Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4
УДК 517.925.51:517.93:531.36
MSC 93C10, 34H15

Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 4*

А. А. Тихонов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Тихонов А. А.* Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 4 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 627–662. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.402

Работа является продолжением обзора, посвященного 300-летию Санкт-Петербургского государственного университета и представляющего собой попытку анализа научных достижений санкт-петербургской школы механики в области динамики твердого тела. Четвертая часть обзора посвящена исследованиям динамики неуправляемого движения заряженного твердого тела в гравитационном и магнитном полях Земли.

Ключевые слова: твердое тело, космический аппарат, искусственный спутник Земли, динамика, вращательное движение, колебания, резонанс, момент сил Лоренца.

1. Введение. В первой части обзора [1] были представлены некоторые результаты научных исследований, выполненных учеными СПбГУ в области динамики твердого дела в первые 250 лет истории университета. Рассмотрены не только качественные и количественные результаты анализа движения тел, но и методы исследования, позволившие получить эти результаты. Вторая часть обзора [2] посвящена 50-летнему периоду истории СПбГУ, завершившемуся в 2023 г. Основное внимание в ней уделяется общетеоретическим исследованиям, выполненным учеными СПбГУ и посвященным как неуправляемому, так и управляемому движениям твердого тела. В третьей части обзора [3] основное внимание уделено прикладным исследованиям, выполненным учеными СПбГУ в 1970-е годы и посвященным неуправляемому движению твердого тела относительно центра масс в гравитационном и магнитном полях Земли.

В данной, четвертой части обзора, а также в планируемой пятой части внимание будет уделено новой тематике, ставшей актуальной в связи с явно выраженной прикладной направленностью и вследствие этого быстро получившей известность в мировой науке. Речь идет о целом комплексе исследований, вызванных к жизни потребностями освоения околоземного космического пространства в условиях радиационной опасности и объединяющих вопросы классической механики, электро-

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-41-02031, https://rscf.ru/project/24-41-02031/.

Третью часть статьи см.: *Тихонов А. А.* Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 3 // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 3. С. 455–476. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.303

динамики, теории управления, нелинейных колебаний, устойчивости движения, а также математического и компьютерного моделирования в применении к задачам динамики искусственного спутника Земли (ИСЗ).

Проблема обеспечения радиационной безопасности космических полетов [4, 5] была осознана как вторая по важности (после невесомости) в 1970-е годы в связи с развитием космонавтики и общим интенсивным освоением космического пространства.

Возникла необходимость совершенствования существующих и разработки новых подходов к решению задач обеспечения радиационной защиты обитаемых отсеков и бортовой аппаратуры ИСЗ от вредного воздействия галактических космических лучей, излучений радиационных поясов Земли, хромосферных вспышек на Солнце и т. п. Одним из таких подходов является создание систем активной радиационной защиты, опирающейся на способность электростатического поля заряженных экранов, размещенных на ИСЗ, изменять направления движений заряженных частиц и отклонять их от поверхности ИСЗ [6, 7]. Как показали теоретические разработки и экспериментальные исследования на биоспутниках серии «Космос», эти системы выгодно отличаются от традиционно применяемых на Земле систем радиационной защиты пассивной формы, основанной на использовании поглощающих свойств материалов, своей легкостью, надежностью и эффективностью. Эксперименты, проведенные на биоспутнике «Космос-936», подтвердили возможность работы электростатической защиты (ЭСЗ) в режиме самозарядки за счет выпадения на поверхность ИСЗ заряженных частиц из плазмы околоземного пространства.

Однако при движении ИСЗ, снабженного экраном ЭСЗ, по околоземной орбите в результате взаимодействия электрического заряда экрана с магнитным полем Земли (МПЗ) возникают дополнительно действующие на ИСЗ силы — силы Лоренца, которые следует учитывать при решении многих важных динамических задач, и в том числе — задач ориентации и стабилизации ИСЗ. Таким образом возникла новая актуальная проблема, связанная с изучением электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил на вращательное движение ИСЗ в МПЗ. Исследованию этой проблемы посвящено немало публикаций ученых СПбГУ, начиная с 1981 г., когда появились первые статьи на эту тему Л. И. Кузнецова и его аспирантов [8–14].

2. Первые аналитические результаты (1981). В первых публикациях по динамике ИСЗ с заряженным экраном вводились многочисленные упрощающие предположения. В частности, во всех упомянутых выше работах [8–14] исследование проводится при следующих общих предположениях: орбита заряженного тела — кеплерова круговая; гравитационное поле Земли — ньютоновское центральное; МПЗ моделируется полем магнитного диполя, ось которого совпадает с осью суточного вращения Земли («прямой магнитный диполь»); моменты гравитационных и лоренцевых сил превосходят по величине все остальные возмущающие моменты; вращение ИСЗ вокруг его центра масс не влияет на движение самого центра масс. При сделанных предположениях магнитная индукция МПЗ является постоянной во всех точках круговой экваториальной орбиты ИСЗ.

В работе [9] рассмотрен случай совпадения центра заряженного сферического экрана ЭСЗ с центром масс ИСЗ. Проекции главного момента лоренцевых сил $\vec{M}_L$ на главные центральные оси инерции ИСЗ имеют вид (сохраняются обозначения, принятые в [3])

$$M_{Lx} = \sigma(\omega_y \beta_3 - \omega_z \beta_2), \quad M_{Ly} = \sigma(\omega_z \beta_1 - \omega_x \beta_3), \quad M_{Lz} = \sigma(\omega_x \beta_2 - \omega_y \beta_1), \qquad (1)$$

где σ — постоянный параметр, зависящий от заряда и радиуса экрана. Дифференциальные уравнения движения ИСЗ (1)–(3)

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} = \vec{M}_G + \vec{M}_L, \tag{2}$$

$$M_{Gx} = 3\omega_0^2(C-B)\gamma_2\gamma_3, \quad M_{Gy} = 3\omega_0^2(A-C)\gamma_1\gamma_3, \quad M_{Gz} = 3\omega_0^2(B-A)\gamma_1\gamma_2 \tag{3}$$

исследуются совместно с кинематическими уравнениями Пуассона:

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha}_1 + \omega_y\alpha_3 - \omega_z\alpha_2 = -\omega_0\gamma_1, \\ &\dot{\beta}_1 + \omega_y\beta_3 - \omega_z\beta_2 = 0, \qquad\qquad \binom{x\to y\to z}{1\to 2\to 3} \\ &\dot{\gamma}_1 + \omega_y\gamma_3 - \omega_z\gamma_2 = \omega_0\alpha_1. \end{aligned} \tag{4}$$

Получен первый интеграл дифференциальной системы (1)–(4):

$$\frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) - \omega_0(A\omega_x\beta_1 + B\omega_y\beta_2 + C\omega_z\beta_3) = h. \tag{5}$$

Показано, что в случае $A = B = C$ имеют место еще два интеграла: $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = \mathrm{const}$, $\omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2 + \omega_z\beta_3 = \mathrm{const}$, позволяющие установить, что вращательное движение заряженного ИСЗ представляет собой регулярную прецессию около нормали к плоскости орбиты.

Далее проведено исследование движения ИСЗ при неравных моментах инерции ($B > A > C$). Показано, что ИСЗ имеет стационарное движение, представляющее собой прямое положение равновесия в орбитальной системе координат (ОСК)

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1, \quad \omega_x = \omega_z = 0, \quad \omega_y = \omega_0, \tag{6}$$

а интеграл (5) позволяет сделать вывод об устойчивости этого положения равновесия. Исследованы малые колебания ИСЗ около положения равновесия (6). Показано, что в отличие от случая незаряженного экрана, когда собственные частоты колебаний ИСЗ удовлетворяли неравенствам $0 < k_1 < \omega_0$, $\omega_0 < k_2 < 2\omega_0$ [15], при больших значениях заряда экрана одна из собственных частот будет весьма большой, а другая — весьма малой.

В работе [12], в отличие от [9], рассмотрен экранированный ИСЗ, у которого центр заряженного сферического экрана ЭСЗ не совпадает с центром масс ИСЗ и в общем случае имеет координаты x_0, y_0, z_0 в системе координат $Cxyz$. При сохранении остальных предположений работы [9] показано, что прямое положение равновесия (6) возможно лишь при $x_0 = y_0 = 0$, а z_0 в этом случае произвольно. Получены достаточные условия устойчивости положения равновесия (6). Исследованы также малые колебания ИСЗ около положения равновесия (6).

Проанализирован случай динамически симметричного ИСЗ ($A = B$). Показано, что ось Cz динамической симметрии ИСЗ совершает гармонические колебания, однако не около местной вертикали, как в случае незаряженного экрана, а около прямой, расположенной в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты. На эти колебания накладывается собственное вращение ИСЗ. С целью анализа возможности обеспечения вращения экранированного ИСЗ около местной вертикали далее рассмотрен усложненный вариант задачи, предполагающий наличие на ИСЗ маховика, ось которого совпадает с осью Cy. Найдены условия на параметры системы, при которых положение равновесия (6) будет устойчивым. Также и для случая

$A = B$ найдены достаточные условия устойчивости совпадения оси Cz с местной вертикалью.

В работе [10], в отличие от [9] и [12], рассмотрено возмущающее воздействие лоренцева момента на положение относительного равновесия и пространственные колебания ИСЗ при частичном учете неоднородности МПЗ в объеме экрана (т. е. градиентности МПЗ) в предположении, что силовые линии МПЗ в этом объеме являются коллинеарными прямыми. Работа [11] посвящена исследованию резонансных колебаний гравитационно-ориентированного ИСЗ со сферическим заряженным экраном ЭСЗ на круговой орбите при частичном учете градиентности МПЗ, как и в [10].

Принципиально иная постановка задачи о влиянии лоренцева момента на вращательное движение экранированного ИСЗ предложена в [13, 14], где предполагалось, что кинетическая энергия вращательного движения ИСЗ существенно больше работы внешних возмущающих моментов. В такой постановке целью исследования является анализ эволюции медленно изменяющегося вектора $\vec{L}$ кинетического момента ИСЗ или, что то же, — его модуля L и углов ρ и σ, определяющих направление вектора $\vec{L}$ в кениговой системе координат $CXYZ$. Математической базой исследования являются дифференциальные уравнения (1), (2) из [3]. При сохранении тех же предположений относительно модели ИСЗ, его орбиты и геофизических полей, что и в предыдущих рассмотренных работах, главный момент сил Лоренца $\vec{M}_L$ вычисляется для случая, когда центр экрана ЭСЗ смещен на величину z_0 вдоль оси Cz относительно центра масс ИСЗ, а его проекции на оси $CXYZ$ записываются в виде

$$\begin{aligned} M_{LX} &= a\omega_0\beta_3\cos\nu + b\beta_3(L_Y\gamma_3 - L_Z\beta_3)/A - m(L_Z + (A-C)r\gamma_3)/A, \\ M_{LY} &= a\omega_0(\gamma_3\sin\nu - \alpha_3\cos\nu) + b\beta_3(L_Z\alpha_3 - L_X\gamma_3)/A, \\ M_{LZ} &= -a\omega_0\beta_3\sin\nu + b\beta_3(L_X\beta_3 - L_Y\alpha_3) + m(L_X + (A-C)r\alpha_3)/A, \end{aligned} \tag{7}$$

где a, b, m — параметры, пропорциональные заряду экрана, $\nu = \omega_0 t$ — аргумент широты. Поскольку $L/A \gg |\vec{M}|/L$, то ψ является быстрой переменной, и это позволяет усреднить уравнения (1), (2) из [3] по быстрой переменной ψ. Далее проводится анализ усредненных уравнений. В случае $A = B = C$ и $z_0 = 0$ точные значения проекций момента $\vec{M}_L$ совпадают с усредненными по ψ:

$$M_{LX} = -\frac{m}{A}L_Z = -\frac{m}{A}L\sin\rho\cos\sigma, \quad M_{LY} = 0, \quad M_{LZ} = \frac{m}{A}L_X = \frac{m}{A}L\sin\rho\sin\sigma,$$

а уравнения (1) из [3] принимают вид $\dot{L} = 0$, $\dot{\rho} = 0$, $\dot{\sigma} = -m/A$, откуда следует, что ИСЗ совершает регулярную прецессию.

В случае $A = B = C$ и $z_0 \neq 0$ после усреднения по ψ получены уравнения:

$$\dot{L} = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad d\rho/d\nu = M\sin\varkappa, \quad d\varkappa/d\nu = M\operatorname{ctg}\rho\cos\varkappa - N,$$

где $M = a{L_0}^{-1}\cos\theta_0$, $N = 1 + b/(2A\omega_0)\sin^2\theta_0 + m/(A\omega_0)$. Показано, что эти усредненные уравнения допускают первый интеграл $\Phi = M\sin\rho\cos\varkappa + N\cos\rho = \mathrm{const}$, позволяющий построить траектории апекса вектора $\vec{L}$ на единичной сфере в ОСК и выявить характерные особенности эволюции движения ИСЗ.

Рассмотрен также случай $A = B$, $z_0 = 0$. Показано, что в этом случае уравнения, описывающие поведение углов ρ и σ, качественно не отличаются от аналогичных уравнений, описывающих эволюцию вращательного движения ИСЗ под действием одного лишь гравитационного момента, а вектор $\vec{L}$ прецессирует относительно нормали к плоскости орбиты, причем движение вектора $\vec{L}$ по траектории неравномерно.

В случае $A = B$, $z_0 \neq 0$ на основании усредненных уравнений установлено, что по сравнению со случаем незаряженного экрана момент $\vec{M}_L$ смещает полюсы траекторий вектора $\vec{L}$ в направлении радиуса-вектора орбиты, причем эти полюсы располагаются несимметрично, а движение вектора $\vec{L}$ по траекториям происходит неравномерно.

Показано, что при произвольных моментах инерции ИСЗ и совпадении центра экрана с центром масс лоренцев момент не меняет качественной картины движения ИСЗ. Таким образом, движение ИСЗ вокруг вектора $\vec{L}$ представляет собой движение по Эйлеру — Пуансо, а сам вектор $\vec{L}$ остается постоянным по величине и совершает прецессионно-нутационное движение относительно нормали к плоскости орбиты.

3. Продолжение исследований для упрощенных постановок задач. После появления серии пионерских работ 1981 г., рассмотренных в предыдущем разделе, исследования, начатые в [8–12], были продолжены. При этом расширился и круг авторов — ученых СПбГУ, занявшихся новой актуальной тематикой. В данном разделе рассматриваются некоторые из их публикаций, объединенные общностью предположений, положенных в основу построения соответствующих математических моделей. Эти предположения, принятые в [8–12], перечислены в начале раздела 1. Кроме того, заряд ИСЗ предполагается постоянным. Строго говоря, если ИСЗ не содержит специальных систем, обеспечивающих постоянство электрического заряда на поверхности экрана ЭСЗ, то в процессе движения ИСЗ электрический заряд может существенно изменяться. Это обстоятельство исследовалось, в частности, в работе [16]. Отметим также, что влияние сил и моментов, обусловленных влиянием электрических полей (конвекции и коротации), считается пренебрежимо малым.

В работах [17, 18] исследуются резонансные колебания гравитационно-ориентированного ИСЗ со сферическим заряженным экраном ЭСЗ на круговой орбите при таком же частичном учете градиентности МПЗ, как и в [10].

В работе [19] рассматривается ИСЗ со сферическим заряженным экраном и системой трех гистерезисных стержней, расположенных параллельно главным центральным осям инерции ИСЗ. Гистерезисный характер зависимости $\vec{B}$ от $\vec{H}$ описывается моделью В. К. Аркадьева. Соответственно, в правые части динамических уравнений Эйлера добавляются осевые моменты (1). Показано, что в случае равных моментов инерции ИСЗ будет вращаться с постоянной угловой скоростью вокруг нормали к плоскости орбиты. Для произвольных моментов инерции ИСЗ доказано с помощью теоремы Барбашина — Красовского, что система гистерезисных стержней обеспечивает погашение колебаний ИСЗ, ортогональных плоскости орбиты. Однако колебания ИСЗ в плоскости орбиты с помощью рассматриваемого демпфера не могут быть погашены.

В работе [20] рассматривается вращательное движение трехосно ориентированного ИСЗ со сферическим заряженным экраном ЭСЗ в условиях резонанса. Используются выражения для проекций лоренцева момента, полученные в [11], при частичном учете неоднородности МПЗ в объеме экрана. Решение уравнений движения, записанных в «самолетных» углах ориентации φ, ψ, θ, ищется методом вариации произвольных постоянных с последующим применением асимптотического метода усреднения. Как и в работе [21], выбирается расширенное порождающее решение, состоящее из суммы невозмущенного решения (при $\vec{M}_L = 0$) и частного решения, соответствующего нулевым значениям φ, ψ, θ и $\dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ в возмущающем моменте $\vec{M}_L$. Невозмущенное движение предполагается гравитационно стабилизированным. Обнаружена возможность существования трех комбинационных резонансов собственных частот ИСЗ. Нерезонансная ситуация, а также два из трех резонансов исследованы в [11, 17]. В работе [20] исследованы колебания ИСЗ в условиях третьего резонанса. Проанализировано влияние смещения центра защитной сферы относительно центра масс ИСЗ на ограниченность асимптотического представления движения. Показано, что смещение центра экрана вдоль оси Cz позволяет устранить неустойчивость резонансных колебаний.

