточна, но не необходима. Поэтому, если исходный ряд расходится, а преобразованный сходится, его сумма называется обобщенной в смысле Эйлера суммой исходного ряда (*метод Эйлера суммирования рядов*). Это один из первых методов обобщенного суммирования числового ряда.

Подстановки Эйлера. Интегрирование функций вида $R(x,y)$, где R — рациональная функция и $y(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$, можно свести к интегрированию некоторой рациональной функции с помощью подстановок (далее t — новая переменная интегрирования):

1) если $a > 0$, то $t = y(x) \pm \sqrt{a}\, x$;
2) если $c > 0$, то $tx = y(x) \pm \sqrt{c}$;
3) если $y(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$, то $t(x-\alpha) = y(x)$.

Интеграл Эйлера — Пуассона

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

вошел в коллекцию самых знаменитых интегралов. Он играет огромную роль в теории вероятностей и других областях математики.

Эйлеровы интегралы (Γ- и B-функции Эйлера). Следуя А.-М. Лежандру, так стали называть функции, определяемые равенствами

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \frac{dt}{e^t} \quad (x > 0);$$
$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad (x, y > 0).$$

Эйлер успешно применял их в решении многих задач. О важной роли этих функций в математике знаменитый алгебраист Э. Артин так говорит в предисловии к своей небольшой книжке [10, с. 3]: *гамма-функцию можно во всех отношениях причислить к элементарным функциям.*

Открытая Эйлером связь между Γ- и B-функциями

$$\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x, y > 0)$$

позволяет легко найти значения Γ-функции в полуцелых точках, а также явно выразить тригонометрические интегралы $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p \varphi \sin^q \varphi \, d\varphi$ через значения Γ-функции.

Приведем еще несколько формул, открытых Эйлером.

• Бесконечное произведение для Г-функции

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{x}{n}\Big)\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-x}.$$

• Формула Эйлера — Гаусса

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} n^{-x}x(1+x)\cdots\Big(1+\frac{x}{n}\Big).$$

• Формула дополнения для Г-функции

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}.$$

• Сумма тригонометрического ряда

$$\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$$

— это первое разложение алгебраической функции в тригонометрический ряд (позже названный рядом Фурье).

• Формула Эйлера (1732) — Маклорена (1735)

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(x)\,dx + \frac{f(n)+f(m)}{2} + \frac{f'(n)-f'(m)}{12} + \ldots + \\ + \frac{f^{(2j-1)}(n) - f^{(2j-1)}(m)}{(2j)!}B_{2j} + \ldots$$

(B_{2j} — число Бернулли).

• Постоянная Эйлера — Маскерони C (теперь она чаще обозначается символом γ):

$$C = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{k} - \ln\big(1+\frac{1}{k}\big)\Big),$$

так что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + C + o(1) \quad \text{при} \;\; n\to+\infty.$$

Эйлер ввел важнейшие для математики символы. После того, как он стал применять обозначение π (от $\pi\varepsilon\rho\iota\varphi\varepsilon\rho\iota\alpha$) для длины окружности с единичным диаметром, это обозначение, впервые использованное Уильямом Джонсом в 1706 г., стало общепринятым. Эйлер также ввел символы e для обозначения неперова числа $\lim(1+\frac{1}{n})^n$ (1727), $f(x)$ (1734), $i=\sqrt{-1}$ (1777), $\sum$ (1755), Δ (для обозначения конечных разностей).

Теорема Эйлера об однородных функциях. Функция f, заданная в $\mathbb{R}^m\setminus\{0\}$, называется однородной степени p, если $f(tx) = t^p f(x)$ для всех x и всех

$t > 0$. Для того, чтобы дифференцируемая функция оказалась однородной степени p, необходимо и достаточно, чтобы

$$pf(x) \equiv \langle x, \operatorname{grad} f(x) \rangle$$

(справа стоит скалярное произведение аргумента x и градиента функции $f(x)$).

Применение анализа к комбинаторике. Производящие функции[4].

• Тождество Эйлера (1737), представляющее ζ-функцию

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

в виде

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

(произведение берется по простым индексам p) продемонстрировало возможность применения анализа к теории чисел (предтеча аналитической теории чисел).

• Разбиение натурального числа n — это представление числа n в виде суммы положительных целых чисел; $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$ (порядок слагаемых не важен).

В 1740 г. Эйлер вывел формулу для производящей функции последовательности числа разбиений $p(n)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}.$$

• Пентагональная теорема Эйлера (1737):

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x^{(3k^2 - k)/2}.$$

Показатели степени в правой части — так называемые пентагональные числа.

• Число Эйлера $E_n, n \geqslant 0$, определяется как число чередующихся *up-down* перестановок[5] отрезка натурального ряда $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Например, $E_4 = 5$ — количество *up-down* перестановок $(13254), (14253), (24154), (25341), (25143)$ пятого порядка. Они могут быть вычислены рекурсивно с помощью аналога треугольника Паскаля и участвуют во многих формулах, самая известная из которых:

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad \sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k}.$$

Непрерывные дроби.

• Теорема Эйлера о непрерывных дробях: разложение квадратичной иррациональности в непрерывную дробь периодично, начиная с некоторого места[6].

[4] Здесь ряды понимаются в формальном смысле как многочлены бесконечной степени.

[5] То есть таких перестановок σ, что $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \ldots$

[6] Обратное утверждение принадлежит Лагранжу.

• Разложение неперова числа в непрерывную дробь (1744):

$$e=[2;1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1\ldots]=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}$$

• Эйлерова цепная дробь (1744). Эйлер связал частичные суммы ряда с подходящими дробями цепной дроби (*эйлерова цепная дробь*, 1744, [11]). Пусть $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность ненулевых комплексных чисел, $c_0=b_0=1, b_k=c_k/c_{k-1}(k\in\mathbb{N})$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n}c_k=\sum_{k=0}^{n}b_0b_1\cdots b_k=\cfrac{b_0}{1-\cfrac{b_1}{1+b_1-\cfrac{b_2}{1+b_2-\cfrac{b_3}{1+b_3-\ldots-\cfrac{b_n}{1+b_n}}}}}.$$

Этот прием позволил ему получить множество интересных формул.

Эйлер также применял цепные дроби в решении проблемы календаря (1748).

Дифференциальные уравнения. Простейший метод численного решения задачи Коши систем обыкновенных дифференциальных уравнений — *ломаные Эйлера* — был предложен Эйлером в 1768 г.

Эйлеру принадлежат методы решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами и обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Он предложил также метод решения уравнений в виде степенных рядов, метод вариации констант, ввел интегрирующие множители.

