УДК 517.968 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4
MSC 45G10; 47G05

Интегральное уравнение с ядром Теплица — Ганкеля и неоднородностью в линейной части*

С. Н. Асхабов

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова,
Российская Федерация, 364024, Грозный, ул. Асланбека Шерипова, 32
Чеченский государственный педагогический университет,
Российская Федерация, 364068, Грозный, пр. Исаева, 62

Для цитирования: *Асхабов С. Н.* Интегральное уравнение с ядром Теплица — Ганкеля и неоднородностью в линейной части // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 671–683.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.404

В конусе $Q_0 = \{u(x)\colon u \in C[0,\infty),\ u(0) = 0$ и $u(x) > 0$ при $x > 0\}$ рассматривается интегральное уравнение $u^\alpha(x) = \int\limits_0^x [p(x-t) + q(x+t)]u(t)dt + f(x)$ с ядром Теплица — Ганкеля $p(x-t) + q(x+t)$ и неоднородностью $f(x)$ в линейной части. Уравнения такого вида с разностными, суммарными и суммарно-разностными ядрами возникают при решении многих задач гидроаэродинамики, теории упругости, популяционной генетики, в теории лучистого равновесия и переноса тепла излучением и др. При этом с теоретической и прикладной точек зрения особый интерес представляют неотрицательные непрерывные решения из конуса Q_0. В случае $\alpha > 1$ найдены условия на ядро и неоднородность, при которых указанное интегральное уравнение имеет единственное решение во всем классе Q_0. Без дополнительных ограничений на заданные функции доказано, что это решение можно найти методом последовательных приближений пикаровского типа в некотором полном весовом метрическом пространстве. Для последовательных приближений установлена оценка скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики. При этом важную роль играют полученные в работе двусторонние априорные оценки решения. Приведены примеры, иллюстрирующие полученные результаты. При $0 < \alpha < 1$ показано, что данное уравнение не имеет, как и в линейном случае (при $\alpha = 1$), решений в конусе Q_0.

Ключевые слова: уравнение Вольтерра, ядро Теплица — Ганкеля, неоднородность, степенная нелинейность, априорные оценки.

1. Введение. Решение многих задач гидроаэродинамики, теории упругости, популяционной генетики и др. приводит к нелинейным интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям вольтерровского типа с разностными и суммарными ядрами. При этом с теоретической и прикладной точек зрения особый интерес представляют неотрицательные непрерывные решения таких уравнений (см., например, [1–6]). В отличие от соответствующих линейных однородных уравнений, нелинейные уравнения, кроме тривиального решения, могут иметь и нетривиальные (подробнее см. [2, 3]), и в этом состоит принципиальное их отличие.

*Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ по государственному заданию FEGS-2020-0001.

В данной работе изучается нелинейное интегральное уравнение с ядром Теплица—Ганкеля $p(x-t)+q(x+t)$ [7–9] и неоднородностью $f(x)$ в линейной части

$$u^\alpha(x) = \int_0^x [p(x-t)+q(x+t)]u(t)\,dt + f(x), \quad x>0, \quad \alpha>1, \tag{1}$$

где заданные функции $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$p \in C[0,\infty),\ p(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \text{ и } p(0)>0, \tag{2}$$

$$q \in C[0,\infty),\ q(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \text{ и } q(0)\geq 0, \tag{3}$$

$$f \in C[0,\infty),\ f(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \text{ и } f(0)=0. \tag{4}$$

В связи с указанными приложениями решения интегрального уравнения (1) разыскиваются в классе $Q_0 = \{u(x)\colon u\in C[0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\}$.

Уравнения с ядром Теплица $p(x-t)$ или ядром Ганкеля $q(x+t)$ привлекают внимание многих авторов, поскольку они встречаются в таких разнообразных областях, как гидродинамика, обратные задачи рассеяния в квантовой механике, проблемы передачи радиационных волн, а также находят приложения в медицине и биологии (см. [7]). В работе [8] изучено линейное уравнение вида (1) с ядром Теплица—Ганкеля $p(x-t)+q(x+t)$. Ядра Теплица—Ганкеля возникают при исследовании кругового штампа, проникающего в упругий слой конечной толщины, опирающийся на жесткий фундамент, а также при изучении фильтрации стационарных случайных процессов с наблюдениями, атмосферного рассеяния и динамики разреженного газа [9].

Что касается уравнений со степенной нелинейностью вида (1), то они возникают в теории инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду [1], при описании процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных газом [5, 6], в теории переноса тепла излучением [10], в моделях популяционной генетики и др. (см. [1–4]). В частности, к уравнению вида (1) с ядром Теплица при $\alpha=2$ сводится известное уравнение Буссинеска $(hh_r)_r + \frac{1}{r}hh_r = h_t$, где $h=h(r,t)$ означает свободную поверхность увлажненной области, описывающее процесс просачивания жидкости в радиальном случае [11].

