МАТЕМАТИКА

УДК 519.2
MSC 60E05, 62E10, 62G32

О сериях успехов в бернуллиевских последовательностях случайных величин

С. М. Ананьевский, В. Б. Невзоров

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Ананьевский С. М., Невзоров В. Б.* О сериях успехов в бернуллиевских последовательностях случайных величин // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 663–670.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.403

Некоторые из первых исследований в теории вероятностей были связаны со схемами Бернулли — последовательностями независимых одинаково распределенных случайных величин, принимающих значения 1 с определенной вероятностью $0 < p < 1$ и 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Исследование последовательностей таких случайных величин привело к необходимости иметь дело с геометрически распределенной случайной величиной. Предельные теоремы для правильно центрированных и нормализованных сумм потребовали рассмотрения и изучения нормально распределенных случайных величин. Работа с классическими последовательностями Бернулли и другими их двухточечными обобщениями привела к необходимости разработки различных методов их изучения, которые затем были использованы для других случайных величин. Несмотря на многочисленные результаты, полученные со времени публикации в 1713 г. монографии Якоба Бернулли «Искусство предположений», появляются все новые и новые схемы для величин Бернулли, требующие дальнейшего изучения. Данная работа является прямым продолжением статей авторов, опубликованных в 2022–2023 гг.

Ключевые слова: схема Бернулли, биномиальное распределение, геометрическое распределение, математическое ожидание.

1. Введение. Одни из первых исследований в теории вероятностей были связаны со схемами Бернулли — последовательностями независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$, принимающих значения 1 с некоторой вероятностью $0 < p < 1$ и 0 с вероятностью $q = 1 - p$. Часто для удобства события

$\{X_k = 0\}$ и $\{X_k = 1\}$, $k = 1, 2, \ldots$, трактовались как «неудача» и «успех» в k-м испытании. Суммы $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ определяли число успехов в n испытаниях и имели биномиальное $B(n, p)$-распределение с вероятностями

$$P\{S_n = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрение числа успехов до первой неудачной попытки привело к необходимости иметь дело с геометрически $Geom(p)$-распределенной случайной величиной Y, распределение которой задается равенствами

$$P\{Y = n\} = (1 - p)p^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Предельные теоремы для надлежащим образом центрированных и нормированных сумм S_n потребовали рассмотрения и изучения нормально распределенных случайных величин.

Работы с классическими бернуллиевскими последовательностями и другими их двухточечными обобщениями привели к необходимости разработки различных методов для их изучения, которые затем использовались и для других случайных величин.

Несмотря на множество результатов, полученных, начиная со времен опубликования в 1713 г. монографии Якоба Бернулли «Искусство предположений» (Ars Conjectandi) [1], появляются новые и новые, требующие их изучения схемы для бернуллиевских величин. Некоторые такие схемы рассмотрим ниже.

Данная работа является прямым продолжением статей авторов, опубликованных в 2022–2023 гг.

2. Постановка задачи и обзор предыдущих результатов. Перейдем к сериям успехов в бернуллиевских последовательностях. Под такой серией длины k, $k = 1, 2, \ldots$, понимаем набор из k подряд идущих испытаний, проведенных между двумя неудачными попытками. Также серией успехов будем считать набор из k подряд идущих успешных испытаний до появления первой неудачной попытки, если испытания начались с успешной попытки. Если число испытаний конечно и испытания заканчиваются успешной попыткой, то набор подряд идущих успешных попыток в конце проводимых испытаний также является серией успехов. Ряд полученных для таких серий результатов можно найти в работах [2–5]. Например, получены распределения чисел успехов и их различных серий до появления первой серии, состоящей из определенного числа успехов или неудач. Приведем несколько таких результатов.

