

О задаче построения управления манипулятором при динамической имитации полета летательного аппарата*

М. Д. Белоусова, И. А. Кудряшов, С. С. Лемак

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российская Федерация, 119991, Москва, Ленинские горы, 1

Для цитирования: Белоусова М. Д., Кудряшов И. А., Лемак С. С. О задаче построения управления манипулятором при динамической имитации полета летательного аппарата // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 693–705. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.406>

Для качественного обучения пилотов необходимо использовать динамические тренажеры, позволяющие проводить обучение в условиях, наиболее приближенных к реальным. Тренажер предполагается формировать на базе шестизвонного робота-манипулятора, звенья которого соединены последовательным образом. На конце такого манипулятора закреплен оператор, работающий на тренажере. Математическое обеспечение стенда включает в себя алгоритм динамической имитации, состоящий из двух фаз: имитации движения и возврата из границы рабочей области в ее центр. На фазе имитации движения концевой эффектор манипулятора должен двигаться таким образом, чтобы ускорения, действующие на чувствительные массы оператора, совпадали по направлению и величине, если это возможно, с теми, которые действовали бы на человека в течение реального полета. Более того, алгоритмы имитации движения могут различаться для отдельных маневров — для построения качественных алгоритмов имитации нередко приходится учитывать особенности выполняемого аппаратом движения. На фазе возврата концевой эффектора манипулятора в центр рабочей области действующие на чувствительные массы оператора величины скоростей и ускорений не должны превышать пороговых значений, чтобы не нарушать эффект присутствия. Для построения алгоритмов динамической имитации также необходимо определить рабочую область манипулятора. В данной статье представлены некоторые результаты работы по построению алгоритмов имитации: дано описание рабочей области манипулятора, представлено решение экстремальной задачи возврата концевой эффектора манипулятора в центр рабочей области при наличии ограничений на величину развиваемого ускорения.

Ключевые слова: динамическая имитация, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, синтез оптимального управления, многозвенный манипулятор, кинематическое управление.

1. Введение. Качественные тренажеры по управлению летательными аппаратами обычно реализуют визуальную, акустическую, динамическую имитацию полета. Динамическая имитация (ДИ) полета состоит в реализации такого движения стенда с закрепленным на нем оператором, чтобы воздействия на механорецепторы организма оператора были схожи с получаемыми воздействиями в процессе реаль-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках программы центра «Сверхзвук» (соглашение № 075-15-2022-331).

© Санкт-Петербургский государственный университет, 2024

ного полета [1]. На данный момент существует огромное количество динамических стендов с различными кинематическими схемами, динамическими возможностями, алгоритмами динамической имитации [1, 2]. Создаются и новые стенды, использование которых позволит увеличить эффект погружения в имитируемую среду, уменьшить рассогласование получаемой органами чувств человека информации, т. е. выполнить более качественную динамическую имитацию. Однако зачастую для разных типов стендов требуется разрабатывать различные алгоритмы динамической имитации, учитывающие особенности стенда и характеристики имитируемого движения.

Одним из перспективных вариантов базы для пилотажного стенда для сверхзвукового пассажирского летательного аппарата (ЛА) представляется промышленный робот-манипулятор с закрепленными на его концевом эффекторе кабиной и креслом для пилота. Математическое обеспечение стенда включает в себя алгоритм ДИ, состоящий из двух фаз: имитации движения и возврата с границы рабочей области в ее центр. В силу различного рода ограничений на кинематические и динамические параметры стенда задача ДИ может быть решена с приемлемой точностью только для ограниченных маневров ЛА на сравнительно коротком интервале времени. На фазе ДИ концевой эффектор стенда должен находиться в так называемой рабочей области динамического стенда. Рабочая область является сужением области допустимых положений эффектора. Далее приведен пример построения рабочей области для стенда на базе промышленного манипулятора FANUC M2000iA.

2. Описание динамического стенда. Динамический стенд предполагается строить на базе манипулятора Fanuc M2000iA 900L (рис. 1). По характеристикам из документации для него было построено множество допустимых положений концевой эффектора и конца пятого звена. Сечение множества допустимых положений для конца пятого звена вертикальной плоскостью, проходящей через центр основания манипулятора, приведено на рис. 2 (множество А).