В данной работе на основе полученных нижней и верхней априорных оценок решения уравнения (1) мы строим весовое полное метрическое пространство P_b и, применяя метод весовых метрик (аналог метода Адама Белецкого [12]), доказываем глобальную теорему о существовании и единственности решения уравнения (1) как в P_b, так и в Q_0. Устанавливаем, что решение можно найти в P_b методом последовательных приближений и получаем оценку скорости их сходимости к точному решению в терминах весовой метрики пространства P_b.

2. Свойства неотрицательных решений. Выясним сначала, какими свойствами должны обладать решения интегрального уравнения (1), если они существуют.

Лемма 1. *Пусть* $\alpha>0$ *и выполнены условия* (2)–(4). *Если* $u\in Q_0$ *является решением уравнения* (1), *то* $u(x)$ *не убывает на* $[0,\infty)$.

Доказательство. Пусть $u \in Q_0$ есть решение уравнения (1) и $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ — любые числа такие, что $x_2 > x_1$. Так как $p(x)$, $q(x)$ и $f(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) = \int\limits_0^{x_1} [p(x_2 - t) + q(x_2 + t) - p(x_1 - t) - q(x_1 + t)]u(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{x_2} [p(x_2 - t) + q(x_2 + t)]u(t)\, dt + f(x_2) - f(x_1) \geq 0.$$

Значит, $u(x_2) \geq u(x_1)$ при $x_2 > x_1$, т. е. решение $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$. □

Далее нам понадобятся следующие два неравенства:

$$\int\limits_0^x v(x-t)w(t)\, dt \leq \int\limits_0^x v(t)w(t)\, dt, \quad \int\limits_0^x v(x+t)w(t)dt \leq \int\limits_0^x [2v(2t) - v(t)]w(t)dt, \tag{5}$$

справедливые для любых неотрицательных неубывающих на $[0,\infty)$ функций v и w.

Первое неравенство из (5) известно (см. [3, с. 121]) как интегральное неравенство Чебышёва, а второе неравенство подробно доказано в [13, лемма 1].

Лемма 2. *Если функции $p(x)$, $q(x)$, $w(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то для всех $x \in [0,\infty)$ выполняется неравенство*

$$\int\limits_0^x [p(x-t) + q(x+t)]w(t)dt \leq \int\limits_0^x [2q(2t) - q(t) + p(t)]w(t)dt. \tag{6}$$

Неравенство (6) является прямым следствием неравенств (5). В самом деле,

$$\int\limits_0^x [p(x-t) + q(x+t)]w(t)\, dt = \int\limits_0^x p(x-t)w(t)dt + \int\limits_0^x q(x+t)w(t)dt \leq \int\limits_0^x p(t)w(t)\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^x [2q(2t) - q(t)]w(t)\, dt = \int\limits_0^x [2q(2t) - q(t) + p(t)]w(t)\, dt.$$

Далее важную роль будут играть двусторонние априорные оценки решения уравнения (1), содержащиеся в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия (2)–(4). Если $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (1), то для любого $x \in [0,\infty)$*

$$\begin{gathered} L(x) \equiv \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int\limits_0^x [q(2t) + p(0)]\, dt \right)^{1/(\alpha-1)} \leq u(x) \leq \\ \leq \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int\limits_0^x [2q(2t) - q(t) + p(t)]\, dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \right)^{1/(\alpha-1)} \equiv R(x). \end{gathered} \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $u \in Q_0$ и является решением уравнения (1). Докажем сначала первое неравенство из (7). Используя условия (2)–(4), из тождества (1) получаем

$$u^\alpha(x) \geq \int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]u(t)dt + f(x) \geq \int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]u(t)dt$$

или

$$u(x) \geq \left(\int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]u(t)dt\right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого } x>0, \tag{8}$$

или, что то же самое,

$$u(t) \geq \left(\int\limits_0^t [q(2s)+p(0)]u(s)ds\right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого } t>0,$$

откуда

$$\left(\int\limits_0^t [q(2s)+p(0)]u(s)ds\right)^{-1/\alpha} [q(2t)+p(0)]u(t) \geq q(2t)+p(0).$$

Интегрируя обе части последнего неравенства в пределах от 0 до x, имеем

$$\frac{\alpha}{\alpha-1}\left(\int\limits_0^x [q(2s)+p(0)]u(s)ds\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \geq \int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]\,dt$$

или

$$\left(\int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]u(t)dt\right)^{1/\alpha} \geq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]\,dt\right)^{(1/(\alpha-1)} \equiv L(x).$$

Используя эту оценку, из (8) непосредственно получаем первое неравенство из (7).