Вариационное исчисление. Уравнение Эйлера — Лагранжа. Термин и первое систематическое изложение вариационного исчисления предложены Эйлером в 1766 г. В задаче о нахождении экстремума функционала

$$J(f)=\int_a^b F\big(x,f(x),f'(x)\big)\,dx,$$

где F — дважды непрерывно дифференцируемая функция, а f пробегает пространство гладких функций на отрезке $[a,b]$. Л. Эйлером и Ж.-Л. Лагранжем в 1750-х годах получено необходимое условие экстремума, сводящее задачу к решению обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial f}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}=0.$$

Комплексный анализ. Эйлер занимался комплексным анализом в различных аспектах. Самая замечательная, по мнению многих, математическая формула —

манифестация единства алгебры (i), геометрии (π) и анализа (e):

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

— является следствием формул Эйлера, связывающих экспоненту с тригонометрическими функциями ($z \in \mathbb{C}$):

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$
$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Л. Эйлером выведены уравнения, впервые рассмотренные Даламбером в связи с уравнениями гидродинамики, эквивалентные аналитичности функции. Для того чтобы функция $w = f(z)$, определенная в некоторой области D комплексной плоскости, была дифференцируема как функция комплексного переменного $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы ее вещественная и мнимая части u и v были дифференцируемы как функции вещественных переменных x и y и чтобы, кроме того, выполнялись условия

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(позже их стали называть условиями Коши — Римана).

Тождество Эйлера (о четырех квадратах). Справедливо равенство

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

где

$$x = ap + bq + cr + ds, \quad y = aq - bp \pm cs \mp dr,$$
$$z = ar \mp bs - cp \pm dq, \quad t = as \pm br \mp cq - dp.$$

Эта формула важна для теории кватернионов.

Михаил Васильевич Остроградский (1801–1861)

М. В. Остроградский получил первоначальное математическое образование в Харьковском университете, после чего продолжил занятия математикой в Париже, в Сорбонне и Коллеж де Франс. Он посещал лекции самых знаменитых французских ученых — П.-С. Лапласа, Ш. Фурье, А.-М. Ампера, С. Д. Пуассона и О. Л. Коши (который дал высокую оценку работам Остроградского, представленным в Парижскую академию наук). В 1828 г. Остроградский вернулся в Россию, где в 1830 г. был избран экстраординарным академиком Петербургской академии наук. Кроме работы в Академии, в 1831–1860 гг. М. В. Остроградский был профессором нескольких высших учебных заведений Санкт-Петербурга и читал лекции по анализу, геометрии, механике. Современники отзывались о нем как о замечательном лекторе.

Наиболее известное достижение М. В. Остроградского — формула, связывающая поверхностный и объемный интегралы, известная в настоящее время как формула Гаусса — Остроградского. Приведем ее классическую формулировку.

Пусть V — компактное подмножество в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей $S = \partial V$, а $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ — векторное поле, непрерывно дифференцируемое в некоторой окрестности множества V. Тогда справедливо равенство

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \int_S (P \cos \alpha + P \cos \beta + R \cos \gamma)\, dS. \tag{1}$$

Здесь dV и dS обозначают дифференциалы объема и площади поверхности, т. е. по сути меры Лебега в $\mathbb{R}^3$ и на поверхности S, а $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — компоненты единичной внешней нормали $\mathbf{n}$ к границе S. Формулу (1) можно записать следующим образом:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \int_S \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle\, dS.$$

Аналогичная формула справедлива в любом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$ (в случае $n = 2$ она равносильна формуле Грина).

Первые частные случаи формулы (1) (известной в англоязычной литературе как “divergence theorem”) были отмечены еще Ж.-Л. Лагранжем в работе «Новые исследования о природе и распространении звука» (1762). Частные случаи этой формулы рассматривались и К. Гауссом (в 1813, а затем в 1830 и 1839 гг.). Однако именно М. В. Остроградский впервые сформулировал и доказал общий вариант формулы. Этот результат был им представлен в Парижской академии наук в феврале 1826 г. Доказательство было впервые опубликовано в 1828 г. в трудах Санкт-Петербургской академии наук («Заметка по теории теплоты» [12, с. X]). В 1834 г. Остроградский обобщил формулу на случай произвольного числа переменных в статье [13, с. V]. В ней с помощью этого результата им было найдено выражение производной по параметру от n-кратного интеграла с переменными пределами и получена формула для вариации n-кратного интеграла.

Разумеется, формула Гаусса — Остроградского впоследствии вошла как частный случай в формулу Стокса для дифференциальных форм:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Об истории формулы Стокса и ее предшественниц см. [14].

Целый ряд работ М. В. Остроградского посвящен теории интегрирования (см. [13]). Здесь его именем назван метод интегрирования рациональной функции, имеющей кратные корни в знаменателе [13, с. XVIII]. Как отмечено в [15], в статье [13, с. X] «Остроградский дал первое строгое доказательство формулы замены переменной в двойном интеграле, использующее понятие бесконечно малых».

Важные результаты были получены М. В. Остроградским в области обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, например, им был рассмотрен метод решения нелинейных уравнений, использующий разложение в степенной ряд по параметру. Близкие результаты были получены в те же годы Ж. Лиувиллем. В частности, в 1838 г. Остроградский [13, с. XII] и Лиувилль одновременно и независимо получили формулу для вронскиана $W(x)$ системы решений однородного дифференциального уравнения порядка n. А именно, если дано уравнение

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = 0,$$

то

$$W(x) = W(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} P_1(t)\,dt\right).$$

Аналогичная формула справедлива для определителя фундаментального решения Φ системы n линейных однородных уравнений $y' = A(x)y$, где A — матрица коэффициентов:

$$\det\Phi(x) = \det\Phi(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \mathrm{Tr}\,A(t)\,dt\right).$$

Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889)

Вся многолетняя научная и педагогическая деятельность выдающегося русского математика В. Я. Буняковского связана с Санкт-Петербургом. Буняковский, как и М. В. Остроградский, получил математическое образование в основном во Франции, где он слушал лекции таких великих математиков, как П.-С. Лаплас, С. Д. Пуассон, Ш. Фурье, О. Л. Коши, А.-М. Лежандр. В 1826 г., после присуждения ему Парижским университетом степени доктора математических наук за диссертацию, написанную под руководством Коши, Буняковский приехал в Санкт-Петербург. С 1826 по 1860 г. он был профессором ряда высших учебных заведений Санкт-Петербурга, в том числе с 1846 по 1860 г. — Санкт-Петербургского университета. В 1828 г. Буняковский стал адъюнктом Петербургской академии наук, в 1830 г. — ее экстраординарным академиком, а с 1836 г. — ординарным академиком. С 1864 по 1889 г. Буняковский — вице-президент Петербургской академии наук.

