УДК 517.925.42 Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4
MSC 34D20, 93D05, 34D10

Нормальная форма и устойчивость нулевого решения периодического обратимого ОДУ второго порядка с малым параметром

В. В. Басов, Ю. Н. Бибиков

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: *Басов В. В., Бибиков Ю. Н.* Нормальная форма и устойчивость нулевого решения периодического обратимого ОДУ второго порядка с малым параметром // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 684–692. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.405

Продолжено изучение вопроса об устойчивости нулевого решения обратимого уравнения

$$\ddot{x} + \beta^2 x^{2n-1} + \varepsilon b(t) x^{n-1}\dot{x} + X(t, x, \dot{x}) = 0$$

при следующих предположениях: n — натуральное, $\varepsilon \geq 0$ — малый параметр, $b(t)$ — нечетная 2π-периодическая функция; разложение сходящегося ряда X по степеням $x, \dot{x}$ с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами не содержит членов порядка ниже $2n$, если переменной x приписать первое измерение, а переменной $\dot{x}$ — измерение n, при этом возмущение X не изменяется при замене времени на противоположное (по знаку). Как известно, для решения вопроса об устойчивости таких возмущений необходимо учитывать все члены ряда X. Такие случаи Ляпунов называл трансцендентными в отличие от алгебраических, где достаточно учитывать лишь конечное число членов ряда. В 2022 г. при рассмотрении случая, когда $n \geq 2$ ($\beta = 1$), было установлено, что при достаточно малом ε, задающем амплитуду колебаний периодической функции $b(t)$ в диссипативном слагаемом, невозмущенное движение $x \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. В работе исследуется случай, когда $n = 1$, β — иррационально (это условие можно ослабить). Задача, как и при $n \geq 2$, решается методами модифицированной для исследования обратимых систем КАМ-теории, согласно которой при малых значениях параметра в любой окрестности начала координат существуют двупериодические инвариантные торы, разделяющие трехмерное конфигурационное пространство и охватывающие ось времени, что означает неасимптотическую устойчивость невозмущенного движения. Однако метод, используемый при доказательстве устойчивости, когда $n = 1$, помимо ненормируемого β имеет ряд существенных отличий. Параметр ε вводится как еще одна переменная того же порядка, что и $x, \dot{x}$ путем добавления уравнения $\dot{\varepsilon} = 0$, после чего полученная система сводится к нормальной форме с постоянными чисто мнимыми коэффициентами. Процесс нормализации оказывается удобным делать в общем виде, считая, что $X = X(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$ и разложение этого ряда начинается не ниже, чем со второго порядка, при этом полученная формальная нормальная форма представляет самостоятельный интерес. Устойчивость в работе доказана в невырожденном случае, когда отличен от нуля первый же коэффициент (его значение найдено), стоящий в нормальной форме при члене, не содержащем ε.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения второго порядка, периодические возмущения, нормальная форма, обратимость, трансцендентность, устойчивость.

1. Введение. Рассмотрим вещественное обратимое уравнение с малым параметром

$$\ddot{x} + \beta^2 x + X(t, x, \dot{x}, \varepsilon) = 0, \tag{1}$$

где β — иррациональное положительное число; $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$, $X(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$, X не изменяется при замене t на $-t$, $\dot{x}$ на $-\dot{x}$ и раскладывается в некоторой окрестности точки $x = \dot{x} = \varepsilon = 0$ в сходящийся степенной ряд $X = \sum_{q_1+q_2+m\geq 2} X^{(q_1,q_2,m)}(t) x^{q_1} \dot{x}^{q_2} \varepsilon^m$ с непрерывными 2π-периодическими коэффициентами $X^{(q_1,q_2,m)}(t)$ ($X^{(0,0,m)}(t) = 0$).

Условие $X(-t, x, -\dot{x}, \varepsilon) = X(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$ равносильно тому, что $X^{(q_1,q_2,m)}(t) = (-1)^{q_2} X^{(q_1,q_2,m)}(-t)$, т. е. функции $X^{(q_1,2k,m)}(t)$ — четные, а $X^{(q_1,2k+1,m)}(t)$ — нечетные.

Особый интерес представляет частный случай уравнения (1), а именно, уравнение

$$\ddot{x} + \beta^2 x + \varepsilon b(t)\dot{x} + \widetilde{X}(t, x, \dot{x}) = 0, \tag{$\tilde{1}$}$$

в которой функция $b(t) = X^{(0,1,1)}(t)$ — нечетная (при $m \geq 1$ все остальные $X^{(q_1,q_2,m)}(t) = 0$), $\widetilde{X} = \sum_{q_1+q_2\geq 2} \widetilde{X}^{(q_1,q_2)}(t) x^{q_1}\dot{x}^{q_2}$, $\widetilde{X}^{(q_1,q_2)}(t) = X^{(q_1,q_2,0)}(t)$, а значит, $\widetilde{X}^{(q_1,2k)}(t)$ — четные, $\widetilde{X}^{(q_1,2k+1)}(t)$ — нечетные функции.