Докажем, наконец, второе неравенство из (7). Используя неравенство (6), имеем

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x [p(x-t)+q(x+t)]u(t)dt + f(x) \leq \int\limits_0^x [2q(2t)-q(t)+p(t)]u(t)dt + f(x),$$

откуда, обозначив $A(t) = 2q(2t)-q(t)+p(t)$, имеем

$$u(x) \leq \left(\int\limits_0^x A(t)u(t)dt + f(x)\right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого } x>0. \tag{9}$$

Так как по теореме Лебега функция $f(x)$ дифференцируема почти всюду на $[0,\infty)$, то для п. в. (почти всех) $t \in [0,\infty)$ из (9) получаем

$$A(t)u(t) + f'(t) \leq A(t)\left(\int\limits_0^t A(s)u(s)ds + f(t)\right)^{1/\alpha} + f'(t),$$

откуда

$$\left(\int\limits_0^t A(s)u(s)ds + f(t)\right)^{-1/\alpha} (A(t)u(t) + f'(t)) \le A(t) + J(t) \ \text{ для п. в. } t > 0, \qquad (10)$$

где

$$J(t) \equiv f'(t) \left(\int\limits_0^t A(s)u(s)ds + f(t)\right)^{-1/\alpha}.$$

Докажем, что

$$\int\limits_0^x J(t)dt \le \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x), \quad \forall x > 0. \qquad (11)$$

В силу условия (4) возможны лишь три случая: 1) $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \infty)$; 2) существует $x_0 > 0$ такое, что $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0, x_0]$ и $f(x) > 0$ при $x > x_0$; 3) $f(x) > 0$ при всех $x > 0$. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

1. Если $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0, \infty)$, то неравенство (11) очевидно и обращается в тождество, так как $A(x) > 0$, $u(x) > 0$ при $x > 0$ и $f'(x) \equiv 0$.

2. Если $\exists x_0 > 0$ такое, что $f(x) \equiv 0$ при $x \in [0, x_0]$ и $f(x) > 0$ при $x > x_0$, то $\int\limits_0^x J(t)dt = 0$ при любом $x \in [0, x_0]$ и, значит, неравенство (11) выполняется при $x \in [0, x_0]$, обращаясь в тождество, а при $x > x_0$ с учетом, что $f(x_0) = f(0) = 0$,

$$\int\limits_0^x J(t)dt = \int\limits_{x_0}^x J(t)dt \le \int\limits_{x_0}^x f'(t) f^{-1/\alpha}(t)dt = \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x),$$

т. е. неравенство (11) выполняется и при любом $x > x_0$.

3. Если $f(x) > 0$ при всех $x > 0$, то аналогично получаем

$$\int\limits_0^x J(t)dt \le \int\limits_0^x f'(t) f^{-1/\alpha}(t)dt = \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x).$$

Итак, неравенство (11) доказано во всех трех случаях.

Интегрируя неравенство (10) от 0 до x, с учетом неравенства (11), имеем

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} \left(\int\limits_0^x A(s)u(s)ds + f(x)\right)^{(\alpha-1)/\alpha} \le \int\limits_0^x A(t)dt + \frac{\alpha}{\alpha-1} f^{(\alpha-1)/\alpha}(x) \quad \forall x > 0,$$

откуда

$$\left(\int\limits_0^x A(t)u(t)dt + f(x)\right)^{1/\alpha} \le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int\limits_0^x A(t)dt + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right)^{1/(\alpha-1)} \equiv R(x). \qquad (12)$$

Таким образом, второе неравенство из (7) есть следствие неравенств (9) и (12). $\square$

Заметим, что при $p(x) = C_1 > 0$, $q(x) = C_2 \ge 0$ и $f(x) \equiv 0$ априорные оценки совпадают $L(x) = R(x) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}[C_1 + C_2] \cdot x\right)^{1/(\alpha-1)}$ и являются решением однородного уравнения (1), что свидетельствует о точности этих оценок в определенном смысле.

3. Глобальная теорема существования и единственности решения. Докажем теорему о существовании, единственности и способе нахождения решения уравнения (1). Для этого запишем уравнение (1) в операторном виде: $u = Tu$, где

$$(Tu)(x) = \left(\int\limits_0^x [p(x-t) + q(x+t)]u(t)dt + f(x)\right)^{1/\alpha}.$$

Из теоремы 1 следует, что решения уравнения (1) естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x): \ u \in C[0,\infty) \text{ и } L(x) \le u(x) \le R(x) \ \text{ для любого } x \in [0,\infty)\}.$$

Предположим дополнительно к условию (4), что функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = \int\limits_0^x f'(t)\,dt, \tag{13}$$

т. е. является абсолютно непрерывной (здесь учли, что согласно условию (4) $f(0) = 0$).