Исследованию условий существования и устойчивости регулярных прецессий заряженного тела в геомагнитном поле посвящена работа [22]. В ней рассматривается вращательное движение динамически симметричного с осью Cz ($A = B$) ИСЗ, имеющего сферический экран ЭСЗ и находящегося на круговой экваториальной орбите. Предполагается, что центр экрана совпадает с центром масс ИСЗ. МПЗ моделируется полем прямого магнитного диполя. Динамические уравнения Эйлера (1)–(3) рассматриваются совместно с кинематическими уравнениями Пуассона (4). Ищутся регулярные прецессии ИСЗ, т. е. такие его движения, которым соответствуют положения равновесия оси Cz в ОСК. Пусть $\vec{\omega}' = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ — угловая скорость ИСЗ относительно ОСК. Тогда $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}'$ и регулярные прецессии можно описать с помощью направляющих косинусов $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ и угловой скорости r, так как $p = q = 0$.

Показано, что возможны три типа регулярных прецессий, полученные ранее в [23] и получившие следущие названия:

1) гиперболоидальная	$\alpha_3^0 \neq 0,$	$\beta_3^0 \neq 0,$	$\gamma_3^0 = 0,$
2) коническая	$\alpha_3^0 = 0,$	$\beta_3^0 \neq 0,$	$\gamma_3^0 \neq 0,$
3) цилиндрическая	$\alpha_3^0 = 0,$	$\beta_3^0 = 1,$	$\gamma_3^0 = 0.$

Кроме интеграла (5), при $A = B$ существует также интеграл $C\omega_z + \sigma\beta_3 = \text{const}$. Для исследования устойчивости регулярных прецессий 1-го типа вводятся малые возмущения $p, q, \bar{r} = r - r^0, \gamma_3, \bar{\beta} = \beta_3 - \beta_3^0$, относительно которых строится квадратичная форма с помощью первых интегралов и кинематического соотношения $\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1$. Показано, что регулярные прецессии 1-го типа устойчивы при $C > A$.

Аналогичным образом установлены условия существования и устойчивости регулярных прецессий 2-го и 3-го типов для ИСЗ с защитным экраном в форме сферы. Найдены также необходимые условия устойчивости по линейному приближению. На плоскости параметров системы построены области устойчивости и области выполнения необходимых условий устойчивости по линейному приближению. Показано, что для достаточно малых значений C/A цилиндрическая прецессия всегда неустойчива. Однако, начиная с некоторого значения σ, область устойчивости по первому приближению существует и для малых значений C/A, вплоть до нуля. Отсюда сделан вывод о том, что защитный экран может способствовать стабилизации некоторых режимов регулярной прецессии ИСЗ.

4. Два направления развития исследований, новые интегрируемые случаи, стационарные движения и их устойчивость. Задача изучения динамики вращательного движения заряженного твердого тела в геомагнитном поле является трудной для аналитического исследования, и поэтому первые попытки ее решения, предпринятые в 1970-е годы [24–26], естественно, опирались на использование частных предположений и упрощенных математических моделей. Однако и в дальнейших исследованиях, продолжавшихся в 1980-е годы и направленных на получение достаточно тонких математических результатов, по-прежнему использовались многие упрощающие предположения, например такие как предположение о сферичности экрана ЭСЗ, и вследствие этого — о равномерности распределения заряда по его поверхности, предположение о совпадении центра экрана с центром масс тела, о неподвижности МПЗ в инерциальном пространстве, об однородности МПЗ в объеме тела, о дипольном характере МПЗ.

Это приводило к достаточно сильному и не всегда обоснованному загрублению задачи на этапе ее постановки, что значительно снижало, как было установлено в дальнейшем, практическую ценность получаемых математических результатов. Поэтому продолжение аналитических исследований динамики заряженного тела в суперпозиции гравитационного и магнитного полей Земли стало проводиться по двум взаимосвязанным направлениям:

1) последовательный отказ от использования принимавшихся ранее частных предположений (например, относительно формы экрана, расположения экрана, наклонения орбиты, эксцентриситета орбиты) и тем самым обобщение постановки задачи;

2) уточнение модели МПЗ и тем самым уточнение математической модели задачи.

Например, в [8–14, 19] рассматривался ИСЗ с экраном ЭСЗ в виде равномерно заряженной сферы. Это частное предположение относительно формы экрана позволяло существенно упростить математическую модель задачи.

В работах [27–29] впервые изучалась динамика ИСЗ с экраном ЭСЗ в виде цилиндрической оболочки длины $2a$ и диаметра $2b$, обеспечивающим более эффективную защиту от радиации, чем экран в виде сферы [6]. В [27] рассмотрен случай, когда орбита ИСЗ — круговая экваториальная радиуса R, тензор инерции — сферический (задача с произвольным трехосным эллипсоидом инерции рассматривается в [30]), а МПЗ однородно в объеме ИСЗ. В случае, когда центр экрана совпадает с центром масс ИСЗ, динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\dot{\omega}_x = D(a^2\omega_y\beta_3 - b^2\omega_z\beta_2), \quad \dot{\omega}_y = D(b^2\omega_z\beta_1 - a^2\omega_x\beta_3), \quad \dot{\omega}_z = Db^2(\omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1), \tag{8}$$

где $D = mQ/(4R^3A)$, Q — заряд экрана, m — дипольный магнитный момент МПЗ, β_1, β_2, β_3 — косинусы углов между нормалью к плоскости орбиты и осями x, y, z. Уравнения (4), (8) допускают три первых интеграла

$$\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = h_1,\ \omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2 + \omega_z\beta_3 + D(b^2 - a^2)\beta_3^2/2 = h_2,\ \omega_z + Db^2\beta_3 = h_3 \tag{9}$$

и геометрическое соотношение $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$, позволяющие свести решение задачи к квадратурам. В результате выявлен и полностью исследован новый интегрируемый классический случай в динамике сферического движения твердого тела. По сравнению со случаем Лагранжа он является более сложным, поскольку полином относительно переменной $u = \cos\theta$, находящийся под знаком радикала в подынтегральной функции, имеет не 3-ю, а 4-ю степень. Соответственно, геометрическая интерпретация движения оси экрана, приведенная в [27], отличается более богатым набором вариантов возможных траекторий по сравнению со случаем Лагранжа.

В частности, из полученных интегралов следует, что при $a = b$ ось электростатической симметрии ИСЗ (ось симметрии экрана) совершает регулярную прецессию вокруг нормали к плоскости орбиты $C\eta$ с постоянным углом $\arccos(h_3/(h_2 + da_3))$ и угловой скоростью h_2. Аналогичный результат получен в [9], где рассматривается ИСЗ с заряженным экраном в виде сферы, а уравнения движения отличаются от уравнений (8) при $a = b$ лишь обозначениями. Показано, что при выполнении определенных условий возможно появление устойчивых положений равновесия оси электростатической симметрии ИСЗ.

Уточнение уравнений (8) путем учета вращения МПЗ с угловой скоростью ω_E суточного вращения Земли и соответствующее обобщение задачи, рассмотренной в [27], дано в [31]. Динамические уравнения Эйлера записаны в виде

$$\begin{aligned} &\dot{\omega}_x = d[a_3\omega_y\beta_3 - a_1\omega_z\beta_2 - \omega_E(a_3 - a_1)\beta_2\beta_3], \\ &\dot{\omega}_y = d[a_1\omega_z\beta_1 - a_3\omega_x\beta_3 + \omega_E(a_3 - a_1)\beta_1\beta_3], \quad \dot{\omega}_z = da_1(\omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1), \end{aligned} \tag{10}$$

где $d = m/(R^3A)$, $a_1 = Qb^2/4$, $a_3 = Qa^2/4$. Получены три первых интеграла дифференциальной системы (4), (10): $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 + d\omega_E(a_1 - a_3)\beta_3^2 = h_1$, $\omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2 + \omega_z\beta_3 + d(a_1 - a_3)\beta_3^2/2 = h_2$, $\omega_z + da_1\beta_3 = h_3$. Совместно с геометрическим соотношением $\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1$ они позволяют свести решение задачи к квадратурам и выполнить полный качественный анализ движения ИСЗ аналогично тому, как это было сделано в [27]. Показано, что учет угловой скорости суточного вращения Земли как уточняющего постановку задачи фактора может приводить не только к количественным, но и к качественным изменениям в характере движения ИСЗ.

Следует заметить, что в работах [8–14, 19] анализ динамики вращательного движения ИСЗ с заряженным экраном в рамках модели «прямого магнитного диполя» МПЗ проводился в предположении неподвижности МПЗ в инерциальном пространстве. В действительности МПЗ совершает суточное вращение вместе с Землей. Предположение о неподвижности МПЗ, как отмечается в [32], допустимо лишь в случаях невысоких орбит, для которых величина угловой скорости суточного вращения Земли намного меньше угловой скорости движения ИСЗ по орбите. Более поздние исследования подтвердили истинность этого утверждения.

Интегрируемая задача, рассмотренная в [27, 31], получила дальнейшее развитие в работе [33], где исследована динамика вращательного движения гиростата — ИСЗ с маховиком, обладающего собственным магнитным моментом и электростатическим зарядом Q, движущегося по круговой кеплеровой околоземной орбите в дипольном магнитном поле с магнитным моментом $\vec{m} = m\vec{m}_0$. Орбита гиростата лежит в плоскости геомагнитного экватора. Предполагается, что эллипсоид инерции гиростата является сферой ($A = B = C$), центр заряда совпадает с центром масс гиростата, распределение заряда обладает осевой симметрией с осью Cz ($a_1 = a_2$). Случай $a_1 = a_2$ охватывает широкий класс геометрических форм экранов ЭСЗ, среди которых важная для практики цилиндрическая форма. Собственный магнитный момент гиростата представлен в виде суммы двух составляющих: постоянной (в системе $Cxyz$) составляющей $\vec{I}_0$, направленной вдоль оси Cz, и составляющей наведенного магнитного момента $\vec{I}_H$, обусловленного намагничиванием гиростата в МПЗ. В предположении, что гиростат намагничивается в МПЗ в основном вдоль своей оси симметрии Cz, выражение для $\vec{I}_H$ записывается в виде $\vec{I}_H = E(\vec{B}\vec{k})\vec{k}$, где $E = \mathrm{const}$. Предполагается также, что гиростат содержит маховик, вращающийся вокруг оси

Cz и обладающий осевым моментом инерции J. Поэтому наряду с лоренцевым $\vec{M}_L$ и магнитным $\vec{M}_M$ моментами учитывается также гироскопический момент $\vec{M}_G$, обусловленный наличием маховика и имеющий вид $\vec{M}_G = -J\Omega\omega_y\vec{i} + J\Omega\omega_x\vec{j}$, где Ω — проекция на ось симметрии Cz абсолютной угловой скорости маховика. С учетом обозначений $d = m/(R^3A)$, $I_z = I_0 + I_{Hz}$, $e = AEd^2$, $g = J\Omega/A$, динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$
\begin{aligned}
\dot\omega_x &= d[a_3\omega_y\beta_3 - a_1\omega_z\beta_2 - \omega_E(a_3-a_1)\beta_2\beta_3] - dI_z\beta_2 - e\beta_2\beta_3 - g\omega_y,\\
\dot\omega_y &= d[a_1\omega_z\beta_1 - a_3\omega_x\beta_3 + \omega_E(a_3-a_1)\beta_1\beta_3] + dI_z\beta_1 + e\beta_1\beta_3 + g\omega_x,\\
\dot\omega_z &= da_1(\omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Совместно с кинематическими уравнениями (4) они допускают три нетривиальных первых интеграла $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 - [d\omega_E(a_3 - a_1) + e]\beta_3^2 - 2dI_z\beta_3 = h_1$, $\omega_x\beta_1 + \omega_y\beta_2 + \omega_z\beta_3 + d(a_1 - a_3)\beta_3^2/2 + g\beta_3 = h_2$, $\omega_z + da_1\beta_3 = h_3$. Показано, что имеет место перманентное вращение гиростата, при котором ось симметрии Cz перпендикулярна к плоскости орбиты ($\beta_3 = \pm 1$). С помощью первых интегралов на основании теоремы Ляпунова показано, что положение $\beta_3 = \pm 1$ оси Cz устойчиво при выполнении условий $d(a_1 - a_3)(\omega_0 - \omega_E) + e \pm (dI_z + \omega_0 g) > 0$, $\pm(dI_z + \omega_0 g) > 0$. Далее осуществлен переход к углам Эйлера и выполнено полное аналитическое исследование движения оси симметрии гиростата в квадратурах. Дана геометрическая интерпретация движения гиростата. Рассмотрены также некоторые предельные частные случаи. Фактически в [33] представлен новый интегрируемый случай в динамике гиростата.

Уточнение математической модели задачи о вращательном движении заряженного ИСЗ в МПЗ потребовало решения вопроса о том, насколько существенным является учет градиентности (т. е. неоднородности) МПЗ в объеме заряженного экрана при нахождении лоренцева момента. Такой вопрос является вполне естественным, поскольку выражение для гравитационного момента (3) найдено с учетом первых членов от неоднородности гравитационного поля в объеме ИСЗ.

В [28] динамика вращательного движения экранированного ИСЗ исследовалась с учетом градиентности МПЗ. Динамические уравнения Эйлера записаны в виде

$$
\begin{aligned}
\dot\omega_x &= d\big[[a_3\omega_y\beta_3 - a_1\omega_z\beta_2 + (a_3-a_1)[-(3\mu_2(\omega_0-\omega_E)+\omega_E)\beta_2\beta_3 + 3\mu_1(\omega_0-\omega_E)]\gamma_2\gamma_3]\big],\\
\dot\omega_y &= d\big[[a_1\omega_z\beta_1 - a_3\omega_x\beta_3 + (a_3-a_1)[(3\mu_2(\omega_0-\omega_E)+\omega_E)\beta_1\beta_3 - 3\mu_1(\omega_0-\omega_E)]\gamma_1\gamma_3]\big],\\
\dot\omega_z &= da_1(\omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Для удобства анализа маркировочный множитель $\mu_1 = 1$ отмечает слагаемые, обусловленные частичной неоднородностью МПЗ в объеме заряженного экрана, ограниченной предположением, что силовые линии МПЗ являются коллинеарными прямыми, а маркировочный множитель $\mu_2 = 1$ отмечает слагаемые, обусловленные частичной неоднородностью МПЗ, вызванной кривизной силовых линий МПЗ в объеме заряженного экрана. Показано, что использованное ранее в некоторых публикациях предположение о прямолинейности силовых линий МПЗ в объеме ИСЗ нельзя назвать оправданным, поскольку при вычислении лоренцева момента оно приводит к потере членов того же порядка, какой имеют и удерживаемые члены.

Установлено, что пренебрежение эффектом градиентности МПЗ приводит к потере двух возможных обособленных положений относительного равновесия оси электростатической симметрии ИСЗ в плоскости орбиты. Показано, что в условиях центрованного распределения заряда корректный учет градиентности МПЗ ($\mu_1 = \mu_2 = 1$) приводит к результатам, значительно отличающимся от тех, которые получены путем того или иного «частичного» учета градиентности МПЗ.

В работах [34–37] и др. показано, что учет градиентности МПЗ может приводить как к количественным, так и к качественным изменениям в характере движения ИСЗ, например в изменении или появлении новых положений относительного равновесия, в изменении характера их устойчивости, в изменении частот колебаний ИСЗ, в появлении случаев нарастающих резонансных колебаний ИСЗ. Установлено, что влияние этого уточняющего постановку задачи фактора на динамику ИСЗ особенно значительно при совпадении центра заряженного экрана с центром масс ИСЗ, поскольку в этом случае составляющие момента $\vec{M}_L$, обусловленные градиентностью МПЗ, являются величинами того же порядка, что и основная составляющая $\vec{M}_L$.

Что касается обобщения постановки задачи о вращательном движении заряженного ИСЗ в МПЗ по линии учета асимметрии распределения заряда, то для цилиндрического экрана ЭСЗ оно было начато в [27], продолжено в [29, 38], а затем для экранов произвольных форм — в [34–36] и во многих других последующих публикациях, как только выяснилась важность этого фактора для динамики ИСЗ.

В [27] рассмотрена ситуация, в которой центр заряженного цилиндра не совпадает с центром масс ИСЗ, а смещен на расстояние ρ. С учетом обозначения $D = Qd/4$ динамические уравнения Эйлера в этом случае имеют вид

$$\begin{gathered}\dot{\omega}_x = D[(a^2 + 2\rho^2)\omega_y\beta_3 - b^2\omega_z\beta_2 - 2\omega_0\rho R\gamma_2],\\ \dot{\omega}_y = D[b^2\omega_z\beta_1 - (a^2 + 2\rho^2)\omega_x\beta_3 + 2\omega_0\rho R\gamma_1], \quad \dot{\omega}_z = Db^2(\omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1),\end{gathered} \tag{13}$$

и в частном случае $\rho = 0$, естественно, совпадают с уравнениями (8). Показано, что уравнения (13) допускают два первых интеграла. С их помощью установлено, что при выполнении условия $a^2 + 2\rho^2 - b^2 > 0$ ИСЗ с заряженным экраном может оставаться в состоянии покоя в ОСК (устойчивое положение равновесия), если ось симметрии цилиндра будет совпадать с местной вертикалью.

При несовпадении центра экрана с центром масс ИСЗ в [38] найдены положения равновесия оси экрана в ОСК и исследована их устойчивость, а также проанализированы малые колебания оси в окрестности положений относительного равновесия.