Рис. 1. Манипулятор M2000iA 900L [3].

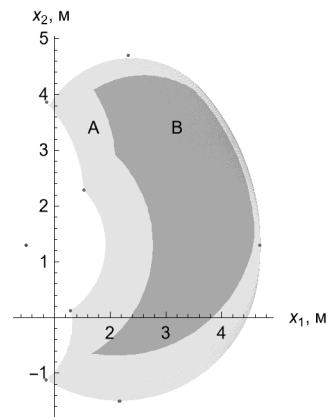


Рис. 2. Множество допустимых положений манипулятора (А) и его рабочая область (В).

В процессе имитации необходимо останавливать каждое звено манипулятора до момента, когда оно достигнет границы своего множества допустимых положений, иначе удары (моментальное изменение скорости движения концевой эффектора) могут нарушить эффект погружения. Поэтому необходимо определять рабочую об-

ласть, нахождение в которой гарантирует возможность остановить звено без удара. Пример такой области для конца пятого звена манипулятора представлен на рис. 2 (множество В).

Стоит отметить, что на рис. 2 рабочая область и множество допустимых положений приведены для конца пятого звена для возможности сверки с данными из документации. Для конца шестого звена рабочая область и множество допустимых положений несложным образом строятся из секторов сфер с центрами в каждой точке рабочей области и множества допустимых положений конца пятого звена соответственно. Причем сужение каждого такого сектора для рабочей области также делается для гарантии возможности остановки движения шестого звена до выхода на границу множества допустимых положений.

3. Управление динамическим стендом на фазе имитации движения.

Задача фазы имитации движения решается для системы чувствительных масс пилота, находящихся в кабине ЛА [1]. Для постановки задачи использован вектор перегрузки, одна из основных динамических характеристик движения:

$$\vec{n} = \frac{1}{|g_0|} (\vec{w} - \vec{g}),$$

где $|g_0|$ — величина ускорения свободного падения; \vec{g} — вектор гравитационного ускорения; \vec{w} — вектор абсолютного ускорения, действующего на чувствительные массы механорецептора пилота.

При известной перегрузке расчетной точки в реальном полете летательного аппарата можно определить ускорение концевой эффектора стенда и углов поворота, минимизирующих норму разности векторов перегрузки в расчетной точке ЛА и расчетной точке стенда:

$$\| \vec{n}(N, t) - \vec{n}^P(N, t) \| \rightarrow \min_{\vec{w}_k(t), \vec{\chi}(t)}, \quad (1)$$

где $\vec{n}(N, t)$ — вектор перегрузки в расчетной точке N стенда. В этом состоит рассматриваемая математическая постановка задачи динамической имитации.

Задача имитации угловых ускорений формулируется аналогичным образом:

$$\| \ddot{\chi}(t) - \ddot{\chi}^P(t) \| \rightarrow \min_{\ddot{\chi}(t)}. \quad (2)$$

Задача (1) решается следующим образом: определяется траектория движения концевой эффектора робота-манипулятора, минимизирующая выражение (1), далее по этой траектории определяется управление звеньями робота, которое ее реализует. Такое управление называется кинематическим, нередко используется при работе с различными роботами [4, 5].

Алгоритм динамической имитации должен строиться так, чтобы продолжительность фазы возврата была минимальна, но при этом поддерживалось достаточное (с точки зрения физиологии вестибулярного аппарата человека [6]) качество имитации движения.

4. Управление концевым эффектором манипулятора на фазе возврата в центр рабочей области. Рассматриваемая в работе оптимальная задача решается с использованием методов теории оптимального управления. Основой теории

управления является принцип максимума Понтрягина [7], полученный Л. С. Понтрягиным и его сотрудниками в 1956 г. Данную математическую дисциплину далее развивали А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин. Так, в 2004 г. Милютин, Дмитрук и Осмоловский издают книгу [8], в которой описывают доказательство принципа максимума в классической понтрягинской задаче, в общей задаче с фазовыми и регулярными ограничениями. Немалый вклад в развитие дисциплины вносят Р. Габасов и Ф. М. Кириллова [9, 10]. Группа Арутюнова, Карамзина и Перейры занимается вопросами оптимального управления в задачах с фазовыми ограничениями [11–15]. Есть и другие работы, посвященные разработке теории оптимального управления, например [16–18]. Также часть работ посвящена связи разрабатываемой теории с вариационным исчислением, проведению параллелей [8].