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия (2)–(4), (13). Тогда класс P инвариантен относительно оператора T.*

Доказательство. Пусть $u \in P$, т. е. $u \in C[0,\infty)$ и $L(x) \le u(x) \le R(x)$. Нужно доказать, что тогда $Tu \in C[0,\infty)$ и $L(x) \le (Tu)(x) \le R(x)$, т. е. $Tu \in P$. То, что $Tu \in C[0,\infty)$, вытекает из монотонности функций $p(x)$, $q(x)$ и непрерывности функций $u(x)$, $f(x)$ (см., например, [14, с. 288] и [15, лемма 1]).

Докажем теперь, что $(Tu)(x) \ge L(x)$. Так как $u(x) \ge L(x)$ и $f(x) \ge 0$, то

$$[(Tu)(x)]^\alpha = \int\limits_0^x [p(x-t) + q(x+t)]u(t)dt + f(x) \ge \int\limits_0^x [q(2t) + p(0)]L(t)dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int\limits_0^x [q(2t) + p(0)] \left(\int\limits_0^t [q(2s) + p(0)]ds\right)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t [q(2s) + p(0)]ds\right)^{1/(\alpha-1)} d\left(\int\limits_0^t [q(2s) + p(0)]ds\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \left(\int\limits_0^x [q(2s) + p(0)]ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv L(x)^\alpha,$$

т. е. $(Tu)(x) \ge L(x)$.

Докажем, наконец, что $(Tu)(x) \le R(x)$. Так как $u(x) \le R(x)$ и функции $p(x)$, $q(x)$ не убывают на $[0,\infty)$, то используя интегральное неравенство (6), имеем

$$[(Tu)(x)]^{\alpha} = \int_0^x [p(x-t)+q(x+t)]u(t)dt + f(x) \le \int_0^x [p(x-t)+q(x+t)]R(t)dt + f(x) \le$$

$$\le \int_0^x [2q(2t)-q(t)+p(t)]R(t)dt + \int_0^x f'(t)dt = \int_0^x R(t)\left(2q(2t)-q(t)+p(t)+\frac{f'(t)}{R(t)}\right)dt \le$$

$$\le \int_0^x R(t)\left(2q(2t)-q(t)+p(t)+f^{-1/\alpha}(t)f'(t)\right))dt =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha-1}\int_0^x \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^t [2q(2s)-q(s)+p(s)]ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right)^{1/(\alpha-1)} \times$$

$$\times d\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^t [2q(2s)-q(s)+p(s)]ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [2q(2s)-q(s)+p(s)]ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right)^{\alpha/(\alpha-1)} = [R(x)]^{\alpha},$$

т. е. $(Tu)(x) \le R(x)$. □

Исследование интегрального уравнения (1) будет основано на методе весовых метрик и для его применения нам нужно будет построить полное метрическое пространство. Введем в связи с этим следующий класс функций:

$$P_b = \{u(x) : u \in C[0,b] \text{ и } L(x) \le u(x) \le R(x) \text{ для любого } x \in [0,b]\},$$

где $b > 0$ есть любое число.

В силу вольтерровости оператора T из теоремы 2 непосредственно вытекает следующее.

Следствие 1. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия* (2)–(4), (13). *Тогда класс P_b инвариантен относительно интегрального оператора T.*

Далее будем предполагать, что наряду с основными условиями (2)–(4), (13) выполняется дополнительное условие:

$$\mu = \sup_{0<x\le b} \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [2q(2t)-q(t)+p(t)]dt + f^{(\alpha-1)/\alpha)}(x)}{(\alpha-1)\int_0^x [q(2t)+p(0)]dt} < 1. \tag{14}$$

Введем в классе P_b расстояние по формуле

$$\rho_b(u,v) = \sup_{0<x\le b} \frac{|u(x)-v(x)|}{R(x)}. \tag{15}$$

Лемма 3. *Пара (P_b, ρ_b) образует полное метрическое пространство.*

Доказательство. Выполнимость аксиом метрики очевидна. Докажем полноту P_b. Пусть $\{u_n(x)\}$ есть произвольная фундаментальная последовательность из P_b. Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall m, n \geq N$ выполняется неравенство $\rho_b(u_m, u_n) < \varepsilon$, т. е.

$$\frac{|u_m(x) - u_n(x)|}{R(x)} < \varepsilon \quad \forall m, n \geq N \text{ и } \forall x \in (0, b]. \tag{16}$$