В [39] исследуются регулярные прецессии конического типа для ИСЗ с экраном ЭСЗ в форме прямого кругового цилиндра, движущегося по круговой экваториальной орбите. В остальном постановка задачи совпадает с той, которая была принята в [22]. В случае совпадения центра цилиндра с центром масс ИСЗ динамические уравнения Эйлера совпадают с (8). Тогда имеют место первые интегралы (9), позволяющие построить функцию Ляпунова в виде квадратичной формы. Из условия положительной определенности этой функции получено достаточное условие устойчивости конической прецессии ИСЗ в виде $C < A$. Исследовано также линейное приближение, позволившее получить необходимые условия устойчивости конической прецессии.

При несовпадении центра заряженного цилиндрического экрана с центром масс ИСЗ дифференциальные уравнения вращательного движения ИСЗ строятся по схеме Эйлера — Пуассона, где проекции лоренцева момента, деленные на момент инерции A, совпадают с правыми частями формул (13). Показано, что эти уравнения допускают два первых интеграла. С помощью первых интегралов построена фукция

Ляпунова, представляющая собой квадратичную форму относительно отклонений от решения, соответствующего конической прецессии. Из условий положительной определенности квадратичной формы найдены достаточные условия устойчивости конической прецессии ИСЗ. Установлено, что эти условия существенным образом зависят от величины и направления (от Земли или к Земле) смещения центра заряда относительно центра масс ИСЗ. В частности, при надлежащем выборе электростатических параметров ИСЗ коническая прецессия может стать устойчивой для ИСЗ с любой формой эллипсоида инерции. По уравнениям первого приближения получены также и необходимые условия устойчивости.

5. Тензорная модель распределения заряда. Существенным шагом в направлении обобщения постановки задачи о движении ИСЗ с заряженным экраном в МПЗ стала предложенная в [40] тензорная модель распределения заряда по поверхности экрана в случае проводящего экрана или по объему экрана в случае диэлектрического экрана. Благодаря предложенному подходу появилась возможность описывать электростатические свойства ИСЗ в общем виде, не конкретизируя форму заряженного экрана, а оперируя понятиями центра заряда, главных осей заряда и интегральных характеристик распределения заряда, напоминающих главные центральные моменты инерции тела A, B, C в главных центральных осях инерции $Cxyz$, иногда обозначаемых так же, как $Cx_1x_2x_3$.

Электростатические свойства тела определяются плотностью σ распределения заряда по объему V тела и суммарным зарядом $Q = \int\limits_V \sigma dV$ и характеризуются тензором заряда $\Sigma = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$ в главных центральных осях заряда $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ с ортами $\vec{i}_1{}^0, \vec{i}_2{}^0, \vec{i}_3{}^0$. Начало системы $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ взято в центре заряда, определяемом следующим радиус-вектором относительно центра масс тела:

$$\overrightarrow{CO} = \vec{\rho}_0 = x_{10}\vec{i}_1 + x_{20}\vec{i}_2 + x_{30}\vec{i}_3 = Q^{-1}\int\limits_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\vec{\rho}\,(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\, dV. \qquad (14)$$

Здесь $\vec{\rho}$ — радиус-вектор элемента dV относительно центра масс тела, интегрирование производится по объему, в котором распределен заряд. Если заряд тела распределен по некоторой его поверхности, то интегрирование производится по этой поверхности, а σ является поверхностной плотностью распределения заряда. В силу указанного выбора системы координат $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ на основании (14) имеют место равенства $\int\limits_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0)\vec{\rho}^{\,0} dV = 0$, где $\vec{\rho}^{\,0} = x_1^0\vec{i}_1{}^0 + x_2^0\vec{i}_2{}^0 + x_3^0\vec{i}_3{}^0$, а также $\int\limits_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0)x_1^0x_2^0\, dV = \int\limits_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0)x_2^0x_3^0\, dV = \int\limits_V \sigma(x_1^0, x_2^0, x_3^0)x_3^0x_1^0\, dV = 0$. Элементы тензора Σ определяются равенствами $a_1 = \int\limits_V \sigma {x_1^0}^2 dV$, $a_2 = \int\limits_V \sigma {x_2^0}^2 dV$, $a_3 = \int\limits_V \sigma {x_3^0}^2 dV$. В частности, для экрана сферической формы радиуса r имеют место равенства $\sigma = Q/(4\pi r^2)$, $a_1 = a_2 = a_3 = Qr^2/3$. А для экрана в форме прямой круговой цилиндрической оболочки длины $2a$ и диаметра $2b$, ось которого совпадает с осью z^0, следующие формулы: $\sigma(z^0) = \dfrac{Q}{4\pi^2 b\sqrt{a^2 - z^{02}}}$, $a_1 = a_2 = \dfrac{Qb^2}{4}$, $a_3 = \dfrac{Qa^2}{4}$.

В общем случае центр заряда O не совпадает с центром масс C, а эллипсоид заряда является произвольным трехосным.

Удобной для использования является система координат $Oq_1q_2q_3$, оси которой Oq_1, Oq_2 и Oq_3 параллельны осям Cx_1, Cx_2 и Cx_3 соответственно. Ориентация осей

$Ox_1^0x_2^0x_3^0$ относительно осей $Oq_1q_2q_3$ определяется матрицей направляющих косинусов $\mathbf{A}^0$ так, что $(q_1q_2q_3)^\top = \mathbf{A}^0(x_1^0x_2^0x_3^0)^\top$.

Вводятся также статические моменты заряда первого, второго и третьего порядков в системах координат $Cx_1x_2x_3$ и $Oq_1q_2q_3$ — соответственно тензорные величины $\overset{(1)}{\mathbb{P}}$, $\overset{(2)}{\mathbb{P}}$, $\overset{(3)}{\mathbb{P}}$ и $\overset{(1)}{\mathbb{Q}}$, $\overset{(2)}{\mathbb{Q}}$, $\overset{(3)}{\mathbb{Q}}$ с элементами $\overset{(1)}{P}_i = \int\limits_V \sigma x_i\, dV$, $\overset{(2)}{P}_{ij} = \int\limits_V \sigma x_i x_j\, dV$, $\overset{(3)}{P}_{ijk} = \int\limits_V \sigma x_i x_j x_k\, dV$, $\overset{(1)}{Q}_i = \int\limits_V \sigma q_i\, dV$, $\overset{(2)}{Q}_{ij} = \int\limits_V \sigma q_i q_j\, dV$, $\overset{(3)}{Q}_{ijk} = \int\limits_V \sigma q_i q_j q_k\, dV$, $i, j, k = 1, 2, 3$.

В силу выбора системы координат $Oq_1q_2q_3$ имеет место равенство $\overset{(1)}{\mathbb{Q}} = 0$. Кроме того, $\overset{(1)}{\mathbb{P}} = Q\vec{\rho}_0$, а между тензорами $\overset{(2)}{\mathbb{Q}}$ и Σ существует зависимость $\overset{(2)}{\mathbb{Q}} = \mathbf{A}^0\Sigma\mathbf{A}^{0^\top}$.

Из равенств $q_i = x_i - x_i^0$ $(i = 1, 2, 3)$, связывающих между собой координаты одной и той же точки в системах координат $Cx_1x_2x_3$ и $Oq_1q_2q_3$, следуют выражения

$$\overset{(2)}{\mathbb{P}} = Q^{-1}\overset{(1)}{\mathbb{P}} \otimes \overset{(1)}{\mathbb{P}} + \overset{(2)}{\mathbb{Q}}, \quad \overset{(3)}{\mathbb{P}} = Q^{-2}\overset{(1)}{\mathbb{P}} \otimes \overset{(1)}{\mathbb{P}} \otimes \overset{(1)}{\mathbb{P}} + Q^{-1}\overset{(3)}{\Delta} + \overset{(3)}{\mathbb{Q}}.$$

Здесь $\overset{(3)}{\Delta}$ — тензор 3-го ранга с элементами $\overset{(3)}{\Delta}_{ijk} = \overset{(1)}{P}_i \overset{(2)}{Q}_{jk} + \overset{(1)}{P}_j \overset{(2)}{Q}_{ki} + \overset{(1)}{P}_k \overset{(2)}{Q}_{ij}$, знак $\otimes$ обозначает внешнее (тензорное) произведение.

Следует заметить, что понятие эллипсоида заряда с центром в центре масс тела ранее было применено в [26]. Предложенный в [40] подход к описанию электростатических свойств заряженного тела, отличающийся введением в рассмотрение понятия центра заряда O, систем координат $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ и $Oq_1q_2q_3$, матрицы $\mathbf{A}^0$, тензорных величин $\overset{(i)}{\mathbb{P}}$, $\overset{(i)}{\mathbb{Q}}$ $(i = 1, 2, 3)$ и построения эллипсоида заряда для центра заряда, оказывается более удобным и позволяет конкретизировать структуру параметров $\overset{(2)}{P}_{ij}$ путем разделения их на два слагаемых, первое из которых характеризует расположение эллипсоида заряда относительно центра масс тела, а второе — ориентацию эллипсоида заряда относительно главных центральных осей инерции тела.

6. Асимметрия распределения заряда и стабилизирующее влияние лоренцева момента. С общих позиций, изложенных в предыдущем разделе, в работе [40] изучался вопрос о влиянии асимметрии распределения заряда на динамику ИСЗ, центр масс которого движется по круговой экваториальной орбите в дипольном геомагнитном поле, а эллипсоид инерции является произвольным трехосным. Результат исследования позволил сделать практически важный вывод о возможности использования лоренцева момента $\vec{M}_L$ для пассивной угловой стабилизации ИСЗ с заряженным экраном произвольной формы в ОСК. Как обобщение понятия прямого положения равновесия ИСЗ в ОСК [15], соответствующего коллинеарности осей xyz и $\xi\eta\zeta$, в [40] введено понятие главного прямого положения равновесия (ГППР) ИСЗ в ОСК. В этом положении оси $x_1^0x_2^0x_3^0$ коллинеарны осям $\xi\eta\zeta$, а оси xyz совпадают с осями $\xi\eta\zeta$. Исследование выполнено с учетом неоднородности МПЗ в объеме заряженного экрана. Доказано, что ГППР реализуется лишь при выполнении условий $x_0 = y_0 = 0$.

Отдельно рассмотрен случай $A = B = C$, когда гравитационный момент отсутствует и воздействие лоренцева момента, в том числе и его стабилизирующее влияние, проявляется особенно наглядно. Поскольку при $A = B = C$ положение осей xyz не определено, то без ограничения общности можно считать, что оси xyz коллинеарны осям $Ox_1^0x_2^0x_3^0$, откуда $\mathbf{A}^0$ — единичная матрица и $\overset{(2)}{\mathbb{Q}} = \Sigma = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$.

С помощью полученного первого интеграла уравнений движения получены достаточные условия устойчивости ГППР. Установлено, что под действием одних лишь лоренцевых сил ИСЗ с заряженным экраном имеет устойчивое ГППР, если распределение заряда по объему (или поверхности) экрана удовлетворяет неравенствам $(1-3\mu_2)(a_1-a_2)>0$, $\quad(1-3\mu_2)(a_3-a_2+Qz_0^2)>0$, а центр заряда смещен относительно центра масс ИСЗ вдоль оси z^0 на величину z_0, удовлетворяющую условиям

$$|z_0|>3\mu_1 R^{-1}\max\left\{|(a_1-a_3)/Q|,|(a_2-a_3)/Q|\right\},\quad Qz_0>0.$$

Полученные неравенства существенным образом зависят от способа учета градиентности МПЗ. В частном случае, когда $z_0=0$, условия устойчивости ГППР при корректном учете градиентности МПЗ ($\mu_1=\mu_2=1$) сводятся к неравенствам $a_2>a_1>a_3$, напоминающим неравенства $B>A>C$ [15].

Аналогичным образом установлено, что при неравных значениях A, B, C и $\mu_1=\mu_2=1$ ГППР является заведомо устойчивым, если распределение заряда таково, что $a_2>\max\left\{a_1+k_0(1-\delta)/2; a_3+Qz_0^2+k_0(\varepsilon-\delta)/2\right\}$, а центр заряда смещен относительно центра масс ИСЗ вдоль оси z^0 на величину z_0, удовлетворяющую условиям

$$|z_0|>3R^{-1}\max\left\{|(a_1-a_3-k_0(\varepsilon-1))/Q|,\left|(a_2-a_3-Qz_0^2-k_0(\varepsilon-\delta))/Q\right|\right\},\ Qz_0>0,$$

где $k_0=\omega_0^2AR^3m^{-1}(\omega_0-\omega_E)^{-1}$, $\delta=B/A$, $\varepsilon=C/A$.

Практическое значение полученных результатов подкреплено численными оценками. Показано, что $|\vec{M}_L|$ может быть достаточно большим при реально осуществимых значениях параметров заряженного экрана и может значительно превосходить по величине возмущающие моменты, действующие на ИСЗ. Рассмотрены малые колебания ИСЗ в окрестности устойчивого ГППР. Показано, что при наличии диссипативного момента устойчивое ГППР становится асимптотически устойчивым, что и подтверждает возможность пассивной стабилизации углового положения ИСЗ.

Для компьютерного моделирования в [41] построена математическая модель задачи о вращательном движении заряженного твердого тела с учетом вышеупомянутых факторов, уточняющих и обобщающих постановку задачи. В качестве кинематических уравнений в ней используется система четырех дифференциальных уравнений относительно компонент кватерниона вместо системы девяти уравнений Пуассона (4).

7. Малые колебания заряженного тела в геомагнитном поле. Серия публикаций [34–37, 42–44] посвящена исследованию вынужденных и параметрических колебаний заряженного ИСЗ в МПЗ. Особое внимание уделено возможным резонансным колебаниям ИСЗ.

В работе [34] рассматривался ИСЗ с заряженным экраном произвольной формы, движущийся по круговой кеплеровой орбите с радиусом R и произвольным наклонением i в центральном ньютоновском гравитационном поле и дипольном магнитном поле. Изучалось влияние возмущающего воздействия сил Лоренца на колебания гравитационно стабилизированного ИСЗ (условия $B>A>C$ выполнены) в условиях резонансов. Дифференциальные уравнения малых колебаний ИСЗ в «самолетных» углах имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}\varphi + c_1\psi' + n_1^2\varphi &= \mu[-r_1\varphi' + b_{11}(u)\psi' + b_{12}(u)\theta' + b_{13}(u)\varphi + b_{14}(u)\psi + b_{15}(u)\theta + \\ &\quad + b_{16}(u) + F_1(\varphi,\psi,\theta,\varphi',\psi',\theta',u)] + \Phi_1(\varphi,\psi,\theta,\varphi',\psi',\theta',u), \\ \psi - c_2\varphi' + n_2^2\psi &= \mu[b_{21}(u)\varphi' - r_2\psi' + b_{22}(u)\theta' + b_{23}(u)\varphi + b_{24}(u)\psi + b_{25}(u)\theta + \\ &\quad + b_{26}(u) + F_2(\varphi,\psi,\theta,\varphi',\psi',\theta',u)] + \Phi_2(\varphi,\psi,\theta,\varphi',\psi',\theta',u), \\ \theta + n^2\theta &= \mu[b_{31}(u)\varphi' + b_{32}(u)\psi' - r_3\theta' + b_{33}(u)\varphi + b_{34}(u)\psi + b_{35}(u)\theta + \\ &\quad + b_{36}(u) + F_3(\varphi,\psi,\theta,\varphi',\psi',\theta',u)] + \Phi_3(\varphi,\psi,\theta,\varphi',\psi',\theta',u).\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь $c_1 = 1 - \delta + \varepsilon$, $c_2 = c_1/\varepsilon$, $n_1^2 = 4(\delta - \varepsilon)$, $n_2^2 = (\delta - 1)/\varepsilon$, $n^2 = 3(1 - \varepsilon)/\delta$; $b_{ij}(u)$ $(i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6})$ — периодические функции безразмерного времени $u = \omega_0 t$; $F_i(\varphi,\psi,\theta,\varphi',\psi',\theta',u)$ и $\Phi_i(\varphi,\psi,\theta,\varphi',\psi',\theta',u)$ $(i = \overline{1,3})$ — нелинейные функции, периодические по u; $\mu = ma_1(R^3A\omega_0)^{-1}$ — безразмерный малый параметр, имеющий знак заряда ИСЗ; r_i $(i = \overline{1,3})$ — коэффициенты демпфирования, знак которых выбирается в соответствии с условием $\mu r_i \geqslant 0$.