Это связано с тем, что в [1] была исследована устойчивость по Ляпунову нулевого решения обратимого уравнения

$$\ddot{x} + x^{2n-1} + b_r(t)x^{n-1}\dot{x} + X_r(t, x, \dot{x}) = 0 \tag{1_r}$$

при следующих предположениях: $n \geq 2$ — целое; нечетная 2π-периодическая функция $b_r(t)$ имеет достаточно малую амплитуду колебаний; если переменной x приписать первое измерение, а переменной $\dot{x}$ — измерение n, то разложение сходящегося ряда X_r не содержит членов порядка ниже $2n$. Таким образам, в невозмущенной части диссипативный одночлен $x^{n-1}\dot{x}$ имеет, как и восстанавливающая сила x^{2n-1}, порядок $2n - 1$.

Следует отметить, что устойчивость нулевого решения, как в алгебраическом, так и в трансцендентном случаях, была исследована А. М. Ляпуновым для автономного уравнения вида ($\tilde{1}$) в [2] в 1892 г. и для автономного уравнения вида (1_r) — в [3] в 1893 г.

Понятно, что уравнение ($\tilde{1}$) совпадает с уравнением (1_r), в котором $n = 1$, так как малость амплитуды функции $b_r(t)$ можно задать за счет введения в качестве множителя малого параметра ε, а коэффициент β^2 при $n \geq 2$ легко нормируется к единице.

Обратимость уравнений ($\tilde{1}$) и (1_r) гарантирует наличие трансцендентного случая, исследования в котором стали возможны с появлением КАМ-теории, описанной, например, в [4] и модифицированной в [5, 6]. При этом доказательства, используемые в этой статье, существенно отличаются от применяемых в [1] при $n \geq 2$. При $n = 1$ уравнение ($\tilde{1}$), как и (1), требует предварительной нормализации членов младшего порядка, которая осуществима только при определенных ограничениях на β.

Настоящая работа преследует две цели:

1) формальной 2π-периодической заменой привести уравнение (1) к нормальной форме, что, несомненно, имеет самостоятельное значение (см. теорему 1 в разделе 2);

2) указать условия, гарантирующие устойчивость по Ляпунову (не асимптотическую) нулевого решения уравнения ($\tilde{1}$) в невырожденном случае (см. теорему 2 в разделе 3).

В заключение отметим, что при реализации алгебраического случая для уравнения (1_r), в котором $b_r(t) \equiv b_0$ ($b_0^2 < 4n$) и периодическое, но необратимое возмущение, устойчивость нулевого решения была изучена в [7].

2. Нормализация. Уравнение (1) будем трактовать как систему, добавляя к нему уравнение $\dot{\varepsilon} = 0$.

Стандартная замена

$$x = y_1, \quad \dot{x} = y_2 \tag{2}$$

преобразует уравнение (1) в систему

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ X(t, y_1, y_2, \varepsilon) \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta^2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

Линейная замена

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\beta & -\mathrm{i}\beta \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i}\beta^{-1} \\ 1 & +\mathrm{i}\beta^{-1} \end{pmatrix}$, $J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\beta & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\beta \end{pmatrix}$, преобразует (3) в систему $\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\overline{z}} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} z \\ \overline{z} \end{pmatrix} - S^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ X(t, z+\overline{z}, \mathrm{i}\beta(z-\overline{z}), \varepsilon) \end{pmatrix}$, или в систему

$$\dot{z} = \mathrm{i}\big(\beta z + Z(t, z, \overline{z}, \varepsilon)\big), \quad \dot{\overline{z}} = -\mathrm{i}\big(\beta \overline{z} + Z(t, z, \overline{z}, \varepsilon)\big), \tag{5}$$

где $Z = (2\beta)^{-1} X(t, z+\overline{z}, \mathrm{i}\beta(z-\overline{z}), \varepsilon)$ — вещественнозначная 2π-периодическая функция, не изменяющаяся при замене t на $-t$ и z на $\overline{z}$ или i на $-\mathrm{i}$; другими словами,

$$Z = \sum_{p_1+p_2+m\geq 2} Z^{(p_1,p_2,m)}(t) z^{p_1} \overline{z}^{p_2} \varepsilon^m \equiv (2\beta)^{-1} \sum_{q_1+q_2+l\geq 2} \mathcal{X}^{(q_1,q_2,l)}(t)(z+\overline{z})^{q_1}(z-\overline{z})^{q_2}\varepsilon^l,$$

где $\mathcal{X}^{(q_1,q_2,l)} = (\mathrm{i}\beta)^{q_2} X^{(q_1,q_2,l)}(t)$, тогда $\mathcal{X}^{(q_1,2k,l)} = (-1)^k \beta^{2k} X^{(q_1,2k,l)}(t)$ — вещественные, $\mathcal{X}^{(q_1,2k+1,l)} = \mathrm{i}\,(-1)^k \beta^{2k+1} X^{(q_1,2k+1,l)}(t)$ — чисто-мнимые и $\mathcal{X}^{(q_1,q_2,l)}(t) = \overline{\mathcal{X}^{(q_1,q_2,l)}}(-t)$; кроме того $Z^{(p_1,p_2,m)}(t) = \overline{Z^{(p_2,p_1,m)}}(t)$ в силу вещественности ряда Z.

Таким образом, $Z^{(p_1,p_2,m)}(t) = \sum_{\nu=0}^{p_1+p_2} a_\nu \mathcal{X}^{(p_1+p_2-\nu,\nu,m)}(t)$ ($a_\nu \in \mathbb{R}^1$), поэтому $Z^{(p_1,p_2,m)}(t) = \overline{Z^{(p_1,p_2,m)}}(-t)$.