Множество практических задач решается с использованием рассматриваемой теории [19, 20], хотя нередко в распоряжении исследователей имеется лишь набор необходимых условий, которым должна удовлетворять система, ее управление.

Рассмотрим задачу наискорейшего возврата концевой точки манипулятора в заранее определенное множество при наличии ограничений на развиваемое ускорение. Решение этой задачи может быть использовано при построении управления концевиком манипулятора на второй фазе ДИ. Для этого нужно определить параметры центра рабочей области (множества, в котором выполняется возврат) и ограничение на ускорение: оно должно учитывать динамические возможности стенда и не превышать пороговых значений чувствительности вестибулярного аппарата человека, чтобы оператор на стенде не чувствовал несогласованности динамической и визуальной имитации. А сам переход от фазы имитации движения к возврату происходит в тот момент, когда расчетная траектория возврата из данного состояния манипулятора в центр рабочей области касается ее границы, — считаем, что дальнейшая имитация движения невозможна. Ранее, в работах [21, 22], рассматривались варианты построения управления концевиком из решения обобщения задачи о брахистохроне, а также задачи о возврате концевика на некоторую дугу в центре рабочей области [23]. Для решения этих задач выбран принцип максимума Понтрягина как наиболее подходящий способ, поскольку в задачах присутствуют явные ограничения на управления и граничные значения управления могут быть оптимальными. Для каждой задачи выбирались формулировки принципа максимума, учитывающие особенности системы и ограничения.

Пусть центр рабочей области, к которому должен прийти концевик, представляет собой эллипсоид в пространстве координат и скоростей. Рассмотрим движение точки в вертикальной плоскости OX_1X_3 . Пусть x_1, x_3 — горизонтальная и вертикальная координаты точки в этой плоскости, x_2, x_4 — скорости движения точки вдоль OX_1 и OX_3 соответственно, u_1, u_2 — ускорения, с которыми двигается данная точка, $u_{1,\min} \leq u_1 \leq u_{1,\max}$, $u_{2,\min} \leq u_2 \leq u_{2,\max}$ в данной задаче являются управлением. Решается задача наискорейшего прихода на эллипсоид M :

$$\frac{x_1^2(t_k)}{a_1^2} + \frac{x_2^2(t_k)}{a_2^2} + \frac{x_3^2(t_k)}{a_3^2} + \frac{x_4^2(t_k)}{a_4^2} = 1.$$

Здесь t_k — момент окончания движения; $x_i(t_k) = x_{i,k}$ ($i = 1, \dots, 4$) — координаты и скорости точки в конечный момент времени; параметры a_1, a_2, a_3, a_4 считаются известными и определяются в соответствии с параметрами центра рабочей области, в которую необходимо совершить возврат.

Начальные условия и уравнения движения точки записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} = x_2; & \quad \frac{dx_4}{dt} = u_2; & \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \\ x_4(0) \\ x_5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{dx_2}{dt} = u_1; & \quad \frac{dx_5}{dt} = 1, & \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3; & & \end{aligned} \quad (3)$$

где $x_5(t)$ — текущее время движения точки M . Решается задача быстрогодействия:

$$J(x_k) = x_5(t_k) \rightarrow \min_{u_1, u_2} \quad (4)$$

с использованием принципа максимума Понтрягина [7].

Функция Понтрягина имеет вид

$$H = u_1\psi_2(t) + u_2\psi_4(t) + \psi_1(t)x_2(t) + \psi_3(t)x_4(t) + \psi_5(t) = H_0 + u_1H_1 + u_2H_2,$$

где $H_1 = \psi_2(t)$, $H_2 = \psi_4(t)$, а $H_0 = \psi_1(t)x_2(t) + \psi_3(t)x_4(t) + \psi_5(t)$.