В. Я. Буняковский внес существенный вклад в преподавание математики в России. В течение многих лет он читал курс дифференциального и интегрального исчисления, следуя «строгому» изложению Коши. Переработав прослушанные им в Париже лекции П.-С. Лапласа, Буняковский написал лучший для своего времени учебник «Основания математической теории вероятностей».

Однако наиболее известным вкладом В. Я. Буняковского в анализ является интегральное неравенство, носящее его имя. В 1821 г. О. Л. Коши доказал неравенство для сумм

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

В 1859 г. В. Я. Буняковский [16] доказал его аналог для интеграла от произведения двух непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \ \int_a^b g^2(x)dx.$$

Это неравенство (часто называемое неравенством Шварца) было много позднее (в 1888 г.) переоткрыто Г. Шварцем.

В настоящее время неравенством Коши — Буняковского — Шварца (также Коши — Буняковского или Коши — Шварца) называют также и более общее неравенство между скалярным произведением и нормой в абстрактном гильбертовом пространстве: $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

В. Я. Буняковским был также получен ряд важных результатов в теории чисел. Он сформулировал замечательную гипотезу-критерий того, что среди значений многочлена в точках натурального ряда бесконечно много простых чисел. За исключением случая многочленов степени 1 (теорема Дирихле об арифметических прогрессиях), эта гипотеза остается полностью открытой.

Пафнутий Львович Чебышёв (1821–1894)

П. Л. Чебышёв учился и защитил магистерскую диссертацию в Московском университете, а диссертации «Об интегрировании с помощью логарифмов» (на должность адъюнкт-профессора, 1847) и «Теория сравнений» (на степень доктора, 1849) были защищены в Петербургском университете. В 1847–1853 гг. Чебышёв — адъюнкт-профессор, в 1853–1857 гг. — экстраординарный профессор, в 1857–1882 гг. — ординарный профессор Петербургского университета. В 1859 г. он избран ординарным академиком Петербургской академии наук.

Источником приводимых далее сведений служит собрание сочинений Чебышёва [17–20].

Теория интегрирования

• Фундаментальный результат Чебышёва в теории неопределенных интегралов состоит в следующем: интеграл $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ «не выражается в конечном виде», т. е. не сводится к интегралам от рациональных функций, кроме трех эйлеровых случаев:

$$1)\ p\in\mathbb{Z},\quad 2)\ \frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z},\quad 3)\ \frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}.$$

• Развитие теории неопределенных интегралов, которые можно выразить в конечном виде, приводило П. Л. Чебышёва к неожиданным формулировкам. Например, для того, чтобы интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+ax+b}}$$

выражался в элементарных функциях, необходимо, чтобы по крайней мере для одного из корней уравнений

$$x^3=\frac{27}{4}\,\frac{b^2}{a^3}+1,\qquad 3\Big(\frac{b^2}{a^3}\Big)^2x^4+6\frac{b^2}{a^3}(x^2+2x)=1$$

выполнялось условие $\frac{a^3}{b^2}x\in\mathbb{Q}$.

Интегральное неравенство для монотонных функций. Пусть функции u и v не убывают на $[0,1]$. Тогда

$$\int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx\geqslant\int_0^1 u(x)\,dx\int_0^1 v(x)\,dx.$$

Если u и v строго возрастают, то неравенство строгое.

Неравенство Чебышёва. П. Л. Чебышёву принадлежит также неравенство для функции распределения (в теории вероятностей его иногда называют неравенством А. А. Маркова). Приведем его современную формулировку. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой. Тогда для любой суммируемой на X функции f и любого $t > 0$ справедливо неравенство

$$\mu\bigl(\{x \in X : |f(x)| > t\}\bigr) \leq \frac{1}{t} \int_X |f| \, d\mu.$$

Несмотря на свою простоту, неравенство Чебышёва играет фундаментальную роль в анализе (например, при оценках слабого типа в теории сингулярных интегральных операторов) и теории вероятностей.

Ортогональные полиномы. Алгебраические полиномы T_n и U_n, введенные Чебышёвым, обладают, как было отмечено им самим и как показало дальнейшее развитие анализа, рядом важных свойств.

• Полиномы $\{T_n\}_{n \geqslant 0}$, $T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$ при $|x| \leqslant 1$, образуют ортогональную систему с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\int_{-1}^{1} T_j(x) T_k(x) \, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \qquad \text{для} \quad j \neq k.$$

• Полиномы $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $U_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin((n+1) \arccos x)}{\sin \arccos x}$ при $|x| \leqslant 1$, образуют ортогональную систему с весом $\sqrt{1-x^2}$:

$$\int_{-1}^{1} U_j(x) U_k(x) \sqrt{1-x^2} \, dx = 0 \qquad \text{для} \quad j \neq k.$$

• П. Л. Чебышёв систематически использовал разложение функций в непрерывные дроби в качестве мощного аналитического инструмента. В непрерывной дроби

$$\frac{1}{\sqrt{z^2-1}} = \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{2z - \cfrac{1}{2z - \cfrac{1}{2z - \dots}}}}$$

многочлены U_{n-1} и T_n являются числителем и знаменателем n-й подходящей дроби.

Теория приближений. П. Л. Чебышёв заложил основы теории наилучшего приближения функции полиномами (теперь обычно используют термин «чебышёвские приближения»). Формулируя результаты этой теории, удобно использовать обозначения, ставшие стандартными: $\mathcal{P}_n$ — множество всех алгебраических полиномов степени не выше n; для функции f, непрерывной на промежутке $[a, b]$, ее *равномерная* (или *чебышёвская*) *норма* $\|f\|_C$ определяется равенством

$$\|f\|_C = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

• Следующий результат является одним из основных в этой области. Для вещественной функции $f \in C([a,b])$ и $n \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$E_n(f) = \min_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_C.$$

Пусть этот минимум достигается на *полиноме наилучшего приближения* $P_n \in \mathcal{P}_n$. Тогда множество

$$Z_n = \{x \in [a,b] : |f(x) - P_n(x)| = E_n(f)\}$$

состоит из не менее чем $n+2$ точек, причем в соседних точках значения разности $f - P_n$ противоположны (*чебышёвский альтернанс*).

• Важное свойство полиномов $\{T_n\}$, рассматриваемых на промежутке $[-1,1]$, состоит в следующем: для $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\min_{P \in \mathcal{P}_{n-1}} \|x^n - P(x)\|_C = \frac{1}{2^{n-1}},$$

и оно достигается на полиноме $x^n - T_n(x)$.