Рассмотрим формальную замену

$$z = u + h(t, u, \overline{u}, \varepsilon), \quad \overline{z} = \overline{u} + \overline{h}(t, \overline{u}, u, \varepsilon), \tag{6}$$

где $h = \sum_{p_1+p_2+m\geq 2} h^{(p_1,p_2,m)}(t) u^{p_1} \overline{u}^{p_2} \varepsilon^m$ — ряд с 2π-периодическими коэффициентами.

Теорема 1. *Пусть β иррационально, тогда замена* (6) *преобразует систему* (5) *в нормальную форму*

$$\dot{u} = \mathrm{i}u\big(\beta + \zeta(u\overline{u}, \varepsilon)\big), \quad \dot{\overline{u}} = -\mathrm{i}\overline{u}\big(\beta + \zeta(u\overline{u}, \varepsilon)\big), \tag{7}$$

где ряд $\zeta = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{2k+m=j} \zeta^{(2k+1,m)} (u\overline{u})^k \varepsilon^m$ $(k, m \in \mathbb{Z}_+)$, *причем* $\zeta^{(2k+1,m)} \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Дифференцируя по t замену (6) в силу систем (5) и (7), получаем тождество:

$$\mathrm{i}\big(\beta(u+h)+Z(t,u+h,\overline{u}+\overline{h},\varepsilon)\big)\equiv \mathrm{i}u(\beta+\zeta)+\dot h+\frac{\partial h}{\partial u}\mathrm{i}u(\beta+\zeta)-\frac{\partial h}{\partial \overline{u}}\mathrm{i}\overline{u}(\beta+\zeta),$$

или

$$\dot h+\mathrm{i}\beta\left(\frac{\partial h}{\partial u}u-\frac{\partial h}{\partial \overline{u}}\overline{u}-h\right)\equiv \mathrm{i}\left(\xi(t,u,\overline{u},\varepsilon)-\frac{\partial h}{\partial u}u\zeta+\frac{\partial h}{\partial \overline{u}}\overline{u}\zeta-u\zeta\right), \tag{8}$$

где $\xi=\sum_{p_1+p_2+m\geq 2}\xi^{(p_1,p_2,m)}(t)u^{p_1}\overline{u}^{p_2}\varepsilon^m=\sum_{q_1+q_2+l\geq 2}Z^{(q_1,q_2,l)}(t)(u+h)^{q_1}(\overline{u}+\overline{h})^{q_2}\varepsilon^l$.

Поскольку функция $\xi^{(p_1,p_2,m)}(t)$ представляет собой конечную сумму слагаемых вида $aZ^{(q_1,q_2,l)}(t)\prod_{j=0}^{j_*}h_*^{(r_{1j},r_{2j},l_j)}(t)$, где $a\in\mathbb{R}^1$, $h_*^{(\dots)}$ — это $h^{(\dots)}(t)$ или $\overline{h^{(\dots)}}(t)$, заключаем, что $\xi^{(p_1,p_2,m)}(t)=\overline{\xi^{(p_1,p_2,m)}}(-t)$, если все функции $h^{(r_1,r_2,l)}(t)=\overline{h^{(r_1,r_2,l)}}(-t)$.

Приравнивая последовательно в лексико-графическом порядке коэффициенты при $u^{p_1}\overline{u}^{p_2}\varepsilon^m$ $(p_1+p_2+m\geq 2)$, получаем следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{gathered}\dot h^{(p_1,p_2,m)}(t)+\mathrm{i}\beta(p_1-p_2-1)h^{(p_1,p_2,m)}(t)=\mathrm{i}\eta^{(p_1,p_2,m)}(t)\qquad (p_1\neq p_2+1),\\ \dot h^{(k+1,k,m)}(t)=\mathrm{i}\big(\eta^{(k+1,k,m)}(t)-\zeta^{(2k+1,m)}\big)\qquad (p_1=k+1,\ p_2=k),\end{gathered}\tag{9}$$

где $\eta^{(p_1,p_2,m)}=\xi^{(p_1,p_2,m)}(t)-\sum_{r+l\geq 1}(p_1+p_2-2r)\zeta^{(2r+1,l)}h^{(p_1-r,p_2-r,m-l)}(t)$.

Иррациональность β означает, что число $j\beta+l\neq 0$ для любых $j,l\in\mathbb{Z}$ $(j+l\neq 0)$, а значит, $e^{2\pi\mathrm{i}j\beta}\neq 1$, что позволяет последовательно с ростом p_1+p_2+m находить 2π-периодические функции $h^{(p_1,p_2,m)}(t)$ и коэффициенты $\zeta^{(2k+1,m)}$ $(k\geq 0)$:

$$\begin{gathered}h^{(p_1,p_2,m)}(t)=\mathrm{i}\big(1-e^{-2\pi(p_1-p_2-1)\mathrm{i}\beta}\big)^{-1}\int_{t-2\pi}^{t}e^{(p_1-p_2-1)\mathrm{i}\beta(\tau-t)}\eta^{(p_1,p_2,m)}(\tau)\,d\tau\\ (p_1\neq p_2+1),\\ \zeta^{(2k+1,m)}=\int_0^{2\pi}\eta^{(k+1,k,m)}(t)\,dt,\quad h^{(k+1,k,m)}(t)=\mathrm{i}\int_0^t\big(\eta^{(k+1,k,m)}(\tau)-\zeta^{(2k+1,m)}\big)\,d\tau.\end{gathered}\tag{10}$$

При этом $h^{(p_1,p_2,m)}(t)=\overline{h^{(p_1,p_2,m)}}(-t)$ и $\zeta^{(2k+1,m)}\in\mathbb{R}^1$, если $\eta^{(p_1,p_2,m)}(t)=\overline{\eta^{(p_1,p_2,m)}}(-t)$, и $h^{(0,0,m)}(t)=0$, если $\eta^{(0,0,m)}(t)=0$.