Сопряженная система:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} = 0, & \quad \frac{d\psi_3}{dt} = 0, & \quad \frac{d\psi_5}{dt} = 0. \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1, & \quad \frac{d\psi_4}{dt} = -\psi_3, & \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая условия трансверсальности принципа максимума, можно получить следующее:

$$\begin{aligned} \psi_1(t_k) = -\frac{x_{1,k}}{a_1^2}, & \quad \psi_3(t_k) = -\frac{x_{3,k}}{a_3^2}, & \quad \psi_5(t_k) = -\lambda_0. \\ \psi_2(t_k) = -\frac{x_{2,k}}{a_2^2}, & \quad \psi_4(t_k) = -\frac{x_{4,k}}{a_4^2}, & \end{aligned} \quad (6)$$

На экстремалиях Понтрягина управление подчиняется условиям:

$$u_i(s) = \begin{cases} u_{i,\max} & \text{при } H_i > 0, \\ u_{i,\sin} & \text{при } H_i = 0, \\ u_{i,\min} & \text{при } H_i < 0. \end{cases} \quad \text{где } i = 1, 2, \quad (7)$$

Особого оптимального управления по u_1 и u_2 одновременно здесь не будет, так как не выполняются необходимые условия $(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}, x_{4,k}) \neq \bar{0}$, однако возможно особое управление по одной из компонент, когда ψ_2 (или ψ_4) равно нулю на всем промежутке времени. Необходимые условия для этого могут быть выполнены ($\ddot{H}_i \equiv 0$ для соответствующего управления u_i). Также видно, что система (3) делима на две похожие подсистемы, а связанными остаются лишь значения $x_{i,k}$. Поэтому можно начать с рассмотрения более простой задачи.

4.1. Решение задачи о наискорейшем приходе точки на границу эллипса в плоскости (x, \dot{x}) . В задаче наискорейшего прихода на многообразии M' :

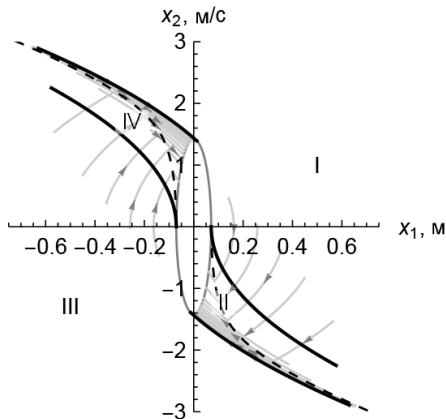


Рис. 3. Синтез оптимального управления движением точки в плоскости (x_1, x_2) .

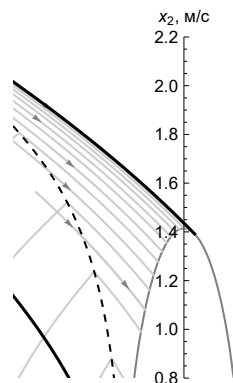


Рис. 4. Синтез оптимального управления движением точки в плоскости (x_1, x_2) (верхняя полуплоскость).

$\frac{x^2(t_k)}{b_1^2} + \frac{\dot{x}^2(t_k)}{b_2^2} = 1$ для точки, движение которой описывается системой

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= u; \\ \frac{d\tau}{dt} &= 1, \end{aligned} \tag{8}$$

картина синтеза имеет вид, представленный на рис. 3, 4. Решение данной задачи присутствует в [19], здесь приведено лишь потому, что далее будет использоваться при решении исходной задачи.

На рисунках выделено четыре зоны, разделенные между собой сплошными черными линиями. Линии, разделяющие зоны, определяются следующим образом:

- 1) I–II: траектория прихода в точку эллипса с координатами $(b_1, 0)$;
- 2) II–III: траектория прихода в точку эллипса, где парабола, по которой происходит движение, касается эллипса в 3-й четверти;
- 3) III–IV: траектория прихода в точку эллипса с координатами $(-b_1, 0)$;
- 4) IV–I: траектория прихода в точку эллипса, где парабола, по которой происходит движение, касается эллипса в 1-й четверти.