При отсутствии возмущающего момента $\vec{M}_L$ и диссипативных сил и выполнении условия гравитационной ориентации $B > A > C$ заряженный ИСЗ имеет устойчивое прямое положение равновесия $\varphi = \psi = \theta = 0$, принимаемое за невозмущенное движение, определяемое дифференциальной системой, в которую обращается (15) при $\mu = 0$. Линейное приближение этой системы допускает периодическое решение

$$\begin{aligned}&\varphi_* = x_1\sin k_1u + x_2\cos k_1u + x_3\sin k_2u + x_4\cos k_2u,\ \theta_* = x_5\sin k_3u + x_6\cos k_3u, \\ &\psi_* = \rho_1(x_1\cos k_1u - x_2\sin k_1u) + \rho_2(x_3\cos k_2u - x_4\sin k_2u),\end{aligned} \tag{16}$$

где x_i $(i = \overline{1,6})$ — произвольные постоянные, зависящие от начальных условий; k_i $(i = \overline{1,3})$ — известные невозмущенные собственные частоты ИСЗ. Решение (16) описывает малые колебания ИСЗ в окрестности устойчивого прямого положения равновесия. Это решение принимается в качестве порождающего решения линейного приближения дифференциальной системы (15), а искомое решение строится в соответствии с методом вариации произвольных постоянных в виде

$$\varphi = \varphi_* + \varphi_0(u), \quad \psi = \psi_* + \psi_0(u), \quad \theta = \theta_* + \theta_0(u), \tag{17}$$

где $\varphi_0(u), \psi_0(u), \theta_0(u)$ — частное решение, обусловленное наличием в правых частях уравнений периодических членов $b_{i6}(u)$, а $x_i(u)$ $(i = \overline{1,6})$ — новые неизвестные функции аргумента широты, подчиненные условиям совместности

$$\begin{gathered}x_1'\sin k_1u + x_2'\cos k_1u + x_3'\sin k_2u + x_4'\cos k_2u = 0, \\ \rho_1(x_1'\cos k_1u - x_2'\sin k_1u) + \rho_2(x_3'\cos k_2u - x_4'\sin k_2u) = 0, \\ x_5'\sin k_3u + x_6'\cos k_3u = 0.\end{gathered}$$

В результате выполнения известных преобразований для отыскания переменных $x_i(u)$ $(i = \overline{1,6})$ построена дифференциальная система в стандартной форме

$$x_i' = \mu X_i(x_1, x_2, \ldots, x_6, u). \tag{18}$$

Показано, что в силу почти периодичности коэффициентов при $x_i(u)$ в системе (18) могут иметь место параметрические резонансы при следующих комбинациях частот:

$$\pm k_i \pm k_j = 0, \quad \pm k_i \pm k_j \pm 1 = 0, \quad \pm k_i \pm k_j \pm 2 = 0 \quad (i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}).$$

Поскольку в области $B > A > C$ имеют место неравенства $0 < k_1 < 1$, $1 < k_2 < 2$, $0 < k_3 < 1$ [15], то практически реализуемыми при ненулевых значениях x_0, y_0, z_0 оказываются следующие 11 резонансных комбинаций частот [36]:

$$\begin{gathered} 1)\ k_1 = \frac{1}{2},\ 2)\ k_3 = \frac{1}{2},\ 3)\ k_3 = 1,\ 4)\ k_2 - k_1 = 1,\ 5)\ k_1 + k_2 = 2,\ 6)\ k_1 - k_3 = 0, \\ 7)\ k_1 + k_3 = 1,\ 8)\ k_3 - k_1 = 1,\ 9)\ k_1 + k_3 = 2,\ 10)\ k_2 - k_3 = 1,\ 11)\ k_2 + k_3 = 2. \end{gathered} \tag{19}$$

В условиях предположения $x_0 = y_0 = 0$, принятого в [34], практически реализуемыми являются резонансы с номерами 3, 5, 7, 8, 10. Показано, что в нерезонансной ситуации возмущающее воздействие лоренцева момента на колебания ИСЗ проявляется, во-первых, в изменении собственных частот колебаний, и это изменение может быть весьма значительным, и, во-вторых, в возникновении вынужденных колебаний, определяемых найденными периодическими функциями:

$$\begin{aligned} \varphi_0(u) &= \mu(c_0^{(1)} + c_1^{(1)} \sin u + c_2^{(2)} \cos u + c_3^{(1)} \sin 2u + c_4^{(1)} \cos 2u), \\ \psi_0(u) &= \mu(c_0^{(2)} + c_1^{(2)} \sin u + c_2^{(2)} \cos u + c_3^{(2)} \sin 2u + c_4^{(2)} \cos 2u), \\ \theta_0(u) &= \mu(c_0^{(3)} + c_1^{(3)} \sin u + c_2^{(3)} \cos u + c_3^{(3)} \sin 2u + c_4^{(3)} \cos 2u). \end{aligned} \tag{20}$$

Исследованы колебания ИСЗ в условиях основных и комбинационных параметрических резонансов (19). Установлено, что во всех резонансных случаях смещение центра заряда вдоль наибольшей оси z эллипсоида инерции оказывает значительное стабилизирующее воздействие на ИСЗ, в то время как смещение его вдоль наименьшей оси y, наоборот, оказывает дестабилизирующее воздействие. Ориентация экрана, при которой его главные оси коллинеарны главным центральным осям инерции ИСЗ, является стабилизирующим фактором во всех 11 резонансных случаях. Использование уточненной математической модели, построенной с учетом угловой скорости суточного вращения МПЗ и его градиентности вследствие кривизны магнитных силовых линий в объеме ИСЗ, позволило выявить «особые» орбиты, на которых могут иметь место нарастающие резонансные колебания. Эти орбиты определяются равенством

$$\omega_E/\omega_0 = 2 \cos i/(1 + \cos^2 i), \tag{21}$$

из которого следует, что «особые» орбиты существуют среди орбит любого наклонения i, а их радиус изменяется от радиуса Земли при $i = \pi/2$ до радиуса геостационарной орбиты при $i = 0$. Выявление 3, 5, 9 и 11-го резонасных случаев оказалось возможным благодаря учету суточного вращения МПЗ. Диссипативные силы оказывают значительное стабилизирующее воздействие на ИСЗ. За счет выбора достаточно большого демпфирования всегда может быть обеспечена ограниченность колебаний ИСЗ в условиях резонансов.

8. Заряженное тело на эллиптической орбите. Влияние эллиптичности орбиты на плоские колебания ИСЗ под действием лоренцева момента исследовалось в работах [35, 37]. В [35] рассмотрен ИСЗ с заряженным экраном цилиндрической формы, в [37] — ИСЗ с экраном произвольной формы. Получены условия существования плоских колебаний экранированного ИСЗ. Выведено нелинейное дифференциальное уравнение колебаний ИСЗ по углу тангажа. Исследование уравнения колебаний ИСЗ на слабоэллиптической орбите проводится в предположении малости возмущающего лоренцева момента. В [35] задача рассматривается в линейном приближении.

Используется метод вариации произвольных постоянных и прием усреднения дифференциальных уравнений по явно входящей независимой переменной — истинной аномалии ν. Выявлено стабилизирующее влияние смещения центра заряда z_0 на эксцентриситетные колебания ИСЗ в окрестности значения $\theta = 0$.

Для ИСЗ с экраном произвольной формы в [37] получено дифференциальное уравнение плоских колебаний ИСЗ следующего вида:

$$(1 + e\cos\nu)\theta - 2e\sin\nu\,\theta' + \frac{1}{2}n^2\sin 2\theta + l_1(\nu)\sin\theta + l_2(\nu)\cos\theta + \\ + l_3(\nu)\sin 2\theta + l_4(\nu)\cos 2\theta = 2e\sin\nu + l_0\sin\nu(1 + e\cos\nu). \quad (22)$$

При отсутствии заряда это уравнение совпадает с известным уравнением В. В. Белецкого [15]. В линейном приближении решение строится методом Крылова—Боголюбова. Установлено, что в плоских колебаниях ИСЗ возможен, во-первых, внешний резонанс при $n \approx 1$, обусловленный наличием в правой части уравнения (22) функции $2e\sin\nu$, а, во-вторых, — параметрический резонанс при $n \approx 1/2$. Из полученного решения уравнения (22), содержащего постоянное слагаемое, следует, что наличие заряда приводит в общем случае к смещению центра колебаний ИСЗ относительно положения $\theta = 0$. Также установлено, что частота возмущенных колебаний ИСЗ линейно зависит от смещения z_0 центра заряда вдоль оси Cz относительно центра масс ИСЗ. Для проведения более подробного анализа колебаний ИСЗ, как в резонансных случаях, так и в их окрестностях, используется нелинейное уравнение (22). Исследование квазигармонических колебаний ИСЗ проводится методом Крылова—Боголюбова.

9. Нелинейные колебания гравитационно-ориентированного заряженного тела в геомагнитном поле. Нелинейные колебания гравитационно-ориентированного заряженного ИСЗ в суперпозиции гравитационного и магнитного полей Земли изучались в работах [42–45]. Исследование проводилось на базе специально выведенных для этой цели дифференциальных уравнений возмущенного движения (33) из второй части обзора [2]. В силу неоднородной структуры возмущающего лоренцева момента $\vec{M}_L$ решение системы нелинейных возмущенных дифференциальных уравнений движения отыскивалось в виде (17), где $\varphi_*, \psi_*, \theta_*$ определяются из уравнений (33 [2]), а $\varphi_0, \psi_0, \theta_0$ — по формулам (20). Подробно проанализирована спектральная структура довольно громоздкого выражения момента $\vec{M}_L$. Выявлено, что в системе уравнений (33 [2]) для переменных x_i, v_i, нелинейной, неавтономной, с периодическими коэффициентами, возможны как параметрические, так и внутренние резонансы, обусловленные квадратичными нелинейными членами и соответствующие следующим частотным комбинациям:

$$\pm k_i \pm k_j \pm k_n = 0, \quad \pm k_i \pm k_j \pm k_n \pm 1 = 0, \quad \pm k_i \pm k_j \pm k_n \pm 2 = 0 \quad (i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}, n = \overline{1,3}).$$

Из них в области гравитационной ориентации $B > A > C$ реализуются 22 параметрических резонанса: 1) $3k_1 = 1$, 2) $3k_1 = 2$, 3) $3k_3 = 2$, 4) $-2k_1 + k_2 = 1$, 5) $2k_1 + k_2 = 2$, 6) $2k_1 + k_3 = 1$, 7) $2k_1 - k_3 = 1$, 8) $-2k_1 + k_3 = 1$, 9) $2k_1 + k_3 = 2$, 10) $2k_2 - k_3 = 2$, 11) $k_1 + 2k_3 = 2$, 12) $-k_1 + 2k_3 = 2$, 13) $k_2 + 2k_3 = 2$, 14) $k_1 + k_2 - k_3 = 1$, 15) $-k_1 + k_2 + k_3 = 1$, 16) $k_1 + k_2 + k_3 = 2$, 17) $k_1 + k_2 - k_3 = 2$, 18) $-k_1 + k_2 + k_3 = 2$, 19) $k_1 + 2k_3 = 1$, 20) $-k_1 + 2k_3 = 1$, 21) $k_2 - 2k_3 = 1$, 22) $-k_2 + 2k_3 = 1$ и четыре внутренних резонанса: I. $2k_1 - k_3 = 0$, II. $k_1 - 2k_3 = 0$, III. $k_2 - 2k_3 = 0$, IV. $k_1 - k_2 + k_3 = 0$.

Следует отметить, что 11 из 18 нелинейных параметрических резонансов, а именно 2, 3, 5, 9–13, 16–18-й выявлены благодаря уточнению математической модели путем учета суточного вращения МПЗ.

С использованием приема усреднения и последующего построения первых интегралов усредненных уравнений выполнено исследование дифференциальных уравнений для переменных x_i, v_i как в нерезонансной ситуации [43], так и в условиях каждого из вышеприведенных резонансов [44]. Все выявленные резонансы по степени их опасности разделены на три группы: «безопасные», «малоопасные» и «опасные» с точки зрения возможности неограниченного нарастания колебаний в условиях резонанса.

Обнаружено, что для всех резонансов, кроме I и IV, близость орбиты к «особой» (21) является дестабилизирующим фактором, способствующим увеличению амплитуд колебаний ИСЗ. При этом во всех резонансных случаях, кроме «безопасных», колебания на «особых» орбитах являются неограниченно нарастающими при любых начальных условиях.

Установлено, что, как и в случаях линейных резонансов, во всех нелинейных резонансных случаях, кроме 1, 3, 4, 9, 10, 16–18-го, смещение центра заряда вдоль наибольшей оси z эллипсоида инерции оказывает значительное стабилизирующее воздействие на ИСЗ, в то время как смещение центра заряда вдоль наименьшей оси y, наоборот, оказывает дестабилизирующее воздействие. Во всех резонансных случаях и в нерезонансном смещение центра заряда вдоль средней оси x эллипсоида инерции ИСЗ приводит к неограниченному нарастанию колебаний ИСЗ.

Доказано, что в 9-м, 17-м и I резонансах возможна «перекачка» продольных колебаний в поперечные и наоборот. В 18-м и IV резонансах возможна «перекачка» поперечных колебаний в продольные.

Рассмотренный выше круг задач, связанных с изучением нелинейных колебаний, в том числе резонансных, в либрационном движении заряженного ИСЗ в дипольном магнитном поле получил развитие в работе [46], где математическая модель задачи строилась по-прежнему с учетом нелинейных членов 2-го порядка, но на базе более точной, а именно — квадрупольной аппроксимации геомагнитного поля. Проанализирована спектральная структура лоренцева момента и показано, что резонансные комбинации собственных частот удовлетворяют равенству

$$n_1 k_i + n_2 k_j + n_3 k_n = m_1 \pm m_2 \widetilde{\omega}, \tag{23}$$

где $\widetilde{\omega} = \omega_E / \omega_0$. Из (23) следует, что при квадрупольной аппроксимации МПЗ возмущающее воздействие лоренцева момента приводит не просто к появлению большого количества новых (по сравнению с дипольной аппроксимацией МПЗ) резонансных комбинаций собственных частот. Принципиально важно, что число реализуемых резонансов зависит от высоты орбиты ИСЗ. Такая зависимость не проявлялась при дипольной аппроксимации МПЗ и впервые обнаружена в [46] благодаря использованию квадрупольного приближения МПЗ и учету существенной зависимости магнитной индукции $\vec{B}$ от суточного вращения Земли.

С помощью компьютерного моделирования выявлены резонансные комбинации, реализуемые для гравитационно ориентированного ИСЗ. Найдены 327 практически реализуемых резонансов для ИСЗ, находящихся на низких и средних орбитах с высотами от 200 до 1200 км (при этом $\tilde{\omega} \approx 0.02$). Соответствующие резонансные кривые построены на плоскости безразмерных инерционных параметров ИСЗ.

Среди обнаруженных 327 резонансов 26 резонансов выявлены ранее [43] при рассмотрении аналогичной задачи с использованием модели прямого магнитного диполя. Все эти 26 резонансов имели 3-й порядок $\left(\sum_{s=1}^{3}|n_s| = 3\right)$. Заметим, что при рассмотрении задачи в квадрупольном приближении МПЗ оказались также выявлены резонансы 1, 2 и 3-го порядков.

Произведена классификация выявленных резонансных соотношений в зависимости от порядка резонансов и от количества собственных частот, входящих в эти соотношения. Либрационное движение ИСЗ аналитически исследуется с помощью приема усреднения дифференциальных уравнений как в нерезонансном варианте, так и в условиях резонансов. Построены первые интегралы усредненных дифференциальных уравнений, что позволяет провести качественный анализ колебаний ИСЗ на амплитудно-фазовой плоскости. Обнаружено, что во всех резонансных и в нерезонансном случаях смещение центра заряда вдоль средней оси x эллипсоида инерции ИСЗ приводит к неограниченному нарастанию колебаний ИСЗ. Показано, что в нерезонансном случае квадрупольные составляющие геомагнитного потенциала вносят лишь количественные поправки в решение, а в резонансных случаях — не только количественные поправки, но и качественно новые эффекты.

Новый импульс к расширению круга задач, связанных с изучением нелинейных колебаний, в том числе резонансных, в либрационном движении заряженного ИСЗ в МПЗ возник после построения более общей по сравнению с [47] математической модели для описания нелинейных возмущенных колебаний гравитационно ориентированного твердого тела. Если в [47] учитывались лишь нелинейные члены 2-го порядка, то в уравнениях, выведенных в [48], учитываются нелинейные члены 2-го и 3-го порядков (34 [2]). На базе этих уравнений в [49] изучались нелинейные колебания заряженного ИСЗ в дипольном МПЗ. Выявлены возможные и реализуемые в области гравитационной стабилизации резонансные комбинации невозмущенных собственных частот ИСЗ, включая резонансы 4-го порядка, которые не могли быть выявлены ранее на базе уравнений, построенных с учетом нелинейных членов лишь 2-го порядка. Дана классификация всех реализуемых резонансов, построены соответствующие им резонансные кривые на плоскости инерционных параметров ИСЗ.

Компьютерный анализ резонансных колебаний ИСЗ выполнен в [50]. В частности, на примере резонанса 4-го порядка $k_2 - 3k_3 = 0$ как одного из самых «слабых» резонансов показано, что малые при $\vec{M}_L = \vec{0}$ колебания ИСЗ с амплитудой около 9° возрастают при $\vec{M}_L \neq \vec{0}$ до величин около 30° в условиях данного резонанса, возникающего лишь при $\vec{M}_L \neq \vec{0}$. При этом $\vec{M}_L$ остается малым по величине по сравнению с гравитационным моментом, который в среднем превосходит его более чем в три раза.

10. Заряженное тело — гиростат на слабоэллиптической и слабонаклонной орбитах. Новые интегрируемые случаи в динамике сферического движения твердого тела, обнаруженные в связи с исследованием влияния магнитного поля на заряженное тело и описанные в разделе 4, представляют интерес не только по причине того, что допускают решения в квадратурах [33]. Эти решения могут рассматриваться как порождающие для широкого круга задач, отличающихся меньшим числом ограничений на параметры и поэтому более реалистичными с практической точки зрения. Такого рода задачи в более общей постановке были рассмотрены в работах [51–53].