Действительно,

$$\begin{gathered}\overline{h^{(p_1,p_2,m)}}(-t)=\\ =-\mathrm{i}\left(1-e^{2\pi(p_1-p_2-1)\mathrm{i}\beta}\right)^{-1}\int_{-t-2\pi}^{-t}e^{-(p_1-p_2-1)\mathrm{i}\beta(\tau+t)}\overline{\eta}^{(p_1,p_2,m)}(\tau)\,d\tau^{\tau=-s-2\pi}=\\ =\mathrm{i}\,\frac{e^{2\pi(p_1-p_2-1)\mathrm{i}\beta}}{1-e^{2\pi(p_1-p_2-1)\mathrm{i}\beta}}\int_t^{t-2\pi}e^{-(p_1-p_2-1)\mathrm{i}\beta(s-t)}\overline{\eta^{(p_1,p_2,m)}}(-s-2\pi)\,ds=h^{(p_1,p_2,m)}(t)\\ (p_1\neq p_2+1),\\ \zeta^{(2k+1,m)}=\int_0^{2\pi}\eta^{(k+1,k,m)}(t)\,dt=\\ =\int_0^{2\pi}\overline{\eta^{(k+1,k,m)}}(-t)\,dt=\int_{-2\pi}^{0}\overline{\eta^{(k+1,k,m)}}(\tau)\,d\tau=\overline{\zeta^{(2k+1,m)}},\\ \overline{h^{(k+1,k,m)}}(-t)=-\mathrm{i}\int_0^{-t}\big(\overline{\eta^{(k+1,k,m)}}(\tau)-\zeta^{(2k+1,m)}\big)\,d\tau=\\ =\mathrm{i}\int_0^t\big(\overline{\eta^{(k+1,k,m)}}(-s)-\zeta^{(2k+1,m)}\big)\,ds=h^{(k+1,k,m)}(t).\end{gathered}$$

При $p_1+p_2+m=2$ имеем $\eta^{(p_1,p_2,m)}(t) \overset{(9)}{=} \xi^{(p_1,p_2,m)}(t) \overset{(8)}{=} Z^{(p_1,p_2,m)}(t)$, и в силу (5)

$$\begin{gathered}
\eta^{(1,0,1)} = (2\beta)^{-1}\big(X^{(1,0,1)}(t) + \mathrm{i}\beta X^{(0,1,1)}(t)\big),\\
\eta^{(0,1,1)} = (2\beta)^{-1}\big(X^{(1,0,1)}(t) - \mathrm{i}\beta X^{(0,1,1)}(t)\big), \quad \eta^{(0,0,2)} = (2\beta)^{-1} X^{(0,0,2)}(t) = 0,\\
\eta^{(2,0,0)} = (2\beta)^{-1}\big(X^{(2,0,0)}(t) + \mathrm{i}\beta X^{(1,1,0)}(t) - \beta^2 X^{(0,2,0)}(t)\big),\\
\eta^{(1,1,0)} = (2\beta)^{-1}\big(2X^{(2,0,0)}(t) + 2\beta^2 X^{(0,2,0)}(t)\big),\\
\eta^{(0,2,0)} = (2\beta)^{-1}\big(X^{(2,0,0)}(t) - \mathrm{i}\beta X^{(1,1,0)}(t) - \beta^2 X^{(0,2,0)}(t)\big).
\end{gathered} \tag{11}$$

Поэтому $\eta^{(p_1,p_2,m)}(t) = \overline{\eta^{(p_1,p_2,m)}}(-t)$, что дает требуемую базу индукции. $\square$

Для исследования устойчивости проведем частичную нормализацию уравнения (1).

Лемма 1. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ при условии, что

$$j\beta \notin \mathbb{Z} \quad \text{при} \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{12}$$

уравнение (1) аналитически эквивалентно системе

$$\dot u = \mathrm{i}u\big(\beta + \zeta_n(u\overline{u}, \varepsilon)\big) + \mathrm{i}U_n(t, u, \overline{u}, \varepsilon), \quad \dot{\overline{u}} = -\mathrm{i}\overline{u}\big(\beta + \zeta_n(u\overline{u}, \varepsilon)\big) - \mathrm{i}\overline{U_n}(t, \overline{u}, u, \varepsilon), \tag{13}$$

где $\zeta_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{2k+m=j} \zeta^{(2k+1,m)}(u\overline{u})^k \varepsilon^m$, $U_n = \sum_{p_1+p_2+m\ge n+2} U^{(p_1,p_2,m)}(t) u^{p_1}\overline{u}^{p_2}\varepsilon^m$ — абсолютно сходящийся ряд с 2π-периодическими коэффициентами $U^{(p_1,p_2,m)}(t)$ такими, что $\overline{U^{(p_1,p_2,m)}}(-t) = U^{(p_1,p_2,m)}(t)$, $U^{(0,0,m)}(t) = 0$.