Говоря иными словами, среди полиномов из $\mathcal{P}_n$ со старшим коэффициентом, равным единице, на промежутке $[-1,1]$ наименьшую чебышёвскую норму имеет полином $T_n(x)$ (наименее отклоняющийся от нуля полином).

• Как установил П. Л. Чебышёв, полиномы $\{U_n\}$ экстремальны в метрике $L^1([-1,1])$ в следующем смысле: наименьшее значение интеграла $I(P) = \int_{-1}^{1} \big|x^n - P(x)\big|\, dx$ на $\mathcal{P}_{n-1}$ равно $\frac{1}{2^{n-1}}$ и достигается[7] при $P(x) = x^n - U_n(x)$.

• Развитие теории наилучшего приближения порой приводило П. Л. Чебышёва к сложным выражениям. Пусть $h > 0$ и $H \notin [-h,h]$. Полином P_{n-1} из $\mathcal{P}_{n-1}$, для которого норма $\|P_{n-1}(x) - \frac{1}{H-x}\|_C$ минимальна, задается формулой

$$P_{n-1}(x) = \frac{1}{H-x} + \frac{1}{2}\Bigg(\frac{(x+\sqrt{x^2-h^2})^{n-1}\big(Hx - h^2 + \sqrt{(H^2-h^2)(x^2-h^2)}\big)}{(H^2-h^2)(H+\sqrt{H^2-h^2})^{n-1}(H-x)} + \\ + \frac{(x-\sqrt{x^2-h^2})^{n-1}\big(Hx - h^2 - \sqrt{(H^2-h^2)(x^2-h^2)}\big)}{(H^2-h^2)(H+\sqrt{H^2-h^2})^{n-1}(H-x)}\Bigg).$$

• Следующая теорема важна для теории моментов.

Пусть D — область в $\mathbb{R}^{2m}$ и $C = (c_0, c_1, \ldots, c_{2m-1}) \in D$. Допустим, что

$$\begin{vmatrix} c_0 & \ldots & c_{k-1} \\ c_1 & \ldots & c_k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{k-1} & \ldots & c_{2k-2} \end{vmatrix} > 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, m$$

и положительные числа $x_1(C), \ldots, x_m(C)$ — корни полинома

$$P_m(x,C) = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_m \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m-1} & c_m & \ldots & c_{2m-1} \\ 1 & x & \ldots & x^m \end{vmatrix}.$$

[7]Этот результат был переоткрыт в работах Е. И. Золотарева — А. Н. Коркина, Т. И. Стилтьеса, М. Фудзивары, С. Н. Бернштейна.

Тогда $x_1(C), \ldots, x_m(C)$ — возрастающие функции от $c_1, c_3, \ldots, c_{2m-1}$ и убывающие от $c_0, c_2, \ldots, c_{2m-2}$.

Распределение простых чисел. Задача нахождения асимптотически точных формул для величины $\pi(x)$ — числа простых чисел, не превосходящих x, — в течение многих лет интересовала математиков. Еще в начале XIX в. А.-М. Лежандр высказал гипотезу, что $\pi(x)$ хорошо приближается функцией $\frac{x}{\ln x}$, а в 1838 г. П. Г. Л. Дирихле предложил для аппроксимации функции $\pi(x)$ интегральный логарифм $\mathrm{Li}\,(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$.

В двух статьях (1848 и 1850 гг.) П. Л. Чебышёв доказал, что для всех достаточно больших x выполнено неравенство

$$0.89\,\frac{x}{\ln x} \leqslant \pi(x) \leqslant 1.11\,\frac{x}{\ln x}.$$

Также им было показано, что если предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}$ существует, то он равен 1. Последнее утверждение вытекает, в частности, из следующего глубокого результата Чебышёва: для любых чисел $\alpha > 0$ и $n > 0$ каждое из неравенств

$$\pi(x) > \int_2^x \frac{dt}{\ln t} - \frac{\alpha x}{\ln^n x}, \qquad \pi(x) < \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + \frac{\alpha x}{\ln^n x}$$

имеет бесконечно много решений.

Полученные Чебышёвым результаты позволили ему доказать постулат Бертрана (гипотезу, сформулированную в 1840 г. французским математиком Ж. Бертраном): для любого $n \geqslant 2$ найдется простое число, лежащее строго между числами n и $2n$.

В 1896 г. Ж. Адамар и Ш.-Ж. Валле-Пуссен независимо друг от друга доказали точную асимптотику $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$, $x \to +\infty$. При этом их методы (как и методы Чебышёва) были существенно аналитическими. Элементарное (но не простое) доказательство теоремы о распределении простых чисел методами теории чисел было найдено только в 1949 г. А. Сельбергом и П. Эрдёшом.

Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842–1927)

Начальное математическое образование Ю. В. Сохоцкий получил в Варшавской гимназии, физико-математическое отделение которой окончил в 1860 г. В том же году он переехал в Петербург. В 1866 г. Сохоцкий успешно сдал магистерские экзамены на математическом отделении физико-математического факультета Петербургского университета (экзаменатор — П. Л. Чебышёв). Через два года он защитил магистерскую диссертацию (оппоненты П. Л. Чебышёв, О. И. Сомов) и с осени того же года Ю. В. Сохоцкий — приват-доцент Петербургского университета. В 1873 г. он защитил докторскую диссертацию. С 1883 г. Сохоцкий — ординарный, а с 1893 г. — почетный профессор Петербургского университета. В 1890 г. стал одним из учредителей (и товарищем председателя) Санкт-Петербургского математического общества, а с 1892 по 1917 г. был его председателем.

Основные работы Ю. В. Сохоцкого относятся к теории функций комплексной переменной и теории эллиптических функций. Его имя связано как минимум с двумя замечательными результатами в области комплексного анализа. Первый из них — теорема Сохоцкого — Вейерштрасса, утверждающая, что *голоморфная функция в каждой окрестности существенно особой точки принимает значения, сколь угодно близкие к произвольному наперед заданному комплексному числу.*

Теорема. *Если множество $G \subset \mathbb{C}$ открыто, $a \in G$, функция f голоморфна в $G_a = G \setminus \{a\}$ и a — существенно особая точка функции f, то множество $f(G_a)$ всюду плотно в $\mathbb{C}$.*

Эта теорема была получена Сохоцким в его магистерской диссертации (1868). Интересно, что этот же результат был одновременно и независимо доказан целым рядом математиков. В том же 1868 г. этот результат был получен итальянским математиком Ф. Казорати, а в 1876 г. ее опубликовал К. Вейерштрасс (поэтому теорему Сохоцкого — Вейерштрасса в иностраннной литературе иногда называют теоремой Казорати — Вейерштрасса). Однако впервые подобный результат был упомянут в книге французских математиков Ш. Брио и Ж.-К. Буке (1859).