Так как, в силу условий (2)–(4), $R(x) \leq R(b) \equiv M > 0$, то из (16) следует, что

$$|u_m(x) - u_n(x)| < M \cdot \varepsilon \quad \forall m, n \geq N \text{ и } \forall x \in [0, b]. \tag{17}$$

Важно отметить, что неравенство (17) справедливо и при $x = 0$, так как $L(0) = R(0) = 0$ и, значит, $u_m(0) = u_n(0) = 0$, поскольку $L(x) \leq u_n(x) \leq R(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Неравенство (17) означает, что последовательность $\{u_n(x)\}$ является фундаментальной в полном метрическом пространстве $C[0, b]$ с чебышёвской метрикой. Следовательно, существует функция $u \in C[0, b]$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x). \tag{18}$$

Покажем, что $u \in P_b$. Так как $u_n \in P_b$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in [0, b]$ имеем $L(x) \leq u_n(x) \leq R(x)$. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, с учетом равенства (18), получаем $L(x) \leq u(x) \leq R(x)$, т. е. $u \in P_b$.

Сходимость последовательности $\{u_n(x)\}$ к $u(x)$ по метрике (15) пространства P_b доказывается переходом в неравенстве (16) к пределу при $m \to \infty$. □

Теорема 3. *Пусть* $\alpha > 1$ *и выполнены условия* (2)–(4), (13), (14). *Тогда оператор* T *действует из* P_b *в* P_b *и является сжимающим, при этом*

$$\rho_b(Tu, Tv) \leq \mu \cdot \rho_b(u, v) \quad \forall u, v \in P_b \tag{19}$$

где число μ *определено в* (14).

Доказательство. То, что оператор T действует из P_b в P_b вытекает из следствия 1. Осталось доказать неравенство (19), т. е., что оператор T является сжимающим, так как, в силу неравенства (14), $\mu < 1$. Пусть $u, v \in P_b$ и $x \in (0, b]$. По теореме Лагранжа для любых $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$ имеем

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Theta^{(1-\alpha)/\alpha}(z_1 - z_2),$$

где $\Theta > 0$ — некоторое число, лежащее между z_1 и z_2. Из этого равенства следует, что если $z_1 \geq z_0$ и $z_2 \geq z_0$, где $z_0 > 0$, то $\Theta > z_0$ и, значит, справедливо неравенство

$$|z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha}| \leq \frac{1}{\alpha} \frac{|z_1 - z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}}. \tag{20}$$

Используя неравенства (6) и (20), в котором роль z_0 играет $L^\alpha(x)$, с учетом того, что $(Tu)(x) \geq L(x)$ и $(Tv)(x) \geq L(x)$, получаем

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha} \frac{\left| \int\limits_0^x [p(x-t) + q(x+t)] u(t) dt + f(x) - \int\limits_0^x [p(x-t) + q(x+t)] v(t) dt - f(x) \right|}{\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int\limits_0^x [q(2t) + p(0)] dt} \leq$$

$$\leq \frac{\int\limits_0^x [p(x-t)+q(x+t)]|u(t)-v(t)|dt}{(\alpha-1)\int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]dt} \leq \frac{\rho_b(u,v)\int\limits_0^x [p(x-t)+q(x+t)]R(t)dt}{(\alpha-1)\int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]dt} \leq$$

$$\leq \frac{\rho_b(u,v)\int\limits_0^x [2q(2t)-q(t)+p(t)]R(t)dt}{(\alpha-1)\int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]dt} = \frac{\rho_b(u,v)}{(\alpha-1)\int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]dt}\int\limits_0^x A(t)R(t)dt,$$

где $A(t)=2q(2t)-q(t)+p(t)$. Так как

$$\int\limits_0^x A(t)R(t)dt = \int\limits_0^x A(t)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t A(s)ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right)^{1/(\alpha-1)} dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^x \left[A(t)+f^{-1/\alpha}(t)f'(t)\right]\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^t A(s)ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(t)\right)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x A(s)ds + f^{(\alpha-1)/\alpha}(x)\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv R^\alpha(x),$$

то из предыдущего неравенства для любого $x\in(0,b]$ имеем

$$\frac{|(Tu)(x)-(Tv)(x)|}{R(x)} \leq \frac{\rho_b(u,v)}{(\alpha-1)\int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]dt} R^{\alpha-1}(x) =$$

$$= \frac{\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x [2q(2t)-q(t)+p(t)]dt + f^{(\alpha-1)/\alpha)}(x)}{(\alpha-1)\int\limits_0^x [q(2t)+p(0)]dt}\rho_b(u,v) \leq \mu\cdot\rho_b(u,v),$$