Доказательство. Композиция замен (2) и (4) приводит (1) к системе (5).

Покажем, что полиномиальная замена

$$z_1 = u + h_n(t, u, \overline{u}, \varepsilon), \quad z_2 = \overline{u} + \overline{h}_n(t, \overline{u}, u, \varepsilon),$$

где $h_n = \sum_{p_1+p_2+m=2}^{n+1} h^{(p_1,p_2,m)}(t) u^{p_1}\overline{u}^{p_2}\varepsilon^m$, а функции $h^{(p_1,p_2,m)}(t)$ берутся из нормализующей замены (6), сводит систему (5) к системе (13), при этом $h^{(p_1,p_2,m)}(t) = \overline{h^{(p_1,p_2,m)}}(-t)$.

Здесь следует иметь в виду, что ограничение максимального суммарного порядка многочлена h_n числом $n+1$ дает возможность ослабить условие из теоремы 1 на β, заменив иррациональность β ограничением (12), позволяющим решить уравнения (9) при $p_1+p_2+m \le n+1$.

Продифференцируем замену по t в силу систем (5) и (13), получая тождество

$$\begin{gathered}
\mathrm{i}\big(\beta(u+h_n) + Z(t, u+h_n, \overline{u}+\overline{h_n}, \varepsilon)\big) \equiv \mathrm{i}u(\beta+\zeta_n) + \mathrm{i}U_n +\\
+\dot h_n + \frac{\partial h_n}{\partial u}\mathrm{i}\left(u(\beta+\zeta_n) + U_n\right) - \frac{\partial h_n}{\partial \overline{u}}\mathrm{i}\left(\overline{u}(\beta+\zeta_n) + \overline{U_n}\right),
\end{gathered}$$

в котором согласно (8) сокращаются все слагаемые, имеющие порядки $p_1+p_2+m \le n+1$, а при $p_1+p_2+m \ge n+2$ получаем

$$U_n = Z(t, u+h_n, \overline{u}+\overline{h_n}, \varepsilon) - \frac{\partial h_n}{\partial u}u\big(\zeta_n + U_n\big) + \frac{\partial h_n}{\partial \overline{u}}\overline{u}\big(\zeta_n - \overline{U_n}\big) - U_n^*,$$

где многочлен $U_n^*(t, u, \overline{u}, \varepsilon)$ аннулирует в правой части члены порядка, меньшего $n+2$.

Теперь индукцией легко установить, что $\overline{U^{(p_1,p_2,m)}}(-t) = U^{(p_1,p_2,m)}(t)$. $\square$

3. Устойчивость. Для исследования устойчивости по Ляпунову нулевого решения уравнения $(\tilde{1})$ необходимо найти первые коэффициенты его нормальной формы.

Лемма 2. Пусть β удовлетворяет условию (12) с $n = 2$, тогда уравнение $(\tilde{1})$ аналитически эквивалентно системе (13), в которой

$$\zeta^{(1,1)} = 0; \quad \zeta^{(1,2)} = 0, \quad \zeta^{(3,0)} = \int_0^{2\pi} \eta^{(2,1,0)}(t)\, dt, \tag{14}$$

$$\begin{gathered}
\eta^{(2,1,0)} = (2\beta)^{-1}\Big(3\widetilde{X}^{(3,0)}(t) + \mathrm{i}\beta\widetilde{X}^{(2,1)}(t) + \beta^2\widetilde{X}^{(1,2)}(t) + 3\mathrm{i}\beta^3\widetilde{X}^{(0,3)}(t) + \\
+2\widetilde{X}^{(2,0)}(t)\big(h^{(2,0,0)}(t) + 2\operatorname{Re} h^{(1,1,0)}(t) + h^{(1,0,1)}(t)\big) - \\
-2\,\mathrm{i}\beta\widetilde{X}^{(1,1)}(t)\big(h^{(1,1,0)}(t) - h^{(1,0,1)}(t)\big) + \\
+2\beta^2\widetilde{X}^{(0,2)}(t)\big(h^{(2,0,0)}(t) - 2\operatorname{Im} h^{(1,1,0)}(t) - h^{(1,0,1)}(t)\big)\Big); \\
h^{(1,0,1)}(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t b(\tau)\, d\tau, \quad h^{(2,0,0)}(t) = \mathrm{i}\left(1 - e^{-2\pi\mathrm{i}\beta}\right)^{-1}\int_{t-2\pi}^t e^{\mathrm{i}\beta(\tau-t)}\eta^{(2,0,0)}(\tau)\, d\tau, \\
h^{(1,1,0)}(t) = \mathrm{i}\left(1 - e^{-2\pi(-\mathrm{i}\beta)}\right)^{-1}\int_{t-2\pi}^t e^{-\mathrm{i}\beta(\tau-t)}\eta^{(1,1,0)}(\tau)\, d\tau.
\end{gathered}$$