В работах [51, 52], при сохранении основных предположений [33] о наличии некоторой динамической и электромагнитной симметрии гиростата, предполагается, что его орбита является эллиптической с эксцентриситетом e и фокальным параметром p. Орбита гиростата лежит в плоскости геомагнитного экватора. С учетом равенства $m = -R_E^3 g_1^0$ динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x &= -g_1^0(R_E/p)^3(1+e\cos\nu)^3[a_3\omega_y\beta_3 - a_1\omega_z\beta_2 - \omega_E(a_3-a_1)\beta_2\beta_3 - \\ &\qquad - I_0\beta_2 + Eg_1^0(R_E/p)^3(1+e\cos\nu)^3\beta_2\beta_3] - J\Omega\omega_y, \\ A\dot{\omega}_y &= -g_1^0(R_E/p)^3(1+e\cos\nu)^3[a_1\omega_z\beta_1 - a_3\omega_x\beta_3 + \omega_E(a_3-a_1)\beta_1\beta_3 + \\ &\qquad + I_0\beta_1 - Eg_1^0(R_E/p)^3(1+e\cos\nu)^3\beta_1\beta_3] + J\Omega\omega_x, \\ A\dot{\omega}_z &= -g_1^0(R_E/p)^3(1+e\cos\nu)^3 a_1(\omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1). \end{aligned} \tag{24}$$

Совместно с кинематическими уравнениями Пуассона

$$\dot{\beta}_1 + \omega_y\beta_3 - \omega_z\beta_2 = 0, \quad \dot{\beta}_2 + \omega_z\beta_1 - \omega_x\beta_3 = 0, \quad \dot{\beta}_3 + \omega_x\beta_2 - \omega_y\beta_1 = 0 \tag{25}$$

они образуют замкнутую дифференциальную систему (24), (25), инвариантную относительно преобразований $\{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t\} \to \{-\omega_x, \omega_y, \omega_z, -\beta_1, \beta_2, \beta_3, -t\}$, $\{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t\} \to \{\omega_x, -\omega_y, \omega_z, \beta_1, -\beta_2, \beta_3, -t\}$ и поэтому принадлежащую к классу обратимых механических систем [54] с двумя неподвижными множествами $M_1 = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3 : \omega_x = 0, \beta_1 = 0\}$, $M_2 = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3 : \omega_y = 0, \beta_2 = 0\}$. Непосредственной проверкой можно убедиться в наличии в системе (24), (25) также третьего неочевидного неподвижного множества: $M_3 = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3 : \omega_y = \omega_x, \beta_2 = \beta_1\}$. Доказано, что в задаче о вращении гиростата отсутствуют двояко симметричные движения, т. е. движения, симметричные относительно двух неподвижных множеств одновременно. Доказано также, что при переходе гиростата с круговой на слабоэллиптическую орбиту происходит бифуркация семейства симметричных колебаний круговой задачи и рождаются два изолированных симметричных колебания.

Более общая постановка задачи о вращательном движении гиростата под действием гравитационного, лоренцева и магнитного моментов дана в [53]. В отличие от [51, 52] предполагается, что орбита гиростата не лежит в плоскости геомагнитного экватора, а наклонена к ней под небольшим углом i. Эксцентриситет орбиты также мал. Для гиростата с произвольным трехосным эллипсоидом инерции доказано, что все семейства симметричных колебаний гиростата на круговой орбите с нулевым наклонением, удовлетворяющие условию невырожденности, бифурцируют с появлением двух изолированных колебаний на слабоэллиптической орбите с малым i.

Для гиростата со сферическим эллипсоидом инерции уточнены и развиты результаты, полученные в [51, 52] для экваториальной слабоэллиптической орбиты. Доказано, что система (24):

1) допускает два решения, симметричные относительно множества M_1, и два решения, симметричные относительно множества M_2;

2) не содержит периодических решений, симметричных относительно неподвижного множества M_3;

3) допускает лишь такие периодические решения, которые симметричны относительно неподвижного множества M_1 или относительно неподвижного множества M_2.

Для гиростата на неэкваториальной эллиптической орбите получена система 2π-периодических по t дифференциальных уравнений движения с векторным малым параметром $\mu = (i, e)$. Показано, что эта система сохраняет свойство обратимости, характерное для порождающей системы, и обладает неподвижными множествами $M_x = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t : \omega_x = 0, \beta_1 = 0, \sin t = 0\}$, $M_y = \{\omega_x, \omega_y, \omega_z, \beta_1, \beta_2, \beta_3, t : \omega_y = 0, \beta_2 = 0, \sin t = 0\}$. Установлено, что если гиростат переходит с экваториальной орбиты на слабонаклонную, то неподвижное множество M_3 разрушается. В общем случае, для малых μ периодические решения возмущенной дифференциальной системы являются аналитическим продолжением периодических решений порождающей системы (11), для которой все периодические решения известны [33].

11. Эволюция ротационного движения заряженного твердого тела в геомагнитном поле. В исследованиях динамики вращательного движения заряженного твердого тела в магнитном поле, имеющих, как отмечалось выше, важное прикладное значение в космодинамике, одновременно разрабатывались не только общие вопросы, охватывающие колебательные и вращательные движения (см. разделы 2–6, 10), но и два «предельных» направления, отличающиеся качественными различиями в угловом движении ИСЗ: 1) динамика либрационного движения и 2) динамика ротационного движения. Первому из них посвящены разделы 7–9, а второе лишь кратко затронуто в разделе 2. Рассмотрим это направление исследований более подробно.

После первого успешного исследования [14] эволюции ротационного движения ИСЗ с заряженным экраном на базе уравнений Белецкого — Черноусько с последующим усреднением стали появляться новые публикации, развивающие данную тематику для задач в более общих постановках, с учетом дополнительных силовых факторов или возможных резонансов [55–60]. Исследования продолжались по двум направлениям, описанным в разделе 4, с учетом специфики ротационного движения ИСЗ.

Так, в работе [55], в отличие от [13], где для исследования возмущенного движения под действием сил Лоренца применен метод усреднения по быстрым переменным при условии, что частоты изменения этих переменных несоизмеримы, рассматривается случай, когда частота прецессионного движения ИСЗ вокруг вектора кинетического момента совпадает с частотой орбитального движения. Предполагается, что орбита ИСЗ — круговая произвольного наклонения i, а ИСЗ — динамически симметричный ($A = B \neq C$). Как и в [13], движение ИСЗ рассматривается в переменных $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \theta$. Структура лоренцева момента такова, что он не зависит от угла собственного вращения φ. Поэтому система уравнений возмущенного движения распадается на систему пяти дифференциальных уравнений относительно переменных $L, \rho, \sigma, \psi, \theta$ и отдельное уравнение для определения $\varphi(t)$. Поскольку рассматривается движение, близкое к резонансному, то в составляющих лоренцева момента вводится переменная δ, представляющая собой отклонение угла прецессии в истинном движении от его резонансного значения, так, что $\psi = \tau + \delta$, где $\tau = \omega_0 t$. Тогда уравнения возмущенного движения содержат единственную быструю переменную τ, по которой и производится усреднение. Показано, что система усредненных уравнений имеет первый интеграл $L \cos\theta = \mathrm{const}$, который выражает постоянство проекции вектора кинетического момента на ось симметрии ИСЗ. Методом последовательных приближений получено, что в возмущенном движении L и θ

меняются по гармоническому закону с одинаковой частотой, достигая одновременно максимальных отклонений. Углы ρ, σ, δ складываются из двух составляющих: вековой, пропорциональной τ, и гармонической с частотой $k = L_0/(A\omega_0) - 1$, которая мала для рассматриваемого случая движения, близкого к резонансному.

В работе [56] рассматривается ИСЗ, снабженный сферическим заряженным экраном с зарядом Q, центр которого смещен на величину z_0 вдоль оси z динамической симметрии ИСЗ. МПЗ моделируется полем «прямого» магнитного диполя. Исследуется эволюция вращательного движения ИСЗ относительно центра масс под действием аэродинамических сил и сил Лоренца. Считается, что земная атмосфера не вращается, а ее действие сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной противоположно скорости v_0 центра масс ИСЗ.

Из результатов анализа влияния аэродинамических сил на эволюцию вращательного движения ИСЗ, полученных в [15] с помощью усреднения по углу прецессии ψ и по периоду обращения ИСЗ по орбите, следует, что в случае круговой орбиты вековые эффекты, обусловленные аэродинамическими силами, отсутствуют. Поэтому в [56] предложено более точное приближение, полученное усреднением только по углу прецессии ψ. Для случая ИСЗ на круговой экваториальной орбите получены следующие уравнения первого приближения, характеризующие изменение угловых координат ρ и σ вектора $\vec{L}$ кинетического момента ИСЗ, величина которого постоянна:

$$\rho' = A_1 \sin\sigma + B_1 \cos\sigma, \quad \sigma' = (A_1 \cos\sigma - B_1 \sin\sigma) \operatorname{ctg}\rho - D_1. \tag{26}$$

Здесь коэффициенты A_1 и B_1 прямо пропорциональны соответственно Qz_0 и $v_0 z_0$, а $D_1 = 1 + D_0$, где D_0 прямо пропорционально Q. Из уравнений (26) следует, что вектор $\vec{L}$ прецессирует на постоянном угловом расстоянии от оси, координаты которой определяются из равенств

$$\sin\rho^* \cos\sigma^* = A_1/K_1, \quad \sin\rho^* \sin\sigma^* = -B_1/K_1, \quad \cos\rho^* = D_1/K_1, \tag{27}$$

с постоянной угловой скоростью $K_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + D_1^2}$.

В [56] рассмотрена более общая постановка задачи, в которой орбита эллиптическая с произвольным i. Получены уравнения, аналогичные (26). Таким образом, установлено, что в принятой постановке задачи силы Лоренца не меняют качественной картины движения: при совместном воздействии аэродинамических сил и сил Лоренца вектор $\vec{L}$ двигается с постоянной по истинной аномалии угловой скоростью по поверхности кругового конуса. Все количественные характеристики этого движения, а именно, координаты оси прецессии и угловая скорость, иные, чем при действии лишь аэродинамических сил, и определяются из соотношений, подобных (26), (27).

В работе [58] рассматривается динамически симметричный ИСЗ, снабженный сферическим заряженным экраном и движущийся по экваториальной орбите с малым эксцентриситетом. Исследуется ротационное движение ИСЗ относительно центра масс под воздействием малых по величине лоренцевых сил в случае резонанса, при котором совпадают частоты прецессионного и орбитального движений ИСЗ. Выявлены вековые изменения вектора кинетического момента ИСЗ.

В [59] рассматривается ИСЗ со сферическим заряженным экраном, находящийся на круговой орбите, неизменно ориентированной относительно Солнца. Исследуется ротационное движение ИСЗ под действием сил Лоренца и сил светового давления. Показана эволюция вектора кинетического момента в инерциальном пространстве.

В [60] рассматривается ИСЗ со сферическим заряженным экраном, находящийся на круговой экваториальной орбите. Получено условие существования устойчивого положения относительного равновесия ИСЗ. Исследовано совместное влияние лоренцевых и диссипативных сил, обусловленных наличием вихревых токов, на колебания ИСЗ в окрестности найденного положения равновесия. Показано, что вихревые токи способствуют погашению колебаний ИСЗ по углам рыскания и тангажа.

В упомянутом цикле работ МПЗ моделируется полем магнитного диполя, ось которого совпадает с осью суточного вращения Земли. При этом МПЗ считается неподвижным в инерциальном пространстве (не учитывается вращение МПЗ вместе с Землей) и однородным в объеме заряженного экрана. Недостатки такого подхода, выявленные при исследовании общих свойств вращательного движения ИСЗ, в частности либрационного движения ИСЗ, и описанные в разделе 4, стали очевидны к концу 1980-х годов и привели к постановке вопросов о влиянии собственного вращения МПЗ, градиентности МПЗ, точности модели МПЗ, а также конструктивных параметров ИСЗ на динамику ротационного движения заряженного ИСЗ. Изучению этих вопросов посвящены публикации [61–64], а также некоторые более поздние, которые рассматриваются в данном разделе.

Рассматривается заряженное тело (ИСЗ), движущееся по круговой экваториальной орбите. Предполагается, что распределение массы и заряда по объему тела обладает динамической и электростатической симметрией с осью Cz (т. е. $A = B$), а эллипсоид заряда — эллипсоид вращения, для определенности, с осью Ox_3^0, коллинеарной оси Cz. Тогда элементы тензора заряда $\Sigma = \operatorname{dig}(a_1, a_2, a_3)$ удовлетворяют условию $a_1 = a_2$. Центр заряда в общем случае не совпадает с центром масс тела и смещен относительно него вдоль оси z на величину z_0.

В соответствии с методикой Белецкого — Черноусько [15] производится усреднение дифференциальной системы (1), (2) из [3] по быстрой переменной ψ. В результате получены два первых интеграла $L = L_0$, $\theta = \theta_0$ и система дифференциальных уравнений для медленных переменных ρ и $\varkappa$, где $\varkappa = \sigma - \nu$ — угол между осью ζ и составляющей вектора $\vec{L}$ в плоскости орбиты, описывающих эволюцию ротационного движения ИСЗ:

$$\rho' = a \sin \varkappa, \quad \varkappa' = a \operatorname{ctg} \rho \cos \varkappa + c_0 \cos \rho + d_0. \tag{28}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по истинной аномалии ν, совпадающей в рассматриваемом случае круговой орбиты с аргументом широты $u = \nu = \omega_0 t$. Коэффициенты a и c_0 прямо пропорциональны соответственно Qz_0 и ω_E, а $d_0 = -1 + D_0$, где D_0 прямо пропорционально a_1.

Дифференциальная система (28) допускает первый интеграл

$$a \sin \rho \cos \varkappa - d_0 \cos \rho - \frac{c_0}{2} \cos^2 \rho = h, \tag{29}$$

позволяющий построить траектории апекса вектора $\vec{L}$ в ОСК на сфере $L = L_0$ с центром в центре масс ИСЗ. Полюсы траекторий апекса соответствуют положениям равновесия вектора $\vec{L}$ (и вектора ω при $A = B = C$) в ОСК, т. е. особым точкам уравнений (28), определяемым из системы

$$a \sin \varkappa = 0, \quad a \operatorname{ctg} \rho \cos \varkappa + c_0 \cos \rho + d_0 = 0. \tag{30}$$

Показано, что система (30) сводится к уравнению 4-й степени относительно $\cos\rho$. Анализ корней этого уравнения позволил оценить влияние фактора суточного вращения Земли. Установлено, что траектории апекса могут иметь два или четыре полюса, причем увеличение числа особых точек от двух до четырех возможно лишь при учете фактора суточного вращения Земли. Показано, что под влиянием суточного вращения Земли полюсы, соответствующие особым точкам типа «центр», смещаются с противоположных концов диаметра, где они располагались при $c_0 = 0$, траектории апекса деформируются и перестают быть окружностями, а движение апекса по траекториям перестает быть равномерным по ν.

Анализ влияния смещения центра заряда относительно центра масс позволил установить, что с увеличением z_0 происходит сдвиг равновесных положений вектора $\vec{L}$ (и ω при $A = B = C$), в результате которого они перемещаются в плоскости (η, ζ) из окрестности нормали к плоскости орбиты (ось $C\eta$) в окрестность радиус-вектора центра масс ИСЗ (ось $C\zeta$). Следовательно, путем увеличения z_0 можно обеспечить возможность стабилизации заряженного ИСЗ вращением, определяемым вектором $\vec{L}$, в достаточно малой окрестности оси $C\zeta$.

В [62] исследовано влияние неоднородности МПЗ на эволюцию ротационного движения заряженного ИСЗ с использованием вышеизложенной методики. Усредненная по быстрой переменной ψ дифференциальная система (1), (2) из [3] сводится к двум первым интегралам $L = L_0$, $\theta = \theta_0$ и системе дифференциальных уравнений для медленных переменных ρ и $\varkappa$, описывающих эволюцию ротационного движения ИСЗ:

$$\begin{gathered}\rho' = (b+g)\sin\rho\sin\varkappa\cos\varkappa + a\sin\varkappa,\\ \varkappa' = (b+g)\cos\rho\cos^2\varkappa + a\operatorname{ctg}\rho\cos\varkappa + c\cos\rho + d.\end{gathered} \tag{31}$$

Коэффициенты a и b прямо пропорциональны соответственно Qz_0 и a_1, причем $b \neq 0$ лишь при учете градиентности МПЗ; g обусловлено гравитационным моментом и отлично от нуля при $A \neq C$; c пропорционально a_1 и отлично от нуля лишь при учете суточного вращения МПЗ или градиентности МПЗ; $d = -1 + D$, где D прямо пропорционально a_1. Из системы (31) следует, что учет влияния градиентности МПЗ и гравитационного момента не только приводят к количественным изменениям в этой системе, но и вызывают появление качественно новых членов.

Дифференциальная система (31) допускает первый интеграл

$$\frac{b+g}{2}\sin^2\rho\cos^2\varkappa + a\sin\rho\cos\varkappa - d\cos\rho - \frac{c}{2}\cos^2\rho = h, \tag{32}$$

позволяющий построить траектории апекса вектора $\vec{L}$ в ОСК аналогично тому, как это было сделано в более простых случаях. Показано, что учет суточного вращения Земли позволяет выявить качественно новые эффекты в совместном влиянии моментов гравитационных и лоренцевых сил на ротационное движение ИСЗ, проявляющееся, в частности, в появлении новых особых точек и в увеличении их максимального количества — от 4 до 6.