Здесь движение будет происходить следующим образом: если стартовая точка лежит в зоне I, то до пересечения с прерывистой линией из зоны II будет движение с минимальным значением управления, затем с максимальным управлением в зоне II до пересечения с эллипсом. Если начальная точка лежит в зоне III, то до пересечения с прерывистой линией из зоны IV будет движение с максимальным значением управления, затем с минимальным управлением в зоне IV до пересечения с эллипсом. Если точка находится в зонах II/IV, то переключения управления не будет и все движение будет происходить без выхода за пределы зоны с максимально/минимально допустимым управлением. Примеры возможных траекторий движения точки на рисунках изображены светло-серыми линиями со стрелочками, указывающими направление движения.

Далее, при описании параметров движения, индексом * обозначены величины, соответствующие переключению.

Время переключения (если переключение происходит) через координаты конечной точки выражается следующим образом:

$$t_* = t_k + \frac{b_1^2 \dot{x}(t_k)}{b_2^2 x(t_k)}. \quad (9)$$

Зависимости времени движения после переключения и координат точки на эллипсе M' от координат точки в момент переключения t_* определяются выражениями:

$$t_k - t_* = -\frac{b_1^2 \dot{x}(t_k)}{b_2^2 x(t_k)} = -\frac{\dot{x}(t_*)}{u_{II}} - \frac{\sqrt{u_{II}^2 \left(b_2^4 - (b_1 u_{II} - \text{sign}(u_{II}) p)^2 \right)}}{b_2 u_{II}^2}, \quad (10)$$

$$x(t_k) = \frac{b_1 \text{sign}(u_{II}) p}{b_2^2} - \frac{b_1^2 u_{II}}{b_2^2}, \quad (11)$$

$$\dot{x}(t_k) = -\frac{\sqrt{u_{II}^2 \left(b_2^4 - (b_1 u_{II} - \text{sign}(u_{II}) p)^2 \right)}}{b_2 u_{II}}, \quad (12)$$

где u_{II} — управление после переключения, $p = \sqrt{b_2^2 \left(2u_{II} x(t_*) - \dot{x}(t_*)^2 \right) + b_1^2 u_{II}^2 + b_2^4}$.

Время движения до точки переключения

$$t_* - t_0 = \frac{\dot{x}(t_0) - \dot{x}(t_*)}{u_I} = -\frac{1}{u_I} \left[\dot{x}(t_0) + \sqrt{2} \text{sign}(x(t_*)) \sqrt{2b_2^2 u_{II} x(t_*) + b_1^2 u_{II}^2 + b_2^4} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{2b_2^2 x(t_*)^2 - b_1^2 \left(\sqrt{2b_2^2 u_{II} x(t_*) + b_1^2 u_{II}^2 + b_2^4} + b_2^2 - u_{II} x(t_*) \right)}{(b_1^2 u_{II} + 2b_2^2 x(t_*))^2}} \right], \quad (13)$$

где u_I — управление до переключения.

4.2. Решение исходной задачи наискорейшего прихода на эллипсоид в четырехмерном пространстве. Движения в плоскостях (x_1, x_2) , (x_3, x_4) будут происходить так, как описано в задаче для плоскости (x, \dot{x}) . Они практически полностью разделены — зависимы будут лишь величины полуосей эллипсов — сечений четырехмерного эллипсоида M данными плоскостями. В уравнениях ниже присутствуют параметры r_{12} и r_{34} ($r_{12}^2 + r_{34}^2 = 1$), с помощью которых эта зависимость реализуется. Очевидно, что при изменении этих параметров меняется и время движения на конечном многообразии M по каждой из координат, причем чем больше полуоси сечения эллипсоида в данной плоскости, тем время движения в ней меньше. А это значит, что практически для каждого набора начальных условий эти параметры определяются однозначно.