откуда непосредственно вытекает доказываемое неравенство (19). □

Теорема 4. *Пусть $\alpha>1$ и выполнены условия* (2)–(4), (13), (14)*. Тогда уравнение* (1) *имеет в конусе Q_0 (и в пространстве P_b при любом $b>0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение может быть найдено в пространстве P_b методом последовательных приближений по итерационной формуле $u_n=Tu_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, которые сходятся к нему по метрике* (15) *при любом $b<\infty$ с оценкой погрешности*

$$\rho_b(u_n,u^*) \leq \frac{\mu^n}{1-\mu}\rho_b(Tu_0,u_0), \quad n\in\mathbb{N}, \tag{21}$$

где число $\mu<1$ определено в условии (14)*, а $u_0\in P_b$ есть произвольная функция.*

Доказательство. Запишем уравнение (1) в операторном виде: $u=Tu$. Из леммы 3 и теоремы 3 следует, что выполнены все требования принципа сжимающих отображений, из которого непосредственно вытекает, что уравнение (1) имеет единственное решение $u^*(x)$ в пространстве P_b при любом $b>0$ и это решение может быть найдено методом последовательных приближений, которые сходятся к нему по метрике (15) при любом $b < \infty$ с оценкой скорости сходимости (21).

Осталось показать, что уравнение (1) имеет единственное решение во всем классе Q_0. Положим $P_\infty = \bigcup\limits_{b>0} P_b$, т. е. P_∞ есть множество функций, определенных на полуоси $[0, \infty)$, сужения которых на отрезок $[0, b]$ принадлежат P_b. Так как уравнение (1) имеет единственное решение в P_b при любом $b > 0$ и коэффициент сжатия в (21) не зависит от b, то уравнение (1) имеет единственное решение $u^*(x)$ в P_∞. Поскольку всякое решение уравнения (1) из Q_0 удовлетворяет оценкам (7), то это решение $u^*(x)$ будет единственным решением интегрального уравнения (1) и во всем классе Q_0. □

Замечание 1. Поскольку применение итераций Пикара $u_n = Tu_{n-1}$ требует вычисления величин Tu_{n-1}, что часто оказывается затруднительным, иногда полезно применение итераций Каратеодори u_n (подробнее см. [4, с. 110]), которые не зависят от u_{n-1} и предыдущих итераций. Отметим в связи с этим также методы, изложенные в классических работах [16–19]. Подробный обзор работ, посвященных численному решению уравнений Вольтерра, приведен в [4, с. 56]. Точно так же, как и в теореме 3 [20, с. 794], можно дать и другое доказательство существования и единственности решения уравнения (1) во всем классе Q_0. Относительно условия (14) заметим, что при $\alpha = r > 1$ коэффициент $\frac{\alpha-1}{\alpha}$ при интеграле в числителе в r раз меньше коэффициента $\alpha - 1$ при интеграле в знаменателе, что важно для выполнения неравенства $\mu < 1$. Пример, приведенный после теоремы 1, показывает, что это неравенство может выполняться при любом $\alpha > 1$.

Приведем еще примеры, иллюстрирующие теоремы 3 и 4.

Пример 1. *При $\alpha = 2$, $p(x) = q(x) = 1$ и $f(x) = \frac{3}{4}x^2$ функция $u(x) = \frac{3}{2}x$ является решением неоднородного интегрального уравнения* (1), *причем $\mu = \frac{2+\sqrt{3}}{4} < 1$.*

Пример 2. *При $\alpha = 2$, $p(x) = q(x) = e^x$ и $f(x) \equiv 0$ функция $u(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{x/2} - 1$ является решением однородного интегрального уравнения* (1), *причем*

$$\mu = \sup_{0<x\le b} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} - 1 + 2x} < 1.$$

Пример 2 показывает, что нелинейные однородные интегральные уравнения вольтерровского типа вида (1), в отличие от соответствующих линейных однородных уравнений, кроме тривиального решения $u(x) \equiv 0$, могут иметь и нетривиальные решения. В этом состоит принципиальное отличие нелинейных однородных интегральных уравнений от соответствующих линейных уравнений.

В заключение отметим, что при $0 < \alpha < 1$, $f(x) \equiv 0$ и условиях (2), (3) (как и в линейном случае при $\alpha = 1$) однородное уравнение (1) не имеет решений в классе Q_0. В самом деле, если предположить противное, то в силу неравенства (6) и леммы 1 из тождества (1) получим

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x [p(x-t) + q(x+t)]u(t)dt \le \int\limits_0^x [2q(2t) - q(t) + p(t)]u(t)dt \le$$

$$\le u(x) \int\limits_0^x [2q(2t) - q(t) + p(t)]dt \quad \text{для любого } x \ge 0,$$

откуда

$$u^{\alpha-1}(x) \le \int\limits_0^x [2q(2t) - q(t) + p(t)]dt \quad \text{для любого } x > 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to 0$, приходим к противоречию: $\infty \le 0$.