Рассмотрим следующую ситуацию. Проводятся испытания не до k-го успеха, а до момента появления первой серии в последовательности X-в, содержащей не менее k подряд появляющихся успехов. В первом томе двухтомника В. Феллера [2, глава 13, формула (7.6)] приведен вид производящей функции $F(s)$ для вероятностей

$$f(k, n) = P\{L_n\}$$

того, что первая серия, состоящая из k успешных испытаний, связана с событием

$$L_n = \{X_{n-k} = 0, X_{n-k+1} = 1, \ldots, X_{n-1} = 1, X_n = 1\}.$$

Показано, что

$$F(s) = p^k s^k (1 - ps)/(1 - s + qp^k s^{k+1}), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Если немного изменить условие и рассмотреть число испытаний до момента появления такой серии, то получим, что соответствующая производящая функция имеет вид

$$F_1(s) = p^k(1-ps)/(1-s+qp^ks^{k+1}), \qquad k=1,2,\ldots.$$

В работе [4] рассматривается число испытаний, которые надо провести, чтобы получить первую из двух ожидаемых групп — группу из k успехов или группу из l неудач. Пусть $B(k,l)$ — математическое ожидание числа успешных испытаний до момента появления первой из двух рассматриваемых групп.

В [4] получено следующее выражение для $B(k,l)$:

$$B(k,l) = \frac{(1-p^k)(1-q^l)}{pq(p^{k-1}+q^{l-1}-p^{k-1}q^{l-1})}.$$

Там же приведено несколько частных случаев:

$$B(1,l) = \frac{1-q^l}{p}, \qquad l=1,2,\ldots$$

$$B(k,1) = \frac{1-p^k}{q}, \qquad k=1,2,\ldots$$

$$B(k,k) = \frac{(1-p^k)(1-q^k)}{pq(p^{k-1}+q^{k-1}-p^{k-1}q^{k-1})}, \qquad k=1,2,\ldots$$

и, в частности,

$$B(2,2) = \frac{(1+p)(1+q)}{1-pq}.$$

Так же в [4] изучена ситуация, когда в последовательности испытаний серия из k последовательных успехов появится раньше, чем серия из l последовательных неудач. Пусть $A(k,l)$ означает такое событие. Тогда

$$P\{A(k,l)\} = \frac{p^{k-1}(1-q^l)}{q^{l-1}+p^{k-1}(1-q^{l-1})}.$$

В частности, при $k=l$ получается следующая вероятность:

$$P\{A(k,k)\} = \frac{p^{k-1}(1-q^k)}{q^{k-1}+p^{k-1}(1-q^{k-1})}.$$

В [5] рассмотрены некоторые ситуации с числом серий, составленных из последовательных неудач, до появления первой серии из k успехов. Пусть $W = W(l,m,k)$ — число серий неудач до первой группы из k успехов, длина которых от l до m и

$$W(s) = W(l,m,k,s) = Es^W$$

будет обозначать производящую функцию этой случайной величины. Тогда [см. (19) в [5]]

$$W(s) = W(l,m,k,s) = \frac{p^{k-1}(1-(q^l-q^{m+1})(1-s))}{(p^{k-1}+(q^{l-1}-q^m)(1-p^{k-1})(1-s))}.$$

В частности, если имеем дело с числом всех серий неудач ($l = 1, m = \infty$) до первой серии из k успехов, тогда

$$W(1,\infty,k,s) = \frac{p^{k-1}(p+qs)}{(1-s+sp^{k-1})}.$$

В этом случае

$$EW = \frac{(1-p^k)}{p^k}.$$

Для числа серий неудач, длина которых равна $m \quad (l = m)$, получено следующее выражение для производящей функции:

$$W(m,m,k,s) = \frac{p^{k-1}(1-pq^m(1-s))}{(p^{k-1}+(p-p^k)q^{m-1}(1-s))}.$$

Для числа серий неудач, длина которых не больше m ($l = 1$),

$$W(1,m,k,s) = \frac{p^{k-1}(1-q(1-q^m)(1-s))}{(p^{k-1}+(1-q^m)(1-p^{k-1})(1-s))}.$$

Для числа серий неудач, длина которых не меньше m,

$$W(m,\infty,k,s) = \frac{p^{k-1}(1-q^m(1-s))}{(p^{k-1}+(1-p^{k-1})q^{m-1}(1-s))}.$$

Так же в [5] представлены результаты для числа успехов и их серий при ограниченном, фиксированном числе испытаний.