Уравнение поверхности переключения в пространстве (x_1, x_2, r_{12}) имеет следующий вид:

$$x_2(x_1, r_{12}) = -\text{sign}(x_1) \sqrt{\frac{-2p_1 \left(a_1^2 \sqrt{p_1 r_{12}^2} + a_1^2 (a_2^2 r_{12}^2 - u_1 x_1) - 2a_3^2 x_1^2 \right)}{(a_1^2 u_1 + 2a_2^2 x_1)^2}}, \quad (14)$$

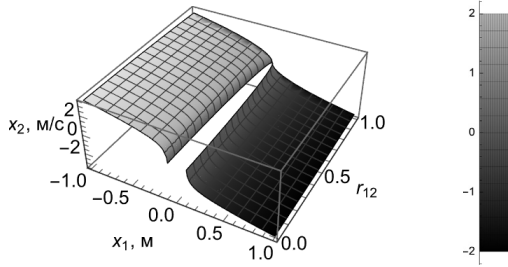


Рис. 5. Пример поверхности переключения для управления u_1 .

где

$$r_{12}^2 = 1 - \left(\frac{x_3^{2k}}{a_3^2} + \frac{x_4^{2k}}{a_4^2} \right)^2; \quad p_1 = a_2^4 r_{12}^2 + 2a_2^2 u_1 x_1 + a_1^2 u_1^2; \quad |x_1| \geq \frac{a_1}{|r_{12}|}.$$

Аналогичным образом записывается и уравнение поверхности переключения для управления u_2 в пространстве (x_3, x_4, r_{34}) :

$$x_4(x_3, r_{34}) = -\text{sign}(x_3) \sqrt{\frac{-2p_2 \left(a_3^2 \sqrt{p_2 r_{34}^2} + a_3^2 (a_4^2 r_{34}^2 - u_2 x_3) - 2a_4^2 x_3^2 \right)}{(a_3^2 u_2 + 2a_4^2 x_3)^2}}, \quad (15)$$

где

$$r_{34}^2 = 1 - \left(\frac{x_1^{2k}}{a_1^2} + \frac{x_2^{2k}}{a_2^2} \right)^2; \quad p_2 = a_2^4 r_{34}^2 + 2a_2^2 u_1 x_1 + a_1^2 u_1^2; \quad |x_3| \geq \frac{a_3}{|r_{34}|}.$$

Пример того, как может выглядеть поверхность переключения для управления u_1 , представлен на рис. 5.

Время движения в каждой из плоскостей при отсутствии переключений выражается аналитически и получается из выражений (10–12), если сделать соответствующие замены. Для плоскости (x_1, x_2) :

$$a_1 \rightarrow \sqrt{a_1^2(1 - r_{12}^2)}, \quad a_2 \rightarrow \sqrt{a_2^2(1 - r_{12}^2)}, \quad x(t_*) \rightarrow x_1(t_0), \quad \dot{x}(t_*) \rightarrow \dot{x}_2(t_0).$$

Для плоскости (x_3, x_4) :

$$a_3 \rightarrow \sqrt{a_3^2(1 - r_{34}^2)}, \quad a_4 \rightarrow \sqrt{a_4^2(1 - r_{34}^2)}, \quad x(t_*) \rightarrow x_3(t_0), \quad \dot{x}(t_*) \rightarrow \dot{x}_4(t_0).$$

Например, для плоскости (x_1, x_2) при $r_{12} \in [0; 1]$ получается следующее:

$$t_k - t_0 = -\frac{x_{2,0}}{u_{1,\Pi}} - \frac{\sqrt{u_{1,\Pi}^2 \left(a_2^4 (1 - r_{12}^2) - (a_1 u_{1,\Pi} - \text{sign}(x_{1,0}) p)^2 \right)}}{a_2 u_{1,\Pi}^2}; \quad (16)$$

$$x_{1,k} = -\frac{a_1^2 u_{1,\Pi}}{a_2^2} + \frac{a_1 \text{sign}(x_{1,0}) p}{a_2^2}; \quad (17)$$

$$x_{2,k} = -\frac{\sqrt{u_{1,\Pi}^2 \left(a_2^4 (1 - r_{12}^2) - (a_1 u_{1,\Pi} - \text{sign}(x_{1,0}) p)^2 \right)}}{a_2 u_{1,\Pi}}; \quad (18)$$

$$p = \sqrt{a_2^2 (2x_{1,0}u_{1,\Pi} - x_{2,0}^2) + a_1^2 u_{1,\Pi}^2 + a_2^4 (1 - r_{12}^2)}. \quad (19)$$