Литература

1. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications. *Extracta Math.* **4** (2), 51–74 (1989).

2. Askhabov S. N., Betilgiriev M. A. Nonlinear convolution type equations. *Seminar Anal. Operat. Equat. and Numer. Anal. 1989/90.* Berlin, Karl-Weierstras Institut fur Mathematik 1–30 (1990).

3. Асхабов С. Н. *Нелинейные уравнения типа свертки.* Москва, Физматлит (2009).

4. Brunner H. *Volterra integral equations: An introduction to the theory and applications.* Cambridge, Cambridge Univ. Press (2017).

5. Keller J. J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction. *Z. Angew. Math. Phys.* **32** (2), 170–181 (1981).

6. Schneider W. R. The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type. *Z. Angew. Math. Phys.* **33** (1), 140–142 (1982).

7. Anh P. K., Tuan N. M., Tuan P. D. The finite new convolutions and solvability of the integral equations with Toeplitz plus Hankel kernels. *J. Math. Anal. Appl.* **397** (3), 537–549 (2013).

8. Tsitsiklis J. N., Levy B. C. Integral equation and resolvents of Toeplitz plus Hankel kernels. *Technical report LIDS-P-1170. Laboratory for Information and Decision System.* 1–19 Cambridge, Massachusetts Institute of Technology (1981).

9. Tuan T., Hoang P. V., Hong N. T. Integral equation of Toeplitz plus Hankel's type and parabolic equation related to the Kontorovich — Lebedev — Fourier generalized convolutions. *Math. Meth. Appl. Sci.* 1–11 (2018). https://doi.org/10.1002/mma.5279

10. Измаилов А. Ф. 2-регулярность и теоремы о разветвлении. *Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее прил. Темат. обз.* **65**, 90–117 (1999).

11. Okrasinski W. Some remarks about the infiltration of water from cylindrical reservoir. *Appl. Math.* **16**, 641–646 (1980).

12. Bielecki A. Une remarque sur la methode de Banach — Cacciopoli — Tikhonov dans la theorie des equations differentielles ordinaires. *Bull. Acad. Polon. Sci.* **4** (Cl. III), 261–264 (1956).

13. Асхабов С. Н. Об одном интегральном уравнении с суммарным ядром и неоднородностью в линейной части. *Дифференциальные уравнения* **57** (9), 1210–1219 (2021).

14. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. Москва, ГИТТЛ (1951).

15. Асхабов С. Н. Система интегро-дифференциальных уравнений типа свертки со степенной нелинейностью. *Сибирский журнал индустриальной математики* **24** (3), 5–18 (2021).

16. Крылов В. И. *Приближенное вычисление интегралов.* Москва, Наука (1967).

17. Самарский А. А. *Введение в теорию разностных схем.* Москва, Наука (1971).

18. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы. Введение в теорию.* Москва, Наука (1977).

19. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. Москва, Наука (1979).

20. Асхабов С. Н. Интегро-дифференциальное уравнение типа свертки со степенной нелинейностью и неоднородностью в линейной части. *Дифференциальные уравнения* **56** (6), 786–795 (2020).

Статья поступила в редакцию 19 марта 2024 г.;
доработана 15 апреля 2024 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Асхабов Султан Нажмудинович — д-р физ.-мат. наук, проф.;
https://orcid.org/0000-0001-6691-9587, askhabov@yandex.ru

Integral equation with the Toeplitz — Hankel kernel and inhomogeneity in the linear part*

S. N. Askhabov

Kadyrov Chechen State University,
32, ul. Aslanbeka Sheripova, Grozny, 364024, Russian Federation
Chechen State Pedagogical University,
62, pr. Isaeva, Grozny, 364068, Russian Federation

For citation: Askhabov S. N. Integral equation with the Toeplitz — Hankel kernel and inhomogeneity in the linear part. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 671–683.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.404 (In Russian)