В частности, пусть $N_{1,1}(n)$ обозначает число успехов, подсчет которых завершается либо в момент n, либо при наступлении первой же неудачи, если это происходит раньше момента n, а $E_{1,1}(n)$ — соответствующее математическое ожидание этого числа успехов.

Случайная величина $N_{1,1}(n)$ может принимать значения 0,1, $2,\ldots,n-1$ с вероятностями

$$P\{N_{1,1}(n) = m\} = (1-p)p^m$$

и значение n с вероятностью p^n.

Для математического ожидания случайной величины $N_{1,1}(n)$ в [5] получено следующее выражение:

$$E_{1,1}(n) = np^n + (p-p^{n+1})/(1-p) - np^n = p(1-p^n)/(1-p).$$

В работе [3] рассмотрена такая ситуация.

Пусть $\mu(k)$ обозначает число различных серий, состоящих из одного, двух, $\ldots, k-1$ успехов, предшествующих появлению первой серии успехов уже из k испытаний.

Для производящей функции

$$\mu(k,s) = Es^{\mu(k)}$$

было получено соотношение

$$\mu(k,s) = p^{k-1}/(1-s+sp^{k-1}), \quad k = 1,2,\ldots, \quad s \geq 0, \tag{1}$$

из которого, в частности, следовало, что математическое ожидание

$$\alpha(k) = E\mu(k)$$

имеет вид

$$\alpha(k) = (1 - p^{k-1})/p^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Рассмотрим некоторые аналоги этого результата.

3. Новые результаты. 1. Рассмотрим n бернуллиевских случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и случайную величину $N_1(n)$ — число различных серий успехов в этом наборе. Минимальное значение $N_1(n)$ равно нулю, когда все n испытаний неудачны. Вероятность такого события равна q^n. Максимальное значение может быть $n/2$ или $(n+1)/2$ в зависимости от того, имеем ли дело с четным или нечетным n.

Обозначим $E_1(n) = EN_1(n)$ — математическое ожидание числа таких серий. Если $n = 1$, то $E_1(1) = p$. Для $n = 2$ получаем

$$E_1(2) = p^2 + pq + qp = 1 - q^2 = 2p - p^2.$$

Чтобы получить общий вид математических ожиданий $E_1(n)$, рассмотрим при $n \geq 2$ события

$$A_1 = \{X_1 = 0\},$$

$$A_r = \{X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_{r-1} = 1, X_r = 0\}, \quad r = 2, 3, \ldots, n,$$

и

$$A_{n+1} = \{X_1 = 1, X_2 = 1, \ldots, X_{n-1} = 1, X_n = 1\}$$

с вероятностями

$$P\{A_r\} = p^{r-1}q, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

и

$$P\{A_{n+1}\} = p^n.$$

Используя эту полную группу событий, для $n \geq 2$ получаем следующие равенства:

$$E_1(n) = qE_1(n-1) + pq(1 + E_1(n-2)) + \ldots + p^{n-2}q(1 + E_1(1)) + p^n =$$

$$= qE_1(n-1) + pqE_1(n-2) + \ldots + p^{n-2}qE_1(1) + p - p^{n-1} + p^n \tag{3}$$

и

$$pE_1(n-1) = pqE_1(n-2) + \ldots + p^{n-2}qE_1(1) + p^2 - p^{n-1} + p^n. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$E_1(n) = E_1(n-1) + p - p^2 = E_1(n-1) + pq = \ldots = E_1(1) + (n-1)pq.$$

Учитывая равенство $E_1(1) = p$, окончательно получаем

$$E_1(n) = p + (n-1)pq = np - (n-1)p^2, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

2. Перейдем теперь к математическому ожиданию $E_2(n) = EN_2(n)$ числа серий успехов, зафиксированных в момент появления n-го успеха. Полагаем, что $p > 0$.