В ситуации с наличием переключений аналитически можно выразить все необходимое при $r_{12} = 1$, т. е. когда одно из сечений эллипсоида стягивается в точку. При наличии переключения управления

$$t_* - t_0 = \sqrt{\frac{u_{1,\Pi} (x_{2,0}^2 - 2x_{1,0}u_{1,I})}{u_{1,I}^2 (u_{1,\Pi} - u_{1,I})}} - \frac{x_{2,0}}{u_{1,I}}; \quad (20)$$

$$t_k - t_* = \sqrt{\frac{x_{2,0}^2 - 2x_{1,0}u_{1,I}}{u_{1,\Pi} (u_{1,\Pi} - u_{1,I})}}; \quad (21)$$

$$t_k - t_0 = \sqrt{\frac{x_{2,0}^2 - 2x_{1,0}u_{1,I}}{u_{1,\Pi} (u_{1,\Pi} - u_{1,I})}} + \sqrt{\frac{u_{1,\Pi} (x_{2,0}^2 - 2x_{1,0}u_{1,I})}{u_{1,I}^2 (u_{1,\Pi} - u_{1,I})}} - \frac{x_{2,0}}{u_{1,I}}; \quad (22)$$

$$x_1(t_*) = \frac{2x_{1,0}u_{1,I} - x_{2,0}^2}{2u_{1,I} - 2u_{1,\Pi}}; \quad x_2(t_*) = -\text{sgn}(x_1(t_*)) \sqrt{\frac{u_{1,\Pi} (x_{2,0}^2 - 2x_{1,0}u_{1,I})}{u_{1,\Pi} - u_{1,I}}}; \quad (23)$$

$$x_{1,k} = 0; \quad x_{2,k} = 0. \quad (24)$$

При отсутствии переключения управления $t_k - t_0 = -\frac{x_{2,0}}{u_1}$.

В задаче можно оставить лишь один из параметров: r_{12} или r_{34} , так как известна зависимость между ними. Время движения точки в плоскостях (x_1, x_2) и (x_3, x_4) от значения параметра r_{12} зависит монотонно: чем больше сечение четырехмерного эллипсоида плоскостью (зависит от параметра), тем меньше время прихода на него. Можно определить границы изменения времени движения в плоскостях (x_1, x_2) , (x_3, x_4) , вычислив минимальное и максимальное время движения до прихода на сечение эллипсоида для $r_{12} = 1$ и $r_{12} = 0$.

Могут быть получены следующие ситуации:

- 1) отрезки $[t_{i,\min}, t_{i,\max}]$ имеют общие точки ($i = 1, 2$ для плоскостей (x_1, x_2) и (x_3, x_4) соответственно);
- 2) отрезки $[t_{i,\min}, t_{i,\max}]$ не пересекаются.

В первом случае, если пересечение не точка, можно найти нужное значение параметра r_{12} методом пристрелки. Данная задача решается вне зависимости от взятия начального приближения, так как зависимость от параметра монотонна. Если пересечение — точка, то берется значение параметра, которое ей соответствует ($r_{12} = 1$ или $r_{12} = 0$).

Если же отрезки $[t_{i,\min}, t_{i,\max}]$ не пересекаются, то в этом случае получается ситуация с наличием особого управления, которое не будет являться оптимальным. Особым управление будет по компоненте u_1 , если минимальное время прихода в плоскости (x_3, x_4) (достигается при $r_{12} = 0$) больше максимального времени прихода в плоскости (x_1, x_2) . И по управлению u_2 , если минимальное время прихода в плоскости (x_1, x_2) (достигается при $r_{12} = 1$) больше максимального времени прихода в плоскости (x_3, x_4) .