In the cone $Q_0 = \{u(x)\colon u \in C[0,\infty),\ u(0) = 0 \text{ and } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}$ we consider the integral equation $u^\alpha(x) = \int\limits_0^x [p(x-t) + q(x+t)]u(t)dt + f(x)$ with Toeplitz — Hankel kernel $p(x-t) + q(x+t)$ and inhomogeneity $f(x)$ in the linear part. Equations of this type with difference, total and total-difference kernels arise when solving many problems in hydroaerodynamics, elasticity theory, population genetics, in the theory of radiative equilibrium and heat transfer by radiation and others. In this case, from theoretical and applied points of view, non-negative continuous solutions from the cone Q_0 are of particular interest. In the case of $\alpha > 1$, conditions were found for the kernel and inhomogeneity under which the indicated integral equation has a unique solution in the entire class Q_0. Without additional restrictions on the given functions, it is proved that this solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type in some complete weighted metric space. For successive approximations, an estimate of the rate of their convergence to the exact solution is established in terms of the weight metric. In this case, the two-sided a priori estimates of the solution obtained in the work play an important role. Examples are given to illustrate the results obtained. For $0 < \alpha < 1$, it is shown that this equation, as in the linear case (for $\alpha = 1$), has no solutions in the cone Q_0.

Keywords: Volterra equation, Toeplitz — Hankel kernel, inhomogeneity, power-law nonlinearity, a priori estimates.

References

1. Okrasinski W. Nonlinear Volterra equations and physical applications. *Extracta Math.* **4** (2), 51–74 (1989).

2. Askhabov S. N., Betilgiriev M. A. Nonlinear convolution type equations. *Seminar Anal. Operat. Equat. and Numer. Anal. 1989/90.* Berlin, Karl-Weierstras Institut fur Mathematik 1–30 (1990).

3. Askhabov S. N. *Nonlinear equations convolution type.* Moscow, Fizmatlit Publ. (2009). (In Russian)

4. Brunner H. *Volterra integral equations: An introduction to the theory and applications.* Cambridge, Cambridge Univ. Press (2017).

5. Keller J. J. Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction. *Z. Angew. Math. Phys.* **32** (2), 170–181 (1981).

6. Schneider W. R. The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type. *Z. Angew. Math. Phys.* **33** (1), 140–142 (1982).

7. Anh P. K., Tuan N. M., Tuan P. D. The finite new convolutions and solvability of the integral equations with Toeplitz plus Hankel kernels. *J. Math. Anal. Appl.* **397** (3), 537–549 (2013).

8. Tsitsiklis J. N., Levy B. C. Integral equation and resolvents of Toeplitz plus Hankel kernels. *Technical report LIDS-P-1170. Laboratory for Information and Decision System.* 1–19 Cambridge, Massachusetts Institute of Technology (1981).

* The work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation under the state task FEGS-2020-0001.

9. Tuan T., Hoang P. V., Hong N. T. Integral equation of Toeplitz plus Hankel's type and parabolic equation related to the Kontorovich — Lebedev — Fourier generalized convolutions. *Math. Meth. Appl. Sci.* 1–11 (2018). https://doi.org/10.1002/mma.5279

10. Izmailov A. F. 2-regularity and bifurcation theorems. *Itogi nauki i tekhniki. Ser.: Sovremennaya matematika i ee prilozheniya. Tematicheskie obzory* **65**, 90–117 (1999).

11. Okrasinski W. Some remarks about the infiltration of water from cylindrical reservoir. *Appl. Math.* **16**, 641–646 (1980).

12. Bielecki A. Une remarque sur la methode de Banach — Cacciopoli — Tikhonov dans la theorie des equations differentielles ordinaires. *Bull. Acad. Polon. Sci.* **4** (Cl. III), 261–264 (1956).

13. Askhabov S. N. On an integral equation with sum kernel and an inhomogeneity in the linear part. *Differential Equations* **57** (9), 1210–1219 (2021). (In Russian)

14. Luzin N. N. *Integral and trigonometric series.* Moscow, Gostekhizdat Publ. (1951). (In Russian)

15. Askhabov S. N. System of integro-differential equations of convolution type with power nonlinearity. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki* **24** (3), 5–18 (2021). (In Russian)

16. Krylov V. I. *Approximate calculation of integrals.* Moscow, Nauka Publ. (1967). (In Russian)

17. Samarskiy A. A. *Introduction to the theory of difference schemes.* Moscow, Nauka Publ. (1971). (In Russian)

18. Godunov S. K., Ryaben'kiy V. S. *Difference schemes. Introduction to the theory.* Moscow, Nauka Publ. (1977). (In Russian)

19. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Methods for solving incorrect problems.* Moscow, Nauka Publ. (1979). (In Russian)

20. Askhabov S. N. Integro-differential equation of the convolution type with a power nonlinearity and an inhomogeneity in the linear part. *Differential Equations* **56** (6), 786–795 (2020). (In Russian)

Received: March 19, 2024
Revised: April 15, 2024
Accepted: May 23, 2024

Author's information:

Sultan N. Askhabov — https://orcid.org/0000-0001-6691-9587, askhabov@yandex.ru