В этом случае $N_2(1) = 1$ и $E_2(1) = 1$. Пусть $n > 1$. Не умаляя общности, можем считать, что $X_1 = 1$. Введем события:

$$A_1 = \{X_2 = 0\},$$

$$A_r = \{X_2 = 1, X_3 = 1, \ldots, X_r = 1, X_{r+1} = 0\}, \quad r = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$A_n = \{X_2 = 1, X_3 = 1, \ldots, X_{n-1} = 1, X_n = 1\}$$

с вероятностями

$$P\{A_r\} = p^{r-1}q, \quad r = 1, 2, \ldots, n-1$$

и

$$P\{A_n\} = p^{n-1}.$$

Рассматривая эту полную группу событий и тот факт, что $X_1 = 1$, получаем

$$E_2(n) = q(1 + E_2(n-1)) + pq(1 + E_2(n-2)) + \ldots$$
$$+p^{n-2}q(1 + E_2(1)) + p^{n-1} \tag{6}$$

и

$$pE_2(n-1) = pq(1 + E_2(n-2)) + \ldots + p^{n-2}q(1 + E_2(1)) + p^{n-1}. \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует, что

$$E_2(n) = q(1 + E_2(n-1)) + pE_2(n-1) = E_2(n-1) + q = \ldots$$
$$= E_2(1) + (n-1)q = 1 + (n-1)q = n - (n-1)p, \;\; n = 1, 2, \ldots. \tag{8}$$

В частности, получаем

$$E_2(1) = 1, \quad E_2(2) = 2 - p = 1 + q, \quad E_2(3) = 1 + 2q. \tag{9}$$

3. Рассмотрим ситуацию, когда испытания завершаются после n-й неудачной попытки. Обозначим $E_3(n) = N_3(n)$, где $N_3(n)$ — число полученных к этому моменту серий успехов. Если $n = 1$, то случайная величина $N_3(1)$ принимает значение 0 с вероятностью q и значение 1 с вероятностью p, т. е. $E_3(1) = p$. Для значений $n > 1$ достаточно заметить, что если $X_1 = 0$, то $E_3(n) = E_3(n-1)$. Если же $X_1 = 1$, то имеем первую серию из X-в до первой неудачной попытки, а затем получаем какое-то случайное число серий до завершения еще $(n-1)$ очередного неудачного испытания. Учитывая эти два варианта, приходим к равенствам

$$E_3(n) = qE_3(n-1) + p(1 + E_3(n-1)) = E_3(n-1) + p = \ldots$$
$$= E_3(1) + (n-1)p = np, \;\; n = 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

4. Вернемся к постановке задачи, которая рассматривалась в пункте 1.

Пусть $N_4(n)$ теперь означает число различных серий успехов после появления первой неудачной попытки. Рассмотрим $E_4(n)$ — математическое ожидание этой случайной величины. Если первая попытка окончилась неудачей, то $N_4(n)$ принимает такое же значение, что и $N_1(n-1)$, и в этом случае

$$E_4(n) = qE_1(n-1).$$

Если $X_1 = 1$, $X_2 = 1, \ldots, X_{r-1} = 1$, $X_r = 0$, тогда $N_4(n)$ принимает такое же значение, что и $N_1(n-r)$, и в этом случае

$$E_4(n) = qp^{r-1}E_1(n-r) \quad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Учитывая все эти варианты, получаем равенство