Выявлено влияние смещения центра заряда относительно центра масс на динамику заряженного ИСЗ. В частности, из интеграла (32) следует, что при $z_0 = 0$ траектории апекса замкнуты и симметричны относительно меридианов, лежащих в плоскостях (η, ζ) и (ξ, η). При $z_0 \neq 0$ нарушается симметрия траекторий апекса относительно плоскости (ξ, η). Выделены шесть качественно различных типов расположения траекторий апекса на сфере $L = L_0$, причем четыре из них реализуются лишь в условиях совместного влияния гравитационных и лоренцевых сил.

Влияние квадрупольной составляющей МПЗ на эволюцию ротационного движения заряженного ИСЗ выяснено в работе [65]. Рассматривается ИСЗ на круговой экваториальной орбите средней высоты. Предполагается, что центр заряда смещен относительно центра масс ИСЗ и поэтому распределение заряда обладает большим статическим моментом 1-го порядка. В этом случае главный момент лоренцевых сил можно аппроксимировать выражением [66–68]

$$\vec{M}_L = Q\vec{\rho}_0 \times \mathbf{A}^\top (\vec{v}_C \times \vec{B}_C), \tag{33}$$

где $\vec{B}_C = \vec{B}_C^{(1)} + \vec{B}_C^{(2)}$, причем выражения для дипольной $\vec{B}_C^{(1)}$ и квадрупольной $\vec{B}_C^{(2)}$ составляющих индукции МПЗ имеют вид

$$\vec{B}_C^{(1)} = \left(\frac{R_E}{R}\right)^3 \begin{pmatrix} \sin u & -\cos u & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2\cos u & 2\sin u & 0 \end{pmatrix} \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} g_1^1 \\ h_1^1 \\ g_1^0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{B}_C^{(2)} = \left(\frac{R_E}{R}\right)^4 \begin{pmatrix} 2\sin u & -2\cos u & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3\cos u & 3\sin u & 0 \end{pmatrix} \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} 3g_2^2 - \frac{1}{2}g_2^0 & 3h_2^2 & \frac{3}{2}g_2^1 \\ 3h_2^2 & -3g_2^2 - \frac{1}{2}g_2^0 & \frac{3}{2}h_2^1 \\ \frac{3}{2}g_2^1 & \frac{3}{2}h_2^1 & g_2^0 \end{pmatrix} \mathbf{\Gamma}^\top \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $u = \omega_0 t$, $\phi = \omega_E t$.

Аппроксимация $\vec{M}_L$ в виде (33) вполне оправданно используется при немалых $|\vec{\rho}_0|$ в задачах динамики заряженного ИСЗ, совершающего либрационное движение. Нетрудно проверить приемлемость аппроксимации (33) и в задаче исследования динамики ИСЗ, совершающего ротационное движение. Так, численные оценки для ИСЗ на орбите радиуса $R = 7 \cdot 10^6$ м с характерным размером $10^{-6}R$ и угловой скоростью $20°$/с показывают, что наибольшее слагаемое момента $\vec{M}_L$, не учтенное в приближенной модели (33), имеет величину, на три порядка меньшую, чем основное выражение, представленное формулой (33).

В рассматриваемой задаче $\vec{v}_C = R(\omega_0 - \omega_E)\vec{\xi}_0$, $\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -2\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, и поэтому

$$\vec{B}_C^{(1)} = \left(\frac{R_E}{R}\right)^3 \begin{pmatrix} g_1^1 \sin(u-\phi) - h_1^1 \cos(u-\phi) \\ -g_1^0 \\ 2g_1^1 \cos(u-\phi) + 2h_1^1 \sin(u-\phi) \end{pmatrix},$$

$$\vec{B}_C^{(2)} = 3\left(\frac{R_E}{R}\right)^4 \begin{pmatrix} 2g_2^2 \sin 2(u-\phi) - 2h_2^2 \cos 2(u-\phi) \\ -g_2^1 \cos(u-\phi) - h_2^1 \sin(u-\phi) \\ 3g_2^2 \cos 2(u-\phi) - \frac{1}{2}g_2^0 + 3h_2^2 \sin 2(u-\phi) \end{pmatrix}.$$

В результате для момента $\vec{M}_L$ справедливо представление

$$\begin{pmatrix} M_{Lx} \\ M_{Ly} \\ M_{Lz} \end{pmatrix} = Q\left(\frac{R_E}{R}\right)^3 R(\omega_0 - \omega_E) z_0 \begin{pmatrix} -B_{C\eta}\gamma_2 + B_{C\zeta}\beta_2 \\ B_{C\eta}\gamma_1 - B_{C\zeta}\beta_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{C\eta} = -g_1^0 - 3\frac{R_E}{R}\left(g_2^1 \cos(u-\phi) + h_2^1 \sin(u-\phi)\right), \tag{34}$$

$$B_{C\zeta} = 2g_1^1 \cos(u-\phi) + 2h_1^1 \sin(u-\phi) + 9\frac{R_E}{R}\left(g_2^2 \cos 2(u-\phi) - \frac{g_2^0}{6} + h_2^2 \sin 2(u-\phi)\right). \tag{35}$$

Принимая во внимание численные значения коэффициентов g_n^m и h_n^m, несложно заметить, что учет квадрупольной составляющей МПЗ (с коэффициентами g_2^1, h_2^1, g_2^0, g_2^2, h_2^2) приводит к появлению в выражениях $B_{C\eta}$ и $B_{C\zeta}$, а следовательно, и в выражении $\vec{M}_L$ дополнительных слагаемых, которые для орбит средней высоты дают «поправки», составляющие $\approx 33\,\%$ от основной величины, содержащей множитель g_1^0 и соответствующей модели «прямой диполь» в $B_{C\eta}$ и $\approx 50\,\%$ — в $B_{C\zeta}$, и $\approx 125\,\%$ от величины тех слагаемых, которые содержат множители g_1^1 и h_1^1 и соответствуют модели «наклонный диполь». С увеличением радиуса орбиты поправки, обусловленные квадрупольной составляющей МПЗ, убывают, однако даже для высоких орбит с высотой ≈ 2400 км они имеют тот же порядок малости, что и поправки, соответствующие модели «наклонный диполь». При этом поправки, вносимые моделью «наклонного диполя» в модель «прямой диполь», составляют $\approx 40\,\%$. Это означает, что в данной задаче модель «наклонный диполь» является некорректной, поскольку вносит в модель «прямой диполь» поправки того же порядка и даже меньшие по величине, чем отбрасываемые при этом поправки, обусловленные квадрупольной составляющей МПЗ. Обнаруженный в [65] факт свидетельствует о том, что возможность использования модели «наклонного» или, как ее еще называют, «косого» диполя в задачах динамики орбитальных объектов, взаимодействующих с МПЗ, требует предварительного исследования и соответствующего обоснования.

Усредненная по быстрой переменной ψ дифференциальная система (1), (2) из [3] сводится к двум первым интегралам $L = L_0$, $\theta = \theta_0$ и системе дифференциальных уравнений для медленных переменных ρ и $\varkappa = \sigma - u$, описывающих эволюцию ротационного движения ИСЗ:

$$\dot{\rho} = g_1 \sin\rho \sin\varkappa \cos\varkappa + a_1 B_{C\eta} \sin\varkappa,\ \dot{\sigma} = g_1 \cos\rho \cos^2\varkappa + a_1 (B_{C\eta} \operatorname{ctg}\rho \cos\varkappa + B_{C\zeta}). \tag{36}$$

Здесь $g_1 = \dfrac{3}{L_0}\omega_0^2 (A - C)(1 - \dfrac{3}{2}\sin^2\theta_0)$, $a_1 = \dfrac{Q}{L_0}\left(\dfrac{R_E}{R}\right)^3 R(\omega_0 - \omega_E) z_0 \cos\theta_0$.

Учитывая (34), (35), нетрудно заметить, что правые части уравнений (36) содержат долгопериодические функции с периодом $2\pi/\omega_E$, намного превосходящим (примерно в 10 раз для орбит средней высоты) период $2\pi/\omega_0$ орбитального движения центра масс. Следовательно, для выявления вековых и долгопериодических эффектов в ротационном движении тела можно провести усреднение дифференциальных уравнений (36) не только по ψ, но также и по u. С учетом предположения о несоизмеримости частот переменных ψ и u получены дифференциальные уравнения:

$$\rho' = a \sin\chi, \quad \chi' = g\cos\rho + a \operatorname{ctg}\rho \cos\varkappa + d, \tag{37}$$

где $a = -\dfrac{3Q}{2L_0}\left(\dfrac{R_E}{R}\right)^4 R\dfrac{\omega_0 - \omega_E}{\omega_E} z_0 \cos\theta_0 \sqrt{(g_2^1)^2 + (h_2^1)^2}$, $g = g_1/2$, $\phi_0 = \operatorname{arctg}(h_2^1/g_2^1)$, $d = -\dfrac{3Q}{2L_0}\left(\dfrac{R_E}{R}\right)^4 R\dfrac{\omega_0 - \omega_E}{\omega_E} z_0 \cos\theta_0 g_2^0 - 1$, штрих означает дифференцирование по ϕ, а угол $\chi = \sigma - (\phi + \phi_0)$ можно рассматривать как угол между составляющей вектора $\vec{L}$ в плоскости орбиты и осью $C\zeta_E$, которая параллельна оси $O_E Z_E$, связанной с Землей и направленной в точку пересечения земного экватора и меридиана ϕ_0 восточной долготы. Фактически углы ρ и χ определяют ориентацию вектора $\vec{L}$ в системе координат $C\xi_E\eta\zeta_E$, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω_E вокруг нормали $C\eta$ к плоскости орбиты.

Дифференциальная система (37) допускает первый интеграл

$$a \sin \rho \cos \chi - d \cos \rho - \frac{g}{2} \cos^2 \rho = h = \text{ const}, \tag{38}$$

с помощью которого можно выразить $\cos \chi$ через ρ, подставить в первое уравнение системы (37), ввести новую переменную $x = \cos \rho$ и получить для нее дифференциальное уравнение $(x')^2 = a^2(1-x^2)-(dx+gx^2/2+h)^2$. Таким образом, задача интегрирования системы (37) сводится к квадратурам, что позволяет найти закон движения вектора $\vec{L}$ и получить полную информацию о ротационном движении ИСЗ. Вместе с тем для получения более наглядных качественных результатов, характеризующих эволюцию ротационного движения ИСЗ, в работе [65] построены траектории апекса вектора $\vec{L}$ на сфере $L = L_0$ в системе координат $C\xi_E\eta\zeta_E$ по аналогии с уравнениями (28) такой же структуры, но с другими по смыслу коэффициентами. Не останавливаясь на этих результатах, заметим, что для исследования влияния квадрупольной составляющей МПЗ на эволюцию ротационного движения заряженного ИСЗ можно исключить влияние гравитационного момента, положив $A = B = C$. В этом случае $g = 0$ и система (37) принимает вид

$$\rho' = a \sin \chi, \quad \chi' = a \operatorname{ctg} \rho \cos \varkappa + d. \tag{39}$$

Соответственно упрощается и интеграл (38):

$$a \sin \rho \cos \chi - d \cos \rho = h = \text{const}. \tag{40}$$

Далее в [65] найдены особые точки системы (39), построены траектории апекса вектора $\vec{L}$ на сфере $L = L_0$, с помощью интеграла (40) выполнен анализ траекторий и сделаны выводы об устойчивости стационарных режимов движения ИСЗ. Показано, что ротационное движение ИСЗ под действием $\vec{M}_L$ при выполнении основного предположения $|\vec{L}|/A_0 \gg |\vec{M}_L|/|\vec{L}|$ представляет собой квазирегулярную прецессию ($\dot{\psi} \approx L_0/A$) вокруг постоянного по величине вектора $\vec{L}$, эволюционирующего по направлению таким образом, что его апекс описывает в системе координат $C\xi_E\eta\zeta_E$, построенные в [65] траектории на сфере. Положение диаметра этой сферы, определяющего стационарные направления вектора $\vec{L}$, задается углом $\rho = \operatorname{arcctg}(-d/a)$ между ним и нормалью к плоскости орбиты. Этот угол существенным образом зависит от параметров ИСЗ. В данном случае единственным электростатическим параметром ИСЗ является $P_L^{(1)} = Qz_0 \cos \theta_0$, представляющий собой проекцию статического момента заряда первого порядка на направление $\vec{L}$. Выявлено, что вектор $\vec{L}$ может иметь стационарные положения (в системе координат $C\xi_E\eta\zeta_E$) во всем диапазоне изменения угла ρ от 0 до π.

Все параметры, входящие в уравнения (39) ротационного движения ИСЗ, зависят лишь от квадрупольных коэффициентов g_2^0, g_2^1, h_2^1, и найденные вековые и долгопериодические эффекты в ротационном движении заряженного ИСЗ в геомагнитном поле обусловлены именно влиянием квадрупольной составляющей МПЗ. Следовательно, не только количественные, но и качественные характеристики ротационного движения заряженного ИСЗ существенным образом зависят от квадрупольной составляющей МПЗ и не могут быть выявлены путем обобщения модели «прямой диполь» до уровня модели «наклонный диполь». Это подтверждает необходимость использования квадрупольной аппроксимации МПЗ в тех задачах, для которых модель «прямой магнитный диполь» является недостаточно точной.

Публикация [69] также посвящена исследованию ротационного движения заряженного ИСЗ в МПЗ. С учетом выводов, полученных в [65], МПЗ моделируется квадрупольным приближением. Основная цель работы — исследование эволюции ротационного движения ИСЗ с учетом вековых возмущений орбиты, вызванных второй зональной гармоникой геопотенциала и проявляющихся в уходах долготы восходящего узла (с угловой скоростью k_Ω) и аргумента перигея (с угловой скоростью k_ω) при неизменной форме орбиты (определяемой фокальным параметром p и эксцентриситетом e) и постоянном наклонении орбиты i к плоскости экватора. Исследование проводится с использованием s-параметров, примененных в [70] для вывода динамических и кинематических уравнений минимальной размерности, удобных для последующего анализа с помощью асимптотических методов (см. также уравнения (38), (47) в [2]). Однако непосредственное использование указанных уравнений в рассматриваемой задаче недопустимо, поскольку вывод этих уравнений базировался на предположении о поступательном движении «перигейной» системы координат [15], которое не выполняется при наличии регрессии орбиты. В рассматриваемой задаче «перигейная» система координат вращается с угловой скоростью $\vec{k} = \vec{k}_\Omega + \vec{k}_\omega$, где

$$k_\Omega = \dot{\Omega} = -\omega_0 \tilde{\varepsilon} (R_e/p)^2 \cos i, \;\; k_\omega = \dot{\omega}_\pi = 0.5\omega_0 \tilde{\varepsilon} (R_e/p)^2 (5\cos^2 i - 1), \;\; \omega_0 = \sqrt{\mu/a^3}$$

— среднее движение ИСЗ, μ — гравитационная постоянная Земли, a — большая полуось орбиты ИСЗ, R_e — экваториальный радиус Земли, $\tilde{\varepsilon} \approx 0.0016239$ — безразмерная постоянная, определяемая величиной сжатия Земли.

Поэтому в [69] используется теорема об изменении кинетического момента для вывода новых уравнений, обобщающих уравнения (47) из [2] и справедливых для ИСЗ на регрессирующей орбите. Полученные уравнения записаны в виде

$$\dot{L} = M_3, \;\; \dot{\rho} = M_1/L + k_\Omega \sin i \sin\Sigma, \;\; \dot{\Sigma} = M_2/(L\sin\rho) + k_\Omega(\sin i \cos\Sigma \operatorname{ctg}\rho - \cos i), \quad (41)$$

где угол $-\Sigma$ представляет собой дополнение до $\pi/2$ угла между линией узлов и составляющей вектора $\vec{L}$ в плоскости орбиты ИСЗ. Ориентация ИСЗ относительно системы $CL_1L_2L_3$ определяется с помощью s-параметров, для которых в [69] получены кинематические уравнения

$$(\dot{s}_1, \dot{s}_2, \dot{s}_3)^\top = L\mathbb{B}(A_{31}/A, A_{32}/B, A_{33}/C)^\top - \\ - L^{-1}\mathbb{B}^\top(-M_2, M_1, M_2 \operatorname{ctg}\rho + Lk_\Omega \sin i \cos\Sigma/\sin\rho)^\top, \quad (42)$$

обобщающие кинематические уравнения (38) из [2] и справедливые для ИСЗ на регрессирующей орбите. Здесь элементы A_{31}, A_{32}, A_{33} матрицы $\mathbb{A}$ и элементы матрицы $\mathbb{B}$ являются известными функциями переменных s_1, s_2, s_3. В явном виде они приведены соответственно в формулах (45) и (46) из [2]. Дифференциальные уравнения (41), (42) справедливы для ИСЗ с произвольными моментами инерции.

Далее в [69] рассматривается случай динамически симметричного ИСЗ ($A = B$), центр заряда которого находится на оси динамической симметрии Cz и смещен относительно центра масс на величину z_0. Момент $\vec{M}_L$ аппроксимируется выражением (33), в котором теперь $\vec{v}_C = \dot{\vec{R}} + \vec{k} \times \vec{R} - \vec{\omega}_E \times \vec{R}$. Момент $\vec{M}_G$ записывается с учетом полярного сжатия Земли.