Уже в 1879 г. Ш. Э. Пикар получил намного более сильный результат (так называемая Большая теорема Пикара): *голоморфная функция в каждой окрестности существенно особой точки принимает все комплексные значения, кроме, может быть, одного.*

Однако теорема Сохоцкого — Вейерштрасса по-прежнему имеет «методическую ценность». В отличие от теоремы Пикара, доказательство которой весьма сложно, теорема Сохоцкого — Вейерштрасса входит в базовые курсы комплексного анализа как полезное применение теоремы о том, что из ограниченности аналитической функции около особой точки следует, что эта особая точка — устранимая. В самом деле, предположим, что $A \notin \operatorname{Clos} f(G_a)$. Тогда функция $g(z) = \frac{1}{f(z)-A}$ ограничена в G_a, и, следовательно, для нее особая точка a является устранимой. Таким образом, $f(z) = \frac{1}{g(z)} + A$, и особая точка a функции f устранима или является полюсом.

Важнейший результат Ю. В. Сохоцкого, сохраняющий значение до настоящего времени, относится к поведению интегралов типа Коши на кривой при приближении к этой кривой. Этот результат также был получен Сохоцким в его магистерской диссертации и опубликован в работе [21].

Пусть γ — гладкая замкнутая жорданова кривая в $\mathbb{C}$, а f — достаточно хорошая (скажем, непрерывная) функция на γ. Рассмотрим интеграл типа Коши:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma. \tag{2}$$

Формула (2) определяет аналитические функции F_i и F_e соответственно в ограниченной области G, ограниченной кривой γ, и в ее дополнении $\widehat{G} = \mathbb{C} \setminus (G \cup \gamma)$. Также рассмотрим преобразование Коши (интеграл в смысле главного значения)

$$(Cf)(z) = \lim_{\delta \to 0}\int_{\gamma \setminus B_\delta(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad z \in \gamma,$$

где $B_\delta(z) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| < \delta\}$. Этот интеграл имеет смысл, например, если функция f лежит в каком-нибудь классе Липшица Lip_α, $\alpha > 0$, на кривой γ. В этом случае при всех $z \in \gamma$ имеют место следующие формулы, связывающие F_i, F_e и Cf:

$$\begin{aligned} \lim_{w \to z} F_i(w) &= (Cf)(z) + \frac{1}{2}f(z), \\ \lim_{w \to z} F_e(w) &= (Cf)(z) - \frac{1}{2}f(z). \end{aligned} \tag{3}$$

В частности,

$$f(z) = \lim_{w\to z} \big(F_i(w) - F_e(w)\big).$$

Формулы (3) известны как формулы Племеля — Сохоцкого. К сожалению, как и во многих других случаях, результаты Сохоцкого не были замечены математической общественностью. В 1908 г. Й. Племель независимо доказал эти формулы в своей работе [22], посвященной решению задачи Римана — Гильберта. Отметим, что в этой же статье Племель объявил о положительном решении 21-й проблемы Гильберта о существовании линейных дифференциальных уравнений с заданной группой монодромии. Доказательство Племеля считалось верным более 60 лет. Только в 1970-х годах в рассуждении Племеля была найдена ошибка, а в 1989 г. А. А. Болибрух решил 21-ю проблему Гильберта в отрицательном смысле, построив контрпример.

Легко показать, что для справедливости формул Племеля — Сохоцкого (3) достаточно предположить, что кривая γ спрямляема. Намного более глубокий вопрос состоит в том, можно ли ослабить условия на функцию f. И. И. Привалов показал, что если ограничиться некасательными (угловыми) граничными значениями, то конечные пределы $\lim\limits_{w\to z} F_i(w)$, $\lim\limits_{w\to z} F_e(w)$ и $(Cf)(z)$, где $z \in \gamma$, существуют или нет одновременно; и для соответствующих пределов имеют место формулы Племеля — Сохоцкого. Таким образом, задача сводится к изучению вопроса о существовании преобразования Коши на кривой. Этот вопрос стал одним из истоков создания важнейшего раздела анализа XX в. — теории сигулярных интегралов Кальдерона — Зигмунда. С помощью результатов Кальдерона о том, что преобразование Коши на липшицевых кривых с достаточно малой константой Липшица имеет слабый тип (1,1) [23], можно доказать следующий результат.

Теорема. *Если кривая γ спрямляема, а $f \in L^1(\gamma)$, то для почти всех $z \in \gamma$ существуют конечные величины $\lim\limits_{w\to z} F_i(w)$, $\lim\limits_{w\to z} F_e(w)$ и $(Cf)(z)$, и для них верны формулы Племеля — Сохоцкого.*

Сведение случая спрямляемой кривой к случаю кривой с достаточно малой константой Липшица можно осуществить, используя один результат В. П. Хавина 1965 г. [24] — еще одного яркого представителя Петербургской школы анализа (но уже XX в.). Более подробное обсуждение формул Племеля — Сохоцкого и развития связанных с ними идей можно найти в статье [2, с. 91–98].

Андрей Андреевич Марков (1856–1922)

В отличие от других героев нашего обзора А. А. Марков получил математическое образование в Санкт-Петербургском университете, где он слушал лекции П. Л. Чебышёва, ставшего его научным руководителем, а также А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева. Таким образом, Марков в полном смысле слова является представителем санкт-петербургской математической школы. В 1880 г. он защитил магистерскую диссертацию «О бинарных квадратичных формах положительного определителя», в которой им были получены выдающиеся результаты по теории чисел. В 1884 г. состоялась защита докторской диссертации «О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей». С 1880 г. и до конца жизни А. А. Марков преподавал в Санкт-Петербургском университете (с 1886 г. — профессор). В 1896 г. он был избран ординарным академиком Петербургской академии наук.

Младший брат Андрея Маркова, Владимир (1871–1897), также был талантливым математиком. Ему принадлежит замечательное обобщение неравенства для производной алгебраического полинома, полученного А. А. Марковым. Это неравенство мы обсудим ниже. К сожалению, В. А. Марков рано умер от туберкулеза, не успев завершить магистерскую диссертацию «О положительных тройничных квадратичных формах», изданную под наблюдением А. А. Маркова после смерти автора.

Наиболее известные результаты А. А. Маркова относятся к теории вероятностей. Он создал теории случайных процессов (получивших впоследствии название марковских) и марковских цепей, существенно продвинулся в исследовании закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Еще одно направление исследований Маркова связано с теорией чисел, где им были получены фундаментальные результаты по теории квадратичных форм и диофантовых уравнений. Здесь мы ограничимся обсуждением нескольких выдающихся результатов А. А. Маркова в математическом анализе.