$$E_4(n) = qE_1(n-1) + pqE_1(n-2) + p^2qE_1(n-3) + \ldots + p^{n-2}qE_1(1).$$

Поскольку $E_1(1) = p$ и выполнено равенство (5), окончательно получаем

$$\begin{aligned} E_4(n) &= q((n-1)p - (n-2)p^2) + qp^2((n-2)p - (n-3)p^2) + \ldots + p^{n-2}qp = \\ &= qp(n-1) - qp^2(n-2) + qp^2(n-2) - qp^3(n-3) + \ldots - qpp^{n-2} + qp^{n-1} = \\ &= (n-1)qp = (n-1)p - (n-1)p^2, \quad n = 2, 3, \ldots \end{aligned} \tag{11}$$

Литература

1. Bernoulli J. *Ars conjectandi, opus posthumum.* Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis. Basel, Thurneysen Brothers (1713).
2. Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1.* Москва, Мир (1984).
3. Ананьевский С. М., Невзоров В. Б. О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 2, 201–208 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.202
4. Ананьевский С. М., Невзоров В. Б. О некоторых вероятностных распределениях, связанных с классической схемой Бернулли. II. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **10** (68), вып. 1, 14–20 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.102
5. Ананьевский С. М., Невзоров В. Б. О сериях успехов и неудач в схемах Бернулли. *Записки научных семинаров ПОМИ* **515**, 30–38 (2023).

Статья поступила в редакцию 9 февраля 2024 г.;
доработана 5 апреля 2024 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Ананьевский Сергей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доц.;
https://orcid.org/0000-0002-1420-5459, ananjevskii@mail.ru
Невзоров Валерий Борисович — д-р физ.-мат. наук, проф.;
https://orcid.org/0000-0002-6575-2575, valnev@mail.ru

On series of successes in Bernoulli sequences of random variables

S. M. Ananjevskii, V. B. Nevzorov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B. On series of successes in Bernoulli sequences of random variables. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 663–670. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.403 (In Russian)

Some of the first studies in probability theory were associated with Bernoulli schemes — sequences of independent identically distributed random variables taking the values 1 with a certain probability $0 < p < 1$ and 0 with a probability $q = 1 - p$. The study of sequences of such random variables led to the need to deal with a geometrically distributed random variable. Limit theorems for properly centered and normalized sums required the consideration and study of normally distributed random variables. Working with classical Bernoulli sequences and their other two-point generalizations led to the need to develop various methods for studying them, which were then used for other random variables. Despite the numerous results obtained since the publication of Jacob Bernoulli's monograph "The Art of Conjectandi" in 1713, more and more new schemes for Bernoulli quantities are appearing that require further study. This work is a direct continuation of the authors' articles published in 2022 and 2023.

Keywords: Bernoulli scheme, binomial distribution, geometric distribution, expected value.

References

1. Bernoulli J. *Ars conjectandi, opus posthumum.* Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis. Basel, Thurneysen Brothers (1713).

2. Feller W. *Introduction to the theory of probability and its applications. Vol. 1.* Moscow, Mir Publ. (1984).

3. Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B. On some probability distributions, related to the classical Bernoulli scheme. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 2, 201–208 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.202 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 2, 141–146 (2022). https://doi.org/10.1134/S1063454122020042].

4. Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B. On some probability distributions, related to the classical Bernoulli scheme. II. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **10** (68), iss. 1, 14–20 (2023). https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.102 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St Petersburg University. Mathematics* **56**, iss. 1, 9–14 (2023). https://doi.org/10.1134/S106345412301003X].

5. Ananjevskii S. M., Nevzorov V. B. On the series of successes and failures in Bernoulli's schemes. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI* **515**, 30–38 (2023). (In Russian)

Received: February 9, 2024
Revised: April 5, 2024
Accepted: May 23, 2024

Authors' information:

Sergey M. Ananjevskii — https://orcid.org/0000-0002-1420-5459, ananjevskii@mail.ru
Valery B. Nevzorov — https://orcid.org/0000-0002-6575-2575, valnev@mail.ru