Доказательство. Поскольку в уравнении $(\tilde{1})$ функция $b(t) = X^{(0,1,1)}(t)$ — нечетная, а $X^{(1,0,1)}(t) = 0$, то в (11) функция $\eta^{(1,0,1)}(t) = \mathrm{i}b(t)/2$, поэтому в (10) коэффициент $\zeta^{(1,1)} = 0$ и функция $h^{(1,0,1)}(t)$ указана в (14). Далее имеем

$$\begin{gathered}
\eta^{(1,0,2)} \overset{(9)}{=} \xi^{(1,0,2)}(t) \overset{(8)}{=} Z^{(1,0,2)}(t) + Z^{(1,0,1)}(t)h^{(1,0,1)}(t) + Z^{(0,1,1)}(t)\overline{h^{(1,0,1)}}(t); \\
Z^{(1,0,2)} \overset{(5)}{=} (2\beta)^{-1}\big(X^{(1,0,2)}(t) + \mathrm{i}\beta X^{(0,1,2)}(t)\big) = 0, \\
Z^{(1,0,1)} \overset{(5)}{=} (2\beta)^{-1}\big(X^{(1,0,1)}(t) + \mathrm{i}\beta X^{(0,1,1)}(t)\big) = \mathrm{i}b(t)/2, \quad Z^{(0,1,1)} \overset{(5)}{=} \overline{Z^{(1,0,1)}}(t),
\end{gathered}$$

поэтому $\eta^{(1,0,2)}(t) = 0$ и согласно (10) константа $\zeta^{(1,2)} = 0$. Теперь

$$\begin{gathered}
\eta^{(2,1,0)} \overset{(9)}{=} \xi^{(2,1,0)}(t) \overset{(8)}{=} \\
= Z^{(2,1,0)}(t) + 2Z^{(2,0,0)}(t)h^{(1,1,0)}(t) + 2Z^{(0,2,0)}(t)\overline{h^{(1,0,1)}}(t) + \\
+Z^{(1,1,0)}(t)\big(h^{(2,0,0)}(t) + \overline{h^{(1,1,0)}}(t)\big); \\
Z^{(2,1,0)} = (2\beta)^{-1}\big(3\mathcal{X}^{(3,0,0)}(t) + \mathcal{X}^{(2,1,0)}(t) - \mathcal{X}^{(1,2,0)}(t) - 3\mathcal{X}^{(0,3,0)}(t)\big), \\
Z^{(2,0,0)} = (2\beta)^{-1}\big(\mathcal{X}^{(2,0,0)}(t) + \mathcal{X}^{(1,1,0)}(t) + \mathcal{X}^{(0,2,0)}(t)\big), \\
Z^{(0,2,0)} = (2\beta)^{-1}\big(\mathcal{X}^{(2,0,0)}(t) - \mathcal{X}^{(1,1,0)}(t) + \mathcal{X}^{(0,2,0)}(t)\big), \\
Z^{(1,1,0)} = (2\beta)^{-1}\big(2\mathcal{X}^{(2,0,0)}(t) - 2\mathcal{X}^{(0,2,0)}(t)\big).
\end{gathered}$$

Остается, используя (5), перейти к обозначениям для коэффициентов ряда $\widetilde{X}$ из уравнения $(\tilde{1})$ и выписать из (10) формулы для $h^{(2,0,0)}(t)$ и $h^{(1,1,0)}(t)$. $\square$

Теорема 2. *Пусть в уравнении* $(\tilde{1})$ $\beta \neq l/3, l/2$ *для любого* $l \in N$ *и введенная в* (14) *вещественная константа*

$$\int_0^{2\pi} \eta^{(2,1,0)}(t)\, dt = \gamma \neq 0, \tag{15}$$

тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, *что при любом* $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$ *нулевое решение уравнения* $(\tilde{1})$ *устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Сделанного для β предположения достаточно для существования 2π-периодических коэффициентов замены (6), вычисляемых по формулам (12). Следовательно, по теореме 2 с $n = 2$ уравнение ($\tilde{1}$) аналитически эквивалентно системе

$$\dot{u} = +\mathrm{i}u\big(\beta + \gamma u\overline{u}\big) + \mathrm{i}U_2(t, u, \overline{u}, \varepsilon), \quad \dot{\overline{u}} = -\mathrm{i}\overline{u}\big(\beta + \gamma u\overline{u}\big) - \mathrm{i}\overline{U_2}(t, \overline{u}, u, \varepsilon), \tag{16}$$

в которой $U_2 = \sum_{p_1+p_2+m\geq 4} U^{(p_1,p_2,m)}(t)u^{p_1}\overline{u}^{p_2}\varepsilon^m$ — абсолютно сходящийся ряд с 2π-периодическими коэффициентами, такими, что $\overline{U^{(p_1,p_2,m)}}(-t) = U^{(p_1,p_2,m)}(t)$ и $U^{(0,0,m)}(t) = 0$.

Полярная замена

$$u = \rho e^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \overline{u} = \rho e^{-\mathrm{i}\varphi},$$

преобразует (16) в систему

$$\dot{\rho} = \operatorname{Re}\mathcal{U}(t, \varphi, \rho, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \beta + \gamma\rho^2 + \rho^{-1}\operatorname{Im}\mathcal{U}(t, \varphi, \rho, \varepsilon), \tag{17}$$

где $\mathcal{U} = \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}\varphi}U_2(t, \rho e^{\mathrm{i}\varphi}, \rho e^{-\mathrm{i}\varphi}, \varepsilon) = \sum_{p_1+p_2+m\geq 4} U^{(p_1,p_2,m)}(t)\,\mathrm{i}e^{\mathrm{i}(p_1-p_2-1)\varphi}\rho^{p_1+p_2}\varepsilon^m$ $(p_1 + p_2 \geq 1)$ — непрерывная по t, аналитическая при $|\operatorname{Im}\varphi| < \varphi_0,\ |\rho| < \rho_0,\ |\varepsilon| < \varepsilon_0$ и 2π-периодическая по t, φ функция.