Для выявления вековых эффектов в эволюции ротационного движения заряженного ИСЗ целесообразно провести усреднение системы (41), (42) по «быстрым» переменным s_1, s_2, s_3. В [70] показано, что усреднение любой непрерывной на конфигурационном s-пространстве функции s-параметров (например, возмущающего момента) по невозмущенному движению динамически симметричного твердого тела можно заменить усреднением по конфигурационному s-пространству. С этой точки зрения s-параметры оказались идеальными «быстрыми» переменными.

С учетом этого результата произведено усреднение возмущающих моментов (гравитационного $\vec{M}_G$ и лоренцева $\vec{M}_L$) в уравнениях (41) по конфигурационному s-пространству. Получен первый интеграл $L = L_0$ и два дифференциальных уравнения для «медленных» переменных ρ и Σ, зависящих от $\langle \vec{M}_G \rangle_s$ и $\langle \vec{M}_L \rangle_s$. Далее эти уравнения усреднены по переменной $\tau = \omega_0 t$ за период $T_1 = 2\pi/\omega_0$ обращения центра масс ИСЗ и по переменной ϕ за период $T_2 = 2\pi/(\omega_E - k_\Omega)$ обращения МПЗ относительно линии узлов. При этом учтено, что $\langle \vec{M}_G \rangle_s$ и $\langle \vec{M}_L \rangle_s$ зависят явным образом от истинной аномалии ν и усреднение по τ можно заменить усреднением по ν, пользуясь известным соотношением $\dfrac{d\tau}{d\nu} = (1-e^2)^{3/2}(1+e\cos\nu)^{-2}$. Поэтому для усреднения некоторой функции $f(\nu, \phi)$ можно использовать формулу

$$\langle f \rangle_{\nu,\phi} = \frac{1}{T_1 T_2} \int\limits_0^{T_1} \int\limits_0^{T_2} f(\nu, \phi)\, dt_1\, dt_2 = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{4\pi^2} \int\limits_0^{T_1} \int\limits_0^{T_2} \frac{f(\nu, \phi) d\nu d\phi}{(1+e\cos\nu)^2}.$$

Далее в [69] выписываются дифференциальные уравнения, которые даже в усредненном варианте достаточно громоздки и поэтому здесь не приводятся, и дается их анализ для характерных и важных частных случаев.

Так, в случае, когда $A = C$, $i = 0$, усредненные уравнения качественно совпадают с уравнениями (39), но коэффициенты имеют другой смысл. В частности, параметр a отличен от нуля лишь на эллиптической орбите ($e \neq 0$) при $z_0 \neq 0$, а параметр d отличен от нуля лишь при одновременном учете квадрупольного коэффициента g_2^0 и полярного сжатия Земли.

В случае $A = C$, $i \neq 0$ также обнаружено существенное влияние квадрупольной составляющей МПЗ и полярного сжатия Земли на качественные характеристики ротационного движения ИСЗ.

Совместное влияние гравитационного (при $A \neq C$) и лоренцева возмущающих моментов проанализировано для двух случаев. Вначале рассмотрен случай круговой экваториальной орбиты ($i = 0$). Получены усредненные дифференциальные уравнения, напоминающие уравнения (31). При этом обнаружено, что учет сжатия Земли приводит к появлению качественно иных траекторий апекса вектора $\vec{L}$, а также к появлению двух новых полюсов, не лежащих на меридианах $\sigma = 0$ и $\sigma = \pi$.

Затем рассмотрен вариант, когда невозмущенная орбита является круговой и слабонаклонной ($i \neq 0$, но $\sin^2 i \ll \sin i$). При этом усредненные дифференциальные уравнения ротационного движения ИСЗ имеют вид

$$\frac{d\rho}{d\tau} = b_1 \sin\Sigma + g_1 \cos\rho \sin\Sigma, \ \frac{d\Sigma}{d\tau} = b_1 \operatorname{ctg}\rho \cos\Sigma + c_1 + g_1 \frac{\cos 2\rho}{\sin\rho} \cos\Sigma + g_6 \cos\rho. \quad (43)$$

Отсюда следует, что учет сжатия Земли приводит не только к количественным изменениям в системе (43) (коэффициенты b_1 и g_6), но и вызывает появление слагаемых (с множителем g_1), качественно изменяющих структуру уравнений. Показано, что уравнения (43) допускают первый интеграл $b_1 \sin\rho \cos\Sigma + g_1 \sin\rho \cos\rho \cos\Sigma - c_1 \cos\rho -$

$g_6 \cos^2 \rho/2 = h = \text{const}$, с помощью которого можно выразить $\cos \Sigma$ через ρ, подставить в первое уравнение системы (43), ввести новую переменную $x = \cos \rho$ и получить для нее дифференциальное уравнение $(d\rho/d\tau)^2 = (1-x^2)(b_1+g_1 x)^2 - (h+c_1 x + g_6 x^2/2)^2$. Таким образом, задача интегрирования системы (43) сведена к квадратурам, что позволяет найти закон движения вектора $\vec{L}$. Проведен также подробный геометрический анализ траекторий апекса вектора $\vec{L}$ на сфере $L = L_0$, вращающейся в абсолютной системе координат с угловой скоростью $\vec{k}_\Omega$. Установлено, что характер расположения полюсов и соответствующих им траекторий апекса вектора $\vec{L}$ обусловлены совместным влиянием трех факторов: сжатием Земли и моментами $\vec{M}_G$ и $\vec{M}_L$, причем в $\vec{M}_L$ решающую роль играет квадрупольная составляющая МПЗ.

12. Заключение. В 1970-е годы в связи с развитием космонавтики и общим интенсивным освоением космического пространства стали разрабатываться системы активной радиационной защиты ИСЗ, что привело к появлению новой актуальной проблемы динамики твердого тела, связанной с изучением электродинамического эффекта влияния лоренцевых сил и моментов на движение заряженного твердого тела в суперпозиции гравитационного и магнитного полей. Исследованию этой проблемы посвящено немало публикаций ученых СПбГУ, начиная с 1981 г. В данной работе анализируются публикации, посвященные динамике неуправляемого движения заряженного твердого тела в гравитационном и магнитном полях Земли. Вопросы динамики управляемого движения заряженного твердого тела в геофизических полях предполагается рассмотреть в следующей части обзора.

Литература

1. Тихонов А. А. Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 1. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 3, 457–486 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.303

2. Тихонов А. А. Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 2. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 2, 259–302 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.203

3. Тихонов А. А. Динамика твердого тела от уравнений Эйлера до управления угловым движением ИСЗ в трудах ученых СПбГУ. Ч. 3. *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия* **11** (69), вып. 3, 455–476 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.303

4. Григорьев Ю. Г. *Радиационная безопасность космических полетов.* Москва, Атомиздат (1975).

5. Ковалев Е. Е. *Радиационный риск на Земле и в космосе.* Москва, Атомиздат (1976).

6. Труханов К. А., Рябова Т. Я., Морозов Д. Х. *Активная защита космических кораблей.* Москва, Атомиздат (1970).

7. Ковалев Е. Е., Молчанов Э. Д., Пехтерев Ю. Г., Рябова Т. Я., Тихомиров Б. И., Хованская А. И. Исследование основных характеристик электростатической защиты от космических излучений на ИСЗ «Космос-605». 1. Методика измерений и комплекс научной аппаратуры. *Космические исследования* **13** (5), 171–177 (1975).

8. Кузнецов Л. И. Плоские колебания тела на круговой орбите под действием лоренцевых сил. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2** (8), 72–76 (1981).

9. Кузнецов Л. И. О влиянии электрического заряда на вращательное движение спутника Земли. *Прикладная механика* **5**, 78–83. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1981).

10. Чикова Н. В. Возмущение лоренцевыми силами вращательного движения тела в центральном гравитационном поле. *Прикладная механика* **5**, 38–47. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1981).

11. Чикова Н. В. Резонансные колебания тела на круговой орбите под действием лоренцевых сил. *Вестник Ленинградского университетета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1** (1), 90–94 (1981).

12. Кузнецов Л. И., Чикова Н. В. О прямых положениях равновесия, их устойчивости и колебаниях спутника с электростатической защитой. *Прикладная механика* **5**, 28–38. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1981).

13. Ляховка Г. В. Влияние гравитационных сил и сил Лоренца на движение спутника относительно центра масс. *Вестник Ленинградского университетета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **13**, (1981).

14. Ляховка Г. В. Частные случаи движения тела с экраном электростатической защиты относительно центра масс. *Прикл. механика* **5**, 48–63. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1981).

15. Белецкий В. В. *Движение искусственного спутника относительно центра масс.* Москва, Наука (1965).

16. Tikhonov A. A., Yakovlev A. B. On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters. *International Journal of Plasma Environmental Science and Technology* **13** (1), 49–52 (2019). https://doi.org/10.34343/ijpest.2019.13.01.049

17. Чикова Н. В. О влиянии смещения центра защитной сферы на колебания тела под действием лоренцевых сил в условиях резонанса. *Вестник Ленинградского университетета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **19** (1982).

18. Чикова Н. В. О нелинейных резонансах в задаче движения тела около центра масс под действием лоренцевых сил. *Вестник Ленинградского университетета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1** (1), 85–91 (1983).

19. Кузнецова Т. И., Кузнецов Л. И. О вращении ИСЗ под действием гравитационных сил и сил взаимодействия с магнитным полем Земли. *Прикладная механика* **7**, 23–28. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1988).

20. Чикова Н. В. К задаче о резонансных колебаниях тела на круговой орбите под действием лоренцевых сил. *Прикладная механика* **7**, 34–38. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1988).

21. Кузнецов Л. И., Пасынков В. Е. Динамика ИСЗ с гистерезисными стержнями. *Прикладная механика* **3**, 130–141. Ленинград, Изд-во Ленингр. ун-та (1977).

22. Пасынкова И. А., Хедджо М. Об устойчивости регулярных прецессий ИСЗ с защитным экраном. В: *Динамика и устойчивость механических систем.* Товстик П. Е. (ред.) (*Прикладная механика* **9**), 71–78. Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (1995).

23. Белецкий В. В. *Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле.* Москва, Изд-во Москов. ун-та (1975).

24. Bentsik E. Precessioni regolari di un giriscopio soggetto a forze newtoniane e a forze di potenza nulla. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **54** (1975).

25. Bentsik E. Rotazioni uniformi in un campo newtoniano con forze di potenza nulla. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **54**, 83–90 (1975).

26. Лунев В. В. *Вращательное движение заряженного твердого тела в магнитном поле.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ленинград (1979).

27. Кузнецов Л. И., Тихонов А. А. К вопросу о влиянии электрического заряда на вращательное движение спутника Земли. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1** (1), 113–115 (1985).

28. Тихонов А. А. О влиянии неоднородности геомагнитного поля на динамику экранированного спутника *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2** (8), 67–73 (1987).

29. Тихонов А. А. К вопросу о влиянии неоднородности геомагнитного поля на динамику экранированного тела; *Ред. ж. Вестник Ленинградского университета. Математика. Механика. Астрономия* (1987). (Рукопись деп. в ВИНИТИ 04.08.87. № 5566–В87)

30. Кузнецов Л. И., Тихонов А. А. Об устойчивости положений равновесия экранированного спутника Земли. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1** (1), 66–71 (1989).

31. Тихонов А. А. *Некоторые задачи динамики заряженного твердого тела в магнитном поле.* Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ленинград (1989).

32. Коваленко А. П. *Магнитные системы управления космическими летательными аппаратами.* Москва, Машиностроение (1975).

33. Тихонов А. А. Интегрируемый случай вращательного движения гиростата в гравитационном и магнитном полях Земли. *Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. 1* **2**, 89–96 (2009).

34. Тихонов А. А. О резонансных колебаниях заряженного тела в магнитном поле. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3** (15), 113–115 (1988).

35. Тихонов А. А. Влияние эллиптичности орбиты на плоские колебания тела под действием лоренцевых сил. В: *Устойчивость и колебания механических систем.* (*Прикладная механика* **7**), 28–34. Ленинград: Изд-во Ленинград. ун-та (1988).

36. Тихонов А. А. Резонансные колебания экранированного тела в геомагнитном поле. *Прикладная механика* **8**, 28–38. Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та (1990).

37. Тихонов А. А. О колебаниях экранированного ИСЗ в плоскости слабоэллиптической орбиты. В: *Динамика и устойчивость механических систем.* Товстик П. Е. (ред). (*Прикладная механика* **9**), 90–101. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петерб. ун-та (1995).

38. Тихонов А. А. О влиянии асимметрии заряда на вращательное движение экранированного тела в геомагнитном поле. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4** (22), 64–69 (1987).

39. Пасынкова И. А., Хедждо М. Коническая прецессия ИСЗ с цилиндрическим защитным экраном. В: *К 90-летию со дня рождения проф. Н. Н. Поляхова*: Межвуз. сб. Товстик П. Е. (ред.) (*Прикладная механика* **10**), 31–41. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петерб. ун-та (1997).

40. Тихонов А. А. О стабилизации заряженного тела в магнитном поле Земли; *Ред. ж. Вестник Ленинградского университета. Математика. Механика. Астрономия.* (1988). (Рукопись деп. в ВИНИТИ 22.02.88, № 1396–В88)

41. Тихонов А. А. Об уравнениях вращательного движения заряженного твердого тела в геомагнитном поле. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3** (15), 83–87 (1990).

42. Тихонов А. А. К вопросу о нелинейных резонансных колебаниях твердого тела под действием гравитационных и лоренцевых сил. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2** (8), 110–111 (1990).

43. Тихонов А. А. О нелинейных резонансных колебаниях заряженного твердого тела в условиях нестационарного магнитного поля. Ч. 1. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3** (15), 60–65 (1992).

44. Тихонов А. А. О нелинейных резонансных колебаниях заряженного твердого тела в условиях нестационарного магнитного поля. Ч. 2. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4** (22), 86–91 (1992).

45. Тихонов А. А. Влияние резонансных возмущений на колебания гравитационно-ориентированного твердого тела. В: *К 90-летию со дня рождения проф. Н. Н. Поляхова*: Межвуз. сб. Товстик П. Е. (ред.) (*Прикладная механика* **10**), 214–215. Санкт-Петербург: Изд-во С.-Петерб. ун-та (1997).

46. Тихонов А. А., Алехина О. Ю. Нелинейные резонансы в задаче о либрационном движении ИСЗ при квадрупольной аппроксимации геомагнитного поля. В: *Проблемы аналитической механики и теории устойчивости: сб. избр. научн. статей, посвящ. памяти акад. В. В. Румянцева.* 148–160. Москва (2009).

47. Тихонов А. А. Об одной форме дифференциальных уравнений возмущенного движения гравитационно-ориентированного твердого тела. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1**, 71–75 (1990).

48. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **73**, 51–57 (2015). https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.006

49. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. On Nonlinear Resonances in Oscillations of Charged Satellite. *2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading, February 2–6, St. Petersburg.* St. Petersburg (2015). https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106740

50. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. On Nonlinear Resonances in Oscillations of Charged Satellite. *2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov (SCP), October 5–9, St. Petersburg.* 95–98. St. Petersburg (2015). https://doi.org/10.1109/SCP.2015.7342073

51. Тихонов А. А., Тхай В. Н. Симметричные колебания в задаче о вращательном движении гиростата на слабоэллиптической орбите в гравитационном и магнитном полях. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2** (60), вып. 2, 278–286 (2015).

52. Tikhonov A. A., Tkhai V. N. On symmetrical oscillations of gyrostat in weak elliptic orbit. *2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading, February 2–6, St. Petersburg.* St. Petersburg (2015). https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106784

53. Tikhonov A. A., Tkhai V. N. Symmetrical oscillations of charged gyrostat in weakly elliptical orbit with small inclination. *Nonlinear Dynamics* **85** (3), 1919–1927 (2016). https://doi.org/10.1007/s11071-016-2805-2

54. Тхай В. Н. Обратимость механических систем. *Прикладная математика и механика* **55** (4), 578–586 (1991).

55. Ляховка Г. В. О резонансном вращении спутника, окруженного наэлектризованной сферой. *Прикладная механика* **7**, 175–178. Ленинград, Изд-во Ленинград. ун-та (1988).

56. Ляховка Г. В. О движении спутника относительно центра масс под действием аэродинамических сил и сил Лоренца. *Прикладная механика* **6**, 27–31. Лениград, Изд-во Ленингр. ун-та (1984).

57. Ляховка Г. В. О вращении спутника вокруг центра масс под действием лоренцевых сил при резонансе. *Космические исследования* **24** (6), 821–825 (1986).

58. Ляховка Г. В. Резонансное вращение спутника на эллиптической экваториальной орбите под действием лоренцевых сил. *Космические исследования* **25** (4), 635–638 (1987).

59. Ляховка Г. В. Движение спутника относительно центра масс с учетом сил Лоренца и сил светового давления. *Изв. РАН. Мех. тверд. тела* **1**, 100–102 (1988).

60. Ляховка Г. В. Влияние геомагнитного поля на вращение спутника с наэлектризованным экраном. *Пробл. мех. и упр.: Нелин. динам. системы*, 106–112. Пермь, Перм. ун-т (1995).

61. Тихонов А. А. К вопросу об эволюции ротационного движения экранированного ИСЗ. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **4** (22), 104–105 (1990).

62. Тихонов А. А. Влияние неоднородности геомагнитного поля на эволюцию ротационного движения заряженного твердого тела. *Вестник Ленинградского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **2** (8), 90–99 (1991).