Полиномиальные неравенства. В 1889 г. А. А. Марков опубликовал заметку «Об одном вопросе Д. И. Менделеева» [25] (см. также [26]). В ней изучался следующий вопрос: как можно оценить производную многочлена данной степени на отрезке при условии, что сам многочлен на этом отрезке не превосходит по модулю заданного числа? Д. И. Менделеева интересовал только частный случай $n = 2$, имеющий приложения в теории водных растворов. В результате появилось классическое неравенство Маркова для многочлена p степени n на промежутке $[-1, 1]$:

$$\|p'\|_C \leqslant n^2 \|p\|_C. \tag{4}$$

Неравенство (4) обращается в равенство на многочленах Чебышёва первого рода T_n. Также Марковым был подробно изучен вопрос об оценке $|p'(x)|$ в данной точке $x \in \mathbb{R}$ (не обязательно из отрезка $[-1, 1]$) и получены точные оценки, также в терминах многочленов Чебышёва.

Итерируя неравенство (4), легко показать, что

$$\|p^{(k)}\|_C \leqslant (n(n-1)\dots(n-k+1))^2 \|p\|_C,$$

однако это неравенство неточное (ведь производная многочлена Чебышёва уже не будет многочленом Чебышёва). Точная форма неравенства Маркова для старших производных была установлена в 1892 г. Владимиром Марковым в статье [27] (в 1916 г. ее перевод на немецкий был перепечатан в журнале “Mathematische Annalen” с предисловием С. Н. Бернштейна):

$$\|p^{(k)}\|_C \leqslant \frac{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)\dots(n^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!!} \|p\|_C. \tag{5}$$

Неравенство (5) уже является точным, а экстремальными полиномами для него вновь оказываются многочлены Чебышёва T_n.

Наряду с неравенством С. Н. Бернштейна $\|h'\|_C \leqslant n\|h\|_C$ для тригонометрического многочлена h степени не выше n (1912) неравенство Маркова является одним из важнейших инструментов теории аппроксимации. Оно послужило отправной точкой целого ряда исследований; в настоящее время известно огромное количество различных обобщений и аналогов этого неравенства (см., например, [28–30] и классические монографии П. Борвейна и Т. Эрдейи [31], К. И. Рахмана и Г. Шмайссера [32]).

Ортогональные многочлены. Серия работ А. А. Маркова посвящена поведению нулей ортогональных полиномов. В работах [33] установлен следующий важный результат о монотонном поведении нулей ортогональных многочленов, зависящих от параметра.

Теорема. *Пусть* $\{p_n(x,t)\}_{n\geqslant 0}$ *— последовательность многочленов от переменной* x*, ортогональных на интервале* (a,b) *с весом* $w(x,t)$*, зависящим от параметра* $t\in(c,d)$*. Предположим, что вес* $w(x,t)$ *положителен и имеет непрерывную первую производную по* t *при* $(x,t)\in(a,b)\times(c,d)$*. Предположим также, что интегралы*

$$\int_a^b x^k\,\frac{\partial w}{\partial t}(x,t)\,dx,\qquad k=0,1,\dots,2n-1,$$

сходятся равномерно по t *на каждом компактном подинтервале интервала* (c,d)*. Если функция* $\ln w(x,t)$ *выпукла как функция от* $t\in(c,d)$*, то* k*-й корень многочлена* $p_n(x,t)$ *— возрастающая функция от* t *для каждого фиксированного* $k\leqslant n$*.*

Как приложение этих результатов, Марков показал, что нули полиномов Якоби, ортогональных на интервале $(-1,1)$ с весом $w(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$, $\alpha,\beta>-1$, убывают как функции от α и возрастают как функции от β. Также в работах [33] получены границы для нулей многочленов Лежандра. Результаты и методы А. А. Маркова получили развитие в работах целого ряда специалистов по ортогональным многочленам (Г. Сегё, Г. Фройд, М. Э. Х. Исмаил, А. Кро, Ф. Пехерсторфер и др.).

Проблема моментов. А. А. Марков внес значительный вклад в изучение проблемы моментов. Приведем один исключительно важный результат: так называемые неравенства Чебышёва — Маркова или Чебышёва — Маркова — Стилтьеса (неравенства были сформулированы Чебышёвым без доказательства, которое было дано Марковым и, независимо и немного позднее, Т. И. Стилтьесом). Доказательство было опубликовано Марковым в [34] (см. также [35, глава IV, § 3]). Говоря неформально, неравенства Чебышёва — Маркова — Стилтьеса дают точные оценки меры сверху и снизу в терминах ее первых моментов (точнее, первых ортогональных многочленов).

Пусть μ — такая мера на прямой, что $\int_{\mathbb{R}}|x|^{2n-1}\,d\mu(x)<+\infty$, и пусть p_k, $k=0,\dots,n$, — многочлены, ортогональные по мере μ, т. е. $\int_{\mathbb{R}}p_j(x)p_k(x)\,d\mu(x)=\delta_{jk}$, $0\leqslant j\leqslant n-1$, $0\leqslant k\leqslant n$. Обозначим через $x_1,\dots,x_n$, $x_1<x_2<\dots<x_n$, нули многочлена p_n и положим

$$\rho_{n-1}(x)=\left(\sum_{k=0}^{n-1}p_k^2(x)\right)^{-1}$$

(величина, обратная к ядру Кристоффеля — Дарбу). Тогда для $j=1,2,\dots,n$ справедливы неравенства

$$\mu\big((-\infty,x_j]\big)\leqslant\rho_{n-1}(x_1)+\dots+\rho_{n-1}(x_j)\leqslant\mu\big((-\infty,x_{j+1})\big)$$

(разумеется, для $j=n$ смысл имеет только левое неравенство).

Дальнейшие сведения о работах Маркова по проблеме моментов и о развитии идей П. Л. Чебышёва и А. А. Маркова можно найти в монографии [35].

Заключение

Мы затронули в этом кратком очерке лишь некоторые труды и результаты наших знаменитых предшественников XVIII–XIX вв. Посеянные ими семена дали обильные всходы в XX в. по всему миру, но прежде всего в Петербурге — Ленинграде, где их знания и традиции передавались через цепочку непосредственных контактов от учителей к ученикам. Перечислим здесь несколько имен, составивших славу кафедре математического анализа Петербургского — Ленинградского университета: С. Н. Бернштейн, Г. М. Мюнтц, В. И. Смирнов, Г. М. Фихтенгольц, И. П. Натансон, Г. М. Голузин, Г. Г. Лоренц, Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, С. М. Лозинский, Н. А. Лебедев, Г. П. Акилов, Д. А. Владимиров, Г. И. Натансон, М. З. Соломяк, Б. М. Макаров, В. П. Хавин, А. М. Вершик, Б. С. Павлов, С. А. Виноградов.