Система (17) — обратимая, она не меняется при замене t на $-t$ и φ на $-\varphi$.

Действительно, $\mathcal{U}(-t, -\varphi, \rho, \varepsilon) = -\operatorname{Re}\mathcal{U}(t, \varphi, \rho, \varepsilon) + \mathrm{i}\operatorname{Im}\mathcal{U}(t, \varphi, \rho, \varepsilon)$ в силу тождества $\overline{U^{(p_1,p_2,m)}}(-t) = U^{(p_1,p_2,m)}(t)$ и для $\chi(\varphi_*) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi_*}$ имеем $\chi(-\varphi_*) = -\operatorname{Re}\chi(\varphi_*) + \mathrm{i}\operatorname{Im}\chi(\varphi_*)$.

Сделаем замену

$$\rho = \varepsilon\big(c^{1/2} + r\varepsilon^{1/2}\big) \quad (1/2 < c^{1/2} < 3/2)$$

(это замена (2) при $n = 2$ из [6, гл. 3, § 2]), преобразующую (17) в систему

$$\dot{r} = \varepsilon^{5/2}R(t, \varphi, r, \varepsilon^{1/2}, c^{1/2}), \quad \dot{\varphi} = \beta + \gamma c\varepsilon^2 + \varepsilon^{5/2}\Phi(t, \varphi, r, \varepsilon^{1/2}, c^{1/2}) \quad (\gamma \neq 0), \tag{18}$$

в которой R, Φ — аналитические функции $\varphi, r, \varepsilon^{1/2}, c^{1/2}$ при $|\operatorname{Im}\varphi| < \varphi_0, |r| < r_0, |\varepsilon| < \varepsilon_0, |c^{1/2} - 1| < 1/2$, так как, например,

$$\rho^{-1}\mathcal{U}(t, \varphi, \rho, \varepsilon)\big|_{\rho=\varepsilon(c^{1/2}+r\varepsilon^{1/2})} =$$

$$= \sum_{\substack{p_1+p_2\geq 1,\\ p_1+p_2+m\geq 4}} U^{(p_1,p_2,m)}(t)\,\mathrm{i}e^{\mathrm{i}(p_1-p_2-1)\varphi}\varepsilon^{p_1+p_2-1+m}\varepsilon^m(c^{1/2} + r\varepsilon^{1/2})^{p_1-p_2-1}.$$

Дальнейшее доказательство заключается в следующем.

К системе (18), совпадающей с системой (3) из [6, гл. 3, § 2] при $\beta = \lambda$, $\gamma = g$, применима КАМ-теория. В [6, гл. 2, § 6] доказано, что для системы (3) подходящим выбором $K > 0$ можно добиться, чтобы мера множества точек ω, принадлежащих отрезку длины $\gamma\varepsilon^2$ и удовлетворяющих неравенству

$$|q\omega + p| > K\gamma\varepsilon^2 q^{-2} \qquad (q \in \mathbb{N},\ p \in \mathbb{Z}),$$

превосходила $\gamma\varepsilon^2(1 - \alpha)$ при сколь угодно малом α (см. [6, гл. 2, § 4], условие (9)).

Каждой такой точке ω соответствует двупериодическое решение системы (3) вида

$$r = v_1(\omega t + \varphi_0, t, \varepsilon^{1/2}), \quad \varphi = \omega t + \varphi_0 + v_2(\omega t + \varphi_0, t, \varepsilon^{1/2}),$$

где v_1, v_2 — непрерывные 2π-периодические функции по первым двум аргументам.

Сечением этой поверхности плоскостью $t = t_*$ является окружность с угловой переменной φ_0, откуда и вытекает устойчивость решения $r = 0$. $\square$

Замечание. Понятно, что при невыполнении условия (15) можно продолжить частичную нормализацию уравнения $(\tilde{1})$ до появления при некотором $n \geq 3$ в системе (13) первого отличного от нуля многочлена $\sum_{2k+m=n} \zeta^{(2k+1,m)}(u\overline{u})^k \varepsilon^m$ при выполнении условия (12) на β, что само по себе технически трудновыполнимо и ведет к потере конструктивности. Но при этом возникают проблемы, связанные с появлением во втором уравнении системы (18) вместо слагаемого $\gamma c \varepsilon^2$ линейной комбинации различных степеней параметра c в качестве множителя при ε^n. Подобное усиление теоремы 2 требует дополнительных глубоких исследований.

Литература

1. Бибиков Ю. Н. Об устойчивости нулевого решения периодического обратимого дифференциального уравнения. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия* **9** (67), вып. 3, 474–479 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.308

2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. В: *Собр. соч.* Т. 2, 7–263. Москва; Ленинград, Изд-во АН СССР (1956).

3. Ляпунов А. М. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. В: *Собр. соч.* Т. 2, 272–331. Москва; Ленинград, Изд-во АН СССР (1956).

4. Мозер Ю. К. О разложении условно-периодических движений в сходящиеся степенные ряды. *УМН* **24**, вып. 2 (146), 165–211 (1969).

5. Матвеев М. В. Устойчивость по Ляпунову положений равновесия обратимых систем. *Математические заметки* **57**, вып. 1, 90–104 (1995).