63. Волкова А. В., Тихомолов М. Е., Тихонов А. А. Об эволюции ротационного движения экранированного спутника Земли на экваториальной орбите; *Ред. ж. Вестник Ленинградского университета. Математика. Механика. Астрономия* (1991). (Рукопись деп. в ВИНИТИ 29.07.91, № 3219–В91)

64. Ляховка Г. В., Тихонов А. А. О вращательном движении ИСЗ в магнитном поле Земли. *Космические исследования* **32** (4–5), 62–67 (1994).

65. Тихонов А. А. Уточнение модели «наклонный диполь» в задаче об эволюции вращательного движения заряженного тела в геомагнитном поле. *Космические исследования* **40** (2), 171–177 (2002).

66. Тихонов А. А. Вычисление главного момента лоренцевых сил, действующих на заряженное тело в дипольном магнитном поле. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1** (1), 81–86 (1994).

67. Петров К. Г., Тихонов А. А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 1. Напряженность магнитного поля Земли в орбитальной системе координат. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **1** (1), 92–100 (1999).

68. Петров К. Г., Тихонов А. А. Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 2. Вычисление момента и оценки его составляющих. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. Математика. Механика. Астрономия* **3** (15), 81–91 (1999).

69. Тихонов А. А. О вековой эволюции ротационного движения заряженного ИСЗ на регрессирующей орбите. *Космические исследования* **43** (2), 111–125 (2005).

70. Петров К. Г., Тихонов А. А. Уравнения ротационного движения твердого тела, основанные на использовании кватернионных параметров. *Известия РАН. Механика твердого тела* **3**, 3–16 (2002).

Статья поступила в редакцию 25 января 2024 г.;
доработана 6 мая 2024 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Тихонов Алексей Александрович — д-р физ.-мат. наук, проф.;
https://orcid.org/0000-0003-0838-5876, a.tikhonov@spbu.ru

Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 4*

A. A. Tikhonov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Tikhonov A. A. Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 4. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 627–662. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.402 (In Russian)

This article is a continuation of the survey dedicated to the 300^{th} anniversary of Saint Petersburg State University and is an attempt to analyze the scientific achievements of the St. Petersburg School of Mechanics in the field of rigid body dynamics. This, the fourth part of the review, is devoted to studies of the dynamics of the uncontrolled motion of a charged rigid body in the gravitational and magnetic fields of the Earth.

Keywords: rigid body, spacecraft, artificial Earth satellite, dynamics, attitude motion, attitude control, stabilization, oscillations, Lorentz torque.

References

1. Tikhonov A. A. Rigid-Body Dynamics from the Euler Equations to the Attitude Control of Spacecraft in the Works of Scientists from Saint Petersburg State University. Part 1. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 3, 457–486 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.303 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 3, 322–340 (2023). https://doi.org/10.1134/S1063454123030081].

2. Tikhonov A. A. Rigid-Body Dynamics from the Euler Equations to the Attitude Control of Spacecraft in the Works of Scientists from Saint Petersburg State University. Part 2. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 2, 259–302 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.203 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **57** (2), 171–201 (2024)].

3. Tikhonov A. A. Rigid-Body Dynamics from the Euler Equations to the Attitude Control of Spacecraft in the Works of Scientists from Saint Petersburg State University. Part 3. *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **11** (69), iss. 3, 455–476 (2024). https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.303 (In Russian)

4. Grigoriev Yu. G. *Radiation safety of space flights.* Moscow, Atomizdat Publ. (1975). (In Russian)

5. Kovalev E. E. *Radiation risk on Earth and in space.* Moscow, Atomizdat Publ. (1976). (In Russian)

6. Trukhanov K. A., Ryabova T. Ya., Morozov D. Kh. *Active protection of spaceships.* Moscow, Atomizdat Publ. (1970). (In Russian)

7. Kovalev E. E., Molchanov E. D., Pekhterev Yu. G., Riabova T. Ya., Tikhomirov B. I., Khovanskaia A. I. Study of the main characteristics of electrostatic protection against cosmic radiation on the satellite “Cosmos-605”. 1. Methods of measurements and a complex of scientific equipment. *Cosmic Research* **13** (5), 171–177 (1975). (In Russian)

8. Kuznetsov L. I. Plane oscillations of a body in a circular orbit under the action of Lorentz forces. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (8), 72–76 (1981). (In Russian)

9. Kuznetsov L. I. On the effect of an electric charge on the rotational motion of an Earth satellite. *Applied Mechanics* **5**, 78–83. Leningrad, Leningrad University Press (1981). (In Russian)

*The research was funded by the Russian Science Foundation no. 24-41-02031, https://rscf.ru/project/24-41-02031/.

See the third part: Tikhonov A. A. Rigid body dynamics from the Euler equations to the spacecraft attitude control in the works of scientists from Saint Petersburg State University. Part 3. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 3, pp. 455–476. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.303

10. Chikova N. V. Perturbation by Lorentz forces of rotational motion of a body in a central gravitational field. *Applied Mechanics* **5**, 38–47. Leningrad, Leningrad University Press (1981). (In Russian)

11. Chikova N. V. Resonant vibrations of a body in a circular orbit under the action of Lorentz forces. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (1), 90–94 (1981). (In Russian)

12. Kuznetsov L. I., Chikova N. V. On direct equilibrium positions, their stability and oscillations of a satellite with electrostatic protection. *Applied Mechanics*, **5**, 28–38. Leningrad, Leningrad University Press (1981). (In Russian)

13. Lyakhovka G. V. Influence of gravitational forces and Lorentz forces on the motion of a satellite relative to the center of mass. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **13** (1981). (In Russian)

14. Lyakhovka G. V. Particular cases of body movement with an electrostatic protection screen relative to the center of mass. *Applied Mechanics* **5**, 48–63. Leningrad, Leningrad University Press (1981). (In Russian)

15. Beletskii V. V. *Motion of an Artificial Satellite with Respect to the Center of Mass.* Moscow, Nauka Publ. (1965). (In Russian)

16. Tikhonov A. A., Yakovlev A. B. On dependence of equilibrium characteristics of the space tethered system on environmental parameters. *International Journal of Plasma Environmental Science and Technology* **13** (1), 49–52 (2019). https://doi.org/10.34343/ijpest.2019.13.01.049

17. Chikova N. V. On the effect of displacement of the center of the protective sphere on body vibrations under the action of Lorentz forces in resonance conditions. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **19** (1982). (In Russian)

18. Chikova N. V. On nonlinear resonances in the problem of body motion near the center of mass under the action of Lorentz forces. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (1), 85–91 (1983). (In Russian)

19. Kuznetsova T. I., Kuznetsov L. I. On the rotation of the satellite under the action of gravitational forces and forces of interaction with the Earth's magnetic field. *Applied Mechanics* **7**, 23–28. Leningrad, Leningrad University Press (1988). (In Russian)

20. Chikova N. V. On the problem of resonant vibrations of a body in a circular orbit under the action of Lorentz forces. *Applied Mechanics.* **7**, 34–38. Leningrad, Leningrad University Press (1988). (In Russian)

21. Kuznetsov L. I., Pasynkov V. E. Dynamics of a satellite with hysteresis rods. *Applied Mechanics* **3**, 130–141. Leningrad, Leningrad University Press (1977). (In Russian)

22. Pasinkova I. A., Hedzho M. On the stability of regular precessions of an ISS with a protective screen. In: *Dynamics and stability of mechanical systems.* Tovstik P. E. (ed.). (*Applied Mechanics* **9**), 71–78. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1995). (In Russian)

23. Beletsky V. V. *Motion of a satellite about its center of mass in field of gravity.* Moscow, Moscow University Press (1975). (In Russian)

24. Bentsik E. Precessioni regolari di un giriscopio soggetto a forze newtoniane e a forze di potenza nulla. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **54**, (1975).

25. Bentsik E. Rotazioni uniformi in un campo newtoniano con forze di potenza nulla. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **54**, 83–90 (1975).

26. Lunev V. V. *Rotational motion of a charged solid in a magnetic field.* Dis. ... PhD fiz.-mat. nauk. Leningrad (1979). (In Russian)

27. Kuznetsov L. I., Tikhonov A. A. On the problem of the effect of an electric charge on the rotational motion of an Earth satellite. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (1), 113–115 (1985). (In Russian)

28. Tikhonov A. A. On the influence of the nonuniformity of the geomagnetic field on the dynamics of a shielded satellite. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (8), 67–73 (1987). (In Russian)

29. Tikhonov A. A. On the problem of the influence of the heterogeneity of the geomagnetic field on the dynamics of a shielded body; *Ed. Vestnik Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy.* Leningrad, (1987). (Manuscript deposed in VINITI 04.08.87, no. 5566–B87). (In Russian)

30. Kuznetsov L. I., Tikhonov A. A. On the stability of the equilibrium positions of a shielded Earth satellite. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (1), 66–71 (1989). (In Russian)

31. Tikhonov A. A. *Some problems of dynamics of a charged solid in a magnetic field.* Dis. ... Phd fiz.-mat. nauk. Leningrad (1989). (In Russian)

32. Kovalenko A. P. *Magnetic control systems for space aircraft.* Moscow, Mashinostroyeniye Publ. (1975). (In Russian)

33. Tikhonov A. A. Integrable case of gyrostat rotational motion in the gravitational and magnetic fields of the Earth. *Vestn. Udmurt. University. Ser. 1* **2**, 89–96 (2009). (In Russian)

34. Tikhonov A. A. On resonant vibrations of a charged body in a magnetic field. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (15), 113–115 (1988). (In Russian)

35. Tikhonov A. A. The influence of ellipticity of the orbit on plane oscillations of a body under the action of Lorentz forces. In: *Stability and vibrations of mechanical systems.* (*Applied Mechanics* **7**), 28–34. Leningrad, Leningrad University Press (1988). (In Russian)

36. Tikhonov A. A. Resonant vibrations of a shielded body in a geomagnetic field. In: *Stability and vibrations of mechanical systems.* (*Applied Mechanics* **8**), 28–38. Leningrad: Leningrad University Press (1988). (In Russian)

37. Tikhonov A. A. On oscillations of a shielded satellite in the plane of a weakly elliptical orbit. In: *Dynamics and stability of mechanical systems.* Tovstik P. E. (ed.). (*Applied Mechanics* **9**), 90–101. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1995). (In Russian)

38. Tikhonov A. A. On the effect of charge asymmetry on the rotational motion of a shielded body in a geomagnetic field. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (22), 64–69 (1987). (In Russian)

39. Pasinkova I. A., Hedzho M. Conical precession of a satellite with a cylindrical protective screen. In: *To the 90th anniversary of the birth of Prof. N. N. Polyakhov.* Tovstik P. E. (ed.) (*Applied Mechanics* **10**), 31–41. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1997). (In Russian)

40. Tikhonov A. A. On stabilization of a charged body in the Earth's magnetic field. *Ed. Vestnik Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy.* Leningrad, (1988). (Manuscript deposed in VINITI 22.02.88, no. 1396–B88). (In Russian)

41. Tikhonov A. A. On the equations of rotational motion of a charged solid in a geomagnetic field. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (15), 83–87 (1990). (In Russian)

42. Tikhonov A. A. On the issue of nonlinear resonant vibrations of a solid body under the action of gravitational and Lorentz forces. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (8), 110–111 (1990). (In Russian)

43. Tikhonov A. A. On nonlinear resonant vibrations of a charged solid under conditions of an unsteady magnetic field. Part 1. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (15), 60–65 (1992). (In Russian)

44. Tikhonov A. A. On nonlinear resonant vibrations of a charged solid under conditions of an unsteady magnetic field. Part 2. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (22), 86–91 (1992). (In Russian)

45. Tikhonov A. A. The influence of resonant perturbations on vibrations of a gravitationally oriented solid body. In: *To the 90*$^{\text{th}}$ *anniversary of the birth of Professor N. N. Polyakhov*: Mezhvuz. sb. Tovstik P. E. (ed.) (*Applied Mechanics* **10**), 214–215. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1997). (In Russian)

46. Tikhonov A. A., Alyokhina O. Yu. Nonlinear resonances in the problem of libration motion of a satellite with quadrupole approximation of the geomagnetic field. In: *Problems of analytical mechanics and theory of stability — collection of selected scientific articles, dedicated to the memory of Acad. V. V. Rumyantsev*, 148–160. Moscow (2009). (In Russian)

47. Tikhonov A. A. On one form of differential equations of perturbed motion of a gravitationally oriented rigid body. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (1), 71–75 (1990). (In Russian)

48. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. Differential equations for librational motion of gravity-oriented rigid body. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **73**, 51–57 (2015). https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.11.006

49. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. On Nonlinear Resonances in Oscillations of Charged Satellite. *2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading, February 2–6, St. Petersburg.* St. Petersburg (2015). https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106740

50. Kosjakov E. A., Tikhonov A. A. On Nonlinear Resonances in Oscillations of Charged Satellite. *2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V. I. Zubov (SCP), October 5–9, St. Petersburg*, 95–98. St. Petersburg (2015). https://doi.org/10.1109/SCP.2015.7342073

51. Tikhonov A. A., Tkhai V. N. Symmetric oscillations in the problem of rotational motion of a gyrostat in a weakly elliptical orbit in gravitational and magnetic fields. *Vestnik of Saint Petersburg University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2**, 278–286 (2015). (In Russian)

52. Tikhonov A. A., Tkhai V. N. On symmetrical oscillations of gyrostat in weak elliptic orbit. *2015 International Conference on Mechanics — Seventh Polyakhov's Reading, February 2–6, St. Petersburg.* St. Petersburg (2015). https://doi.org/10.1109/POLYAKHOV.2015.7106784

53. Tikhonov A. A., Tkhai V. N. Symmetrical oscillations of charged gyrostat in weakly elliptical orbit with small inclination. *Nonlinear Dynamics* **85** (3), 1919–1927 (2016). https://doi.org/10.1007/s11071-016-2805-2

54. Thai V. N. Reversibility of mechanical systems. *Applied mathematics and mechanics* **55** (4), 578–586 (1991). (In Russian)

55. Lyakhovka G. V. On the resonant rotation of a satellite surrounded by an electrified sphere. *Applied Mechanics* **7**, 175–178. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1988). (In Russian)

56. Lyakhovka G. V. On the motion of a satellite relative to the center of mass under the action of aerodynamic forces and Lorentz forces. *Applied Mechanics* **6**, 27–31. St. Petersburg, St. Petersburg University Press (1984). (In Russian)

57. Lyakhovka G. V. On the rotation of a satellite around the center of mass under the action of Lorentz forces at resonance. *Cosmic research* **24** (6), 821–825 (1986). (In Russian)

58. Lyakhovka G. V. Resonant rotation of a satellite in an elliptical equatorial orbit under the action of Lorentz forces. *Cosmic research* **25** (4), 635–638 (1987). (In Russian)

59. Lyakhovka G. V. Motion of the satellite relative to the center of mass, taking into account the Lorentz forces and light pressure forces. *Mechanics of Solids* **1**, 100–102 (1988). (In Russian)

60. Lyakhovka G. V. The influence of the geomagnetic field on the rotation of a satellite with an electrified screen. *Probl. mekh. and control: Nonlin. dynam. Systems* 106–112. Perm, Perm State University (1995). (In Russian)

61. Tikhonov A. A. On the problem of the evolution of the rotational motion of a shielded satellite. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **4** (22), 104–105 (1990). (In Russian)

62. Tikhonov A. A. Influence of the nonuniformity of the geomagnetic field on the evolution of the rotational motion of a charged rigid body. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **2** (8), 90–99 (1991). (In Russian)

63. Volkova A. V., Tikhomolov M. E., Tikhonov A. A. On the evolution of the rotational motion of a shielded Earth satellite in an equatorial orbit; *Ed. Vestnik Leningrad University. Mathematics. Mechanics. Astronomy (Manuscript deposed in VINITI 29.07.91, no. 3219–B91)* (1991). (In Russian)

64. Lyakhovka G. V., Tikhonov A. A. On the rotational motion of a satellite in the Earth's magnetic field. *Cosmic. Research* **32** (4–5), 62–67 (1994). (In Russian)

65. Tikhonov A. A. Refinement of the "inclined dipole" model in the problem of the evolution of the rotational motion of a charged body in a geomagnetic field. *Cosmic. research* **40** (2), 171–177 (2002). (In Russian)

66. Tikhonov A. A. Calculation of the main moment of Lorentz forces acting on a charged body in a dipole magnetic field. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (1), 81–86 (1994). (In Russian)

67. Petrov K. G., Tikhonov A. A. The moment of Lorentz forces acting on a charged satellite in the Earth's magnetic field. Part 1. The intensity of the Earth's magnetic field in the orbital coordinate system. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **1** (1), 92–100 (1999). (In Russian)

68. Petrov K. G., Tikhonov A. A. The moment of Lorentz forces acting on a charged satellite in the Earth's magnetic field. Part 2: Calculation of the moment and estimates of its components. *Vestnik of Leningrad University. Ser. 1. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **3** (15), 81–91 (1999). (In Russian)

69. Tikhonov A. A. On the secular evolution of the rotational motion of a charged satellite in a decaying orbit. *Cosmic. Research* **43** (2), 111–125 (2005). (In Russian)

70. Petrov K. G., Tikhonov A. A. Equations of rotational motion of a rigid body based on the use of quaternion parameters. *Mechanics of Solids* **1**, 3–16 (2002). (In Russian)

Received: January 25, 2024
Revised: May 6, 2024
Accepted: May 23, 2024

Author's information:

Alexey A. Tikhonov — https://orcid.org/0000-0003-0838-5876, a.tikhonov@spbu.ru