Литература

1. *Математический энциклопедический словарь.* Ю. В. Прохоров (ред.) Москва, Советская энциклопедия (1988).

2. *Saint Petersburg mathematicians and their theorems.* Kalinin Nikita (ed.) Доступно на: https://sites.google.com/view/spbmath (дата обращения: 14.04.2024).

3. *Электронный архив Л. Эйлера.* Доступно на: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/ (дата обращения: 14.04.2024).

4. *Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. Сборник статей.* Москва, Наука (1988).

5. Варадараджан В. С. Эйлер сквозь призму времени: новый взгляд на старые проблемы. В: *Регулярная и хаотическая динамика.* Москва; Ижевск (2008).

6. Пойа Д. *Математика и правдоподобные рассуждения.* Москва, Наука (1975).

7. Euler L. De summis serierum reciprocarum. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (1735).

8. Кохась К. П. Сумма обратных квадратов. *Математическое просвещение* **8**, 142–163 (2004).

9. Chapman R. *Evaluating* $\zeta(2)$. Доступно на: http://www.maths.ex.ac.uk/rjc/rjc.html (дата обращения: 14.03.2024).

10. Артин Е. *Введение в теорию гамма-функции.* Москва; Ленинград, Физматлит (1934).

11. Khrushchev S. Orthogonal Polynomials and Continued Fractions: From Euler's Point of View. In: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications Book 122.* Cambridge, Cambridge University Press (2008).

12. Остроградский М. В. *Полное собрание трудов.* В 3 т. Т. I. Киев, Изд-во АН УССР (1959).

13. Остроградский М. В. *Полное собрание трудов.* В 3 т. Т. III. Киев, Изд-во АН УССР (1961).

14. Katz V. J. The history of Stokes' theorem. *Mathematics Magazine* **52** (3), 146–156 (1979).

15. Katz V. J. Change of variables in multiple integrals: Euler to Cartan. *Mathematics Magazine* **55** (1), 3–11 (1982).

16. Bouniakowsky V. Sur quelques inégalites concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies. *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII série* **1**, 9 (1859).

17. *Научное наследие П. Л. Чебышёва. Математика.* Т. 1. Москва; Ленинград, Изд-во АН СССР (1945).

18. *Полное собрание сочинений П. Л. Чебышёва. Т. 1. Теория чисел.* Москва; Ленинград, Изд-во АН СССР (1944).

19. *Полное собрание сочинений П. Л. Чебышёва. Т. 2. Математический анализ.* Москва; Ленинград, Изд-во АН СССР (1947).

20. *Полное собрание сочинений П. Л. Чебышёва. Т. 3. Математический анализ.* Москва; Ленинград, Изд-во АН СССР (1948).

21. Сохоцкий Ю. В. *Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды.* Санкт-Петербург, Тип. М. Стасюлевича (1873).

22. Plemelj J. Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. *Monatshefte fuer Mathematik und Physik* **19** W, 211–246 (1908).

23. Calderón A. P. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **74** (4), 1324–1327 (1977).

24. Хавин В. П. Граничные свойства интегралов типа Коши и гармонически сопряженных функций в областях со спрямляемой границей. *Математический сб.* **68** (110); **4**, 499–517 (1965).

25. Марков А. А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева. *Известия Петербург. академии наук* **62**, 1–24 (1889).

26. Марков А. А. Об одном вопросе Д. И. Менделеева. *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля*, 51–75. Москва; Ленинград, Гос. изд-во техн.-теор. лит. (1948).

27. Марков В. А. *О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке.* Санкт-Петербург, Тип. Имп. АН (1892).

28. Даугавет И. К., Натансон Г. И. О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов. *Вестник Ленинградского университета* **19**, 18–24 (1974).

29. Дынькин Е. М., Подкорытов А. Н. Неравенство типа В. А. Маркова в L^p. *Записки научных семинаров ЛОМИ* **102** (4), 102–110 (1980).

30. Конягин С. В. О неравенстве В. А. Маркова для многочленов в метрике L. *Тр. МИАН СССР* **145**, 117–125 (1980).

31. Borwein P. B., Erdelyi T. Polynomials and Polynomial Inequalities. *Graduate Texts in Mathematics, vol. 161*, Heidelber, Springer-Verlag (2012).

32. Rahman Q. I., Schmeisser G. Analytic Theory of Polynomials. *London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 26.* Oxford, Oxford University Press (2002).

33. Марков А. А. О корнях некоторых уравнений I, II. В: *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля*, 34–50. Москва; Ленинград, Гос. изд-во техн.-теор. лит. (1948).

34. Марков А. А. О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием. В: *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля*, 146–230. Москва; Ленинград, Гос. изд-во техн.-теор. лит. (1948).

35. Крейн М. Г., Нудельман А. А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Идеи и проблемы П. Л. Чебышёва и А. А. Маркова и их дальнейшее развитие.* Москва, Наука (1973).

Статья поступила в редакцию 18 февраля 2024 г.;
доработана 2 мая 2024 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Баранов Антон Дмитриевич — д-р физ.-мат. наук, проф.;
https://orcid.org/0000-0002-2558-5071, anton.d.baranov@gmail.com
Лодкин Андрей Александрович — канд. физ.-мат. наук, ст. преп.;
https://orcid.org/0000-0001-7433-4159, alodkin@gmail.com
Подкорытов Анатолий Наумович — канд. физ.-мат. наук, ст. преп.;
https://orcid.org/0000-0002-0049-4966, a.podkorytov@gmail.com
Широков Николай Алексеевич — д-р физ.-мат. наук, проф.;
https://orcid.org/0000-0002-4388-3435, nikolai.shirokov@gmail.com

About the role of St. Petersburg in the formation of mathematical analysis

A. D. Baranov, A. A. Lodkin, A. N. Podkorytov, N. A. Shirokov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Baranov A. D., Lodkin A. A., Podkorytov A. N., Shirokov N. A. About the role of St. Petersburg in the formation of mathematical analysis. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 605–626.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.401 (In Russian)

The article discusses the main stages in the development of mathematical analysis in St. Petersburg in the 18th and 19th centuries. Brief biographical information and a description of the most important results of outstanding representatives of the St. Petersburg mathematical school — L. Euler, M. V. Ostrogradsky, V. Ya. Bunyakovsky, P. L. Chebyshev, Yu. V. Sokhotski, A. A. Markov — are presented.

Keywords: summation of series, integration, continued fractions, approximation theory, orthogonal polynomials.