6. Бибиков Ю. Н. *Локальные проблемы теории многочастотных нелинейных колебаний.* Санкт-Петербург, Изд-во С.-Петерб. ун-та (2003).

7. Басов В. В., Бибиков Ю. Н. Об устойчивости положения равновесия в одном случае периодического возмущения центра. *Дифференц. уравнения* **33** (5), 583–586 (1997).

Статья поступила в редакцию 6 февраля 2024 г.;
доработана 22 апреля 2024 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Басов Владимир Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доц.;
https://orcid.org/0000-0002-9618-5235, vlvlbasov@rambler.ru
Бибиков Юрий Николаевич — д-р физ.-мат. наук, проф.;
https://orcid.org/0000-0002-0663-2012, bibicoff@yandex.ru

Normal form and stability of the zero solution of a second-order periodic invertible ODE with a small parameter

V. V. Basov, Yu. N. Bibikov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation

For citation: Basov V. V., Bibikov Yu. N. Normal form and stability of the zero solution of a second-order periodic invertible ODE with a small parameter. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 684–692.
https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.405 (In Russian)

The problem of the stability of the zero solution of differential equation

$$\ddot{x} + \beta^2 x^{2n-1} + \varepsilon b(t) x^{n-1} \dot{x} + X(t, x, \dot{x}) = 0$$

under the following assumptions, is considered: n is a natural number, ε is a non-negative parameter, X is real analitic in $x, \dot{x}$, continuous and 2π-periodic in t function, expansion of X does not contain terms of order $< 2n$ if the order of $\dot{x}$ is ascribed to be equal to n. Order of x is equal to 1. Also, $b(t)$ is continuous 2π-periodic odd function and $X(-t, x, -\dot{x}) = X(t, x, \dot{x})$. Thus, the equation is invariant under change $t \to -t$. Such equations are named reversible. There are two possibilities. Either all terms of the expansion of X must be taken into consideration or only a finite number of them is needed. After Liapunov, the first case is named transcendental and the second one is named algebraic. Reversible equations are transcendental. In 2022, it was established that the trivial solution of the equation is stable if $n \geq 2$ ($\beta = 1$). This paper is devoted to the case $n = 1$, β is irrational (this condition may be weakened). For proof methods of KAM-theory modified for reversible systems are used. According to this theory in any neighborhood of the origin there exist invariant two-dimension tori dividing three-dimensional phase space. This implies the stability of the trivial solution. There are some differences between application of the KAM-theory if $n \geq 2$ and if $n = 1$. Small parameter is treated as one of the variables with the same order as the order of $x, \dot{x}$, and the obtained system can be reduced to the normal form with the constant and pure imaginary coefficients. It is shown that the normalization process is more convenient, if it is assumed that $X = X(t, x, \dot{x}, \varepsilon)$, and its expansion starts with terms of order two or greater. The obtained formal normal form presents an interesting subject on its own. The stability is proven under condition that the first coefficient of the normal form, that doesn't contain the small parameter, is not zero. The degenerate case, where this coefficient is a zero, requires additional research, because the main theorems of the KAM-theory cannot be applied without further modifications.

Keywords: second-order differential equations, periodic perturbations, stability, normal form, reversibility, transcendence.

References

1. Bibikov Yu. N. On the stability of the zero solution of a periodic reversible second-order differential equation. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* **9** (67), iss. 3, 474–479 (2022). https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.308 (In Russian) [Eng. transl.: *Vestnik St. Petersburg University. Mathematics* **55**, iss. 3, 297–300 (2022)].

2. Lyapunov A. M. On the problem of stability of motion. In: *Collected Works.* Vol. 2, 7–263. Moscow, Akad. Nauk SSSR Publ. (1956). (In Russian)

3. Lyapunov A. M. Investigation of one particular case of the problem of stability of motion. In: *Collected Works.* Vol. 2, 272–331. Moscow, Akad. Nauk SSSR Publ. (1956). (In Russian)

4. Moser J. Convergent series expansions for quasi-periodic motions. *Uspekhi matematicheskikh nauk* **24**, iss. 2 (146), 165–211 (1969). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. Ann.* **169**, 136–176 (1967). https://doi.org/10.1007/BF01399536].

5. Matveev M. V. Lyapunov stability of equilibrium states of reversible systems. *Matematicheskie zametki* **57**, iss. 1, 90–104 (1995). (In Russian) [Eng. transl.: *Math. notes* **57**, iss. 1, 63–72 (1995). https://doi.org/10.1007/BF02309395].

6. Bibikov Yu. N. *Multifrequency Nonlinear Oscillations and Their Bifurcations.* Leningrad, Leningrad University Press (1991). (In Russian)

7. Basov V. V., Bibikov Yu. N. On the stability of the equilibrium position in one case of periodic perturbation of the center. *Differentsial'nye uravneniia* **33** (5), 583–586 (1997). (In Russian) [Eng. transl.: *Differ. equations* **33**, 587–590 (1997)].

Received: February 6, 2024
Revised: April 22, 2024
Accepted: May 23, 2024

Authors' information:

Vladimir V. Basov — https://orcid.org/0000-0002-9618-5235, vlvlbasov@rambler.ru
Yuri N. Bibikov — https://orcid.org/0000-0002-0663-2012, bibicoff@yandex.ru