References

1. *Mathematical encyclopedic dictionary.* Iu. V. Prokhorov (ed.) Moscow, Sovetskaia entsiklopediia Publ. (1988). (In Russian)

2. *Saint Petersburg mathematicians and their theorems.* Kalinin Nikita (ed.). Available at: https://sites.google.com/view/spbmath (accessed: April 14, 2024).

3. *Electronic archive of L. Euler.* Available at: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler/ (accessed: April 14, 2024). (In Russian)

4. *The development of Leonhard Euler's ideas and modern science. Collection of articles.* Moscow, Nauka Publ. (1988). (In Russian)

5. Varadarajan V. S. Euler Through Time: A New Look at Old Themes. *American Mathematical Society* (2006). [Rus. ed.: Varadaradzhan V. S. Eiler skvoz' prizmu vremeni: novyi vzgliad na starye problem. *Reguliarnaia i khaoticheskaia dinamika.* Moscow; Izhevsk (2008)].

6. Poia D. *Mathematics and plausible reasoning.* Moscow, Nauka Publ. (1975). (In Russian)

7. Euler L. De summis serierum reciprocarum. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* (1735).

8. Kokhas K. P. Sum of inverse squares. *Matematicheskoe prosveshchenie* **8**, 142–163 (2004). (In Russian)

9. Chapman R. *Evaluating* $\zeta(2)$. Available at: http://www.maths.ex.ac.uk/rjc/rjc.html (accessed: April 14, 2024).

10. Artin E. The Gamma Function. *Athena Series: Selected Topics in Mathematics*, New York; Toronto; London, Holt, Rinehart and Winston (1931) [Rus. ed.: Artin E. *Vvedenie v teoriiu gamma-funktsii.* Leningrad; Moscow, Fizmatlit Publ. (1934)].

11. Khrushchev S. Orthogonal Polynomials and Continued Fractions: From Euler's Point of View. In: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications Book 122.* Cambridge, Cambridge University Press (2008).

12. Ostrogradsky M. V. *Complete collection of works.* In 3 vols. Vol. I. Kiev, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR Publ. (1959). (In Russian)

13. Ostrogradsky M. V. *Complete collection of works.* In 3 vols. Vol. III. Kiev, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR Publ. (1961). (In Russian)

14. Katz V. J. The history of Stokes' theorem. *Mathematics Magazine* **52** (3), 146–156 (1979).

15. Katz V. J. Change of variables in multiple integrals: Euler to Cartan. *Mathematics Magazine* **55** (1), 3–11 (1982).

16. Bouniakowsky V. Sur quelques inégalites concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies. *Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VII série* **1**, 9 (1859).

17. Scientific heritage of P. L. Chebyshev. *Vol. 1. Mathematics.* Moscow; Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ. (1945). (In Russian)

18. Collected Works of P. L. Chebyshev. *Vol. 1. Number Theory.* Moscow; Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ. (1944). (In Russian)

19. Collected Works of P. L. Chebyshev. *Vol. 2. Mathematical Analysis.* Moscow; Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ. (1947). (In Russian)

20. Collected Works of P. L. Chebyshev. *Vol. 3. Mathematical Analysis.* Moscow; Leningrad, Academy of Sciences of the USSR Publ. (1948). (In Russian)

21. Sokhotski Yu. V. *On definite integrals and functions used in series expansions.* St. Petersburg, Stasyulevich's Publishing House (1873). (In Russian)

22. Plemelj J. Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe. *Monatshefte fuer Mathematik und Physik* **19**, 211–246 (1908).

23. Calderón A. P. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **74** (4), 1324–1327 (1977).

24. Havin V. P. Boundary properties of integrals of Cauchy type and of conjugate harmonic functions in regions with rectifiable boundary. *Matematicheskii sbornik* **68** (110); **4**, 499–517 (1965). (In Russian)

25. Markov A. A. About one question of D. I. Mendeleev. *Izv. St. Petersburg Acad. of Sciences* **62**, 1–24 (1889). (In Russian)

26. Markov A. A. On one question of D. I. Mendeleev. *Selected works on the theory of continuous fractions and the theory of of functions least deviating from zero*, 51–75. Moscow, Gostechizdat Publ. (1948). (In Russian)

27. Markov V. A. *On Functions of least deviation from zero in a given interval.* St. Petersburg, Publishing house of the Imperial Academy of Sciences (1892). (In Russian)

28. Daugavet I. K., Nathanson G. I. On some inequalities for algebraic polynomials. *Vestnik of Leningrad University* **19**, 18–24 (1974). (In Russian)

29. Dynkin E. M., Podkorytov A. N. A V. A. Markov type inequality inL^p. *Zapiski nauchn. semin. LOMI* **102** (4), 102–110 (1980). (In Russian) [Eng. transl.: *J. Soviet Math.* **22** (2) 1226–1231 (1983)].

30. Konyagin S. V. On V. A. Markov's inequality for polynomials in the metric *L. Proc. Steklov Inst. Math.* **145**, 117–125 (1980). (In Russian) [Eng. transl.: In: Approximation of functions by polynomials and splines. *Proc. Steklov Inst. Math.* **145**, 129–138 (1981)].

31. Borwein P. B., Erdelyi T. Polynomials and Polynomial Inequalities. *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 161. Heidelberg, Springer Verlag (2012).

32. Rahman Q. I., Schmeisser G. Analytic Theory of Polynomials. *London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 26.* Oxford, Oxford University Press (2002).

33. Markov A. A. On roots of some equations I, II. *Selected Works on the Theory of continuous fractions and the theory of functions least deviating from zero*, 34–50. Moscow, Gostechizdat Publ. (1948). (In Russian)

34. Markov A. A. On limit values of integrals in connection with interpolation. *Selected works on the theory of continuous fractions and the theory of functions least deviating from zero*, 146–230. Moscow, Gostechizdat Publ. (1948). (In Russian)

35. Kreĭn M. G., Nudelman A. A. *The problem of Markov moments and extremal problems. Ideas and problems of P. L. Chebyshev and A. A. Markov and their further development.* Moscow, Nauka Publ. (1973). (In Russian)

Received: February 18, 2024
Revised: May 2, 2024
Accepted: May 23, 2024

Authors' information:

Anton D. Baranov — https://orcid.org/0000-0002-2558-5071, anton.d.baranov@gmail.com
Andrei A. Lodkin — https://orcid.org/0000-0001-7433-4159, alodkin@gmail.com
Anatolii N. Podkorytov — https://orcid.org/0000-0002-0049-4966, a.podkorytov@gmail.com
Nikolai A. Shirokov — https://orcid.org/0000-0002-4388-3435, nikolai.shirokov@gmail.com