В этом случае можно предъявить минимальное достижимое значение функционала — минимальное время движения (для наибольшего сечения эллипсоида в плоскости, в которой реализуется регулярное управление). А вариантов особого

управления, приводящего в точку $(0, 0)$ в своей плоскости за это время, может быть построено бесконечное количество. Например:

1) $u_{i,\sin} = u_i$, где сначала u_i — управление, найденное из плоской задачи прихода в ноль при исходных ограничениях, а после достижения нужной точки оно равно нулю. То есть, наискорейшим образом точка приходит в $(0, 0)$ в плоскости особого управления, а затем ожидает прихода в точку эллипса движением в другой плоскости;

2) $u_{i,\sin}$ — управление, реализующее наискорейший приход в точку $(0, 0)$ по соответствующим координатам при наличии нового ограничения $\mu u_{i,\min} \leq u_i \leq \mu u_{i,\max}$, где $0 \leq \mu \leq 1$ — масштабный коэффициент, выбираемый таким образом, чтобы время прихода на сечения эллипсоида в обеих плоскостях было одинаковым. Этот коэффициент тоже можно найти методом пристрелки.

Таким образом, получено решение задачи быстродействия для плоского движения точки при наличии ограничений на величину управления, где конечное многообразие — это поверхность эллипсоида в пространстве координат и скоростей.

5. Заключение. В статье представлены результаты работы по построению алгоритмов динамической имитации: определение множества допустимых положений и рабочей области для робота Fanuc M2000iA 900L, постановка задачи управления динамическим стендом на фазе имитации движения летательного аппарата, решение задачи наискорейшего возврата концевой эффектора манипулятора в центр рабочей области, задаваемый эллипсоидом в пространстве координат и скоростей, при наличии ограничений на развиваемые ускорения.

В дальнейшем планируется провести экспериментов на реальном манипуляторе для определения возможности создания на основе данной оптимальной задачи алгоритма возврата концевика на фазе возврата в центр рабочей области. Результат зависит от ответов на вопросы: сколько времени занимает такое движение; действительно ли при выполнении такого движения оператор не почувствует несогласованности визуальной и динамической имитации; возможно ли одновременно с процессом возврата имитировать отдельные составляющие движения модели летательного аппарата.

Литература

1. Ишлинский А. Ю., Александров В. В., Садовничий В. А., Глазков Ю. Н., Воронин Л. И. *Математические задачи динамической имитации аэрокосмических полетов*. Москва, Изд-во Моск. ун-та (1995).
2. Alexandrov V., Lemak S. Algorithms of dynamic piloted flight simulator stand based on a centrifuge with a controlled cardan suspension. *Journal of Mathematical Sciences* **253** (6), 768–777 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05268-8>
3. Automated Solutions Australia. FANUC M-2000iA/900L. Доступно на: <https://automatedsolutions.com.au/fanuc-robots-australia/fanuc-m-2000ia-900l/> (дата обращения: 24.01.2024).
4. Ганин П. Е., Кобрин А. И. Алгоритмы кинематического управления многозвенными манипуляционными роботами на основе нечеткой нейронной сети. *Вестник БГТУ имени В. Г. Шугова* **6**, 87–97 (2021).
5. Челноков Ю. Н. Приложения теории кинематического управления движением твердого тела. *Мехатроника, автоматизация, управление* **18** (8), 532–542 (2017).
6. Орлов В. И. *Вестibuлярная функция*. Санкт-Петербург, Наука (1998).
7. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. Москва, Физматлит (1969).
8. Милотин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. *Принцип максимума в оптимальном управлении*. Москва, Центр прикладных исследований мехмата МГУ (2004).

9. Габасов Р., Кириллова Ф. М. *Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления*. Минск, Изд-во «Университетское» (1984).
10. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Во Т. Т. Х. Оптимальное управление в реальном времени многомерным динамическим объектом. *Автоматика и телемеханика* **1**, 121–135 (2015).
11. Карамзин Д. Ю. Принцип максимума в задаче управления при ограниченных фазовых координатах. *Автоматика и телемеханика* **1**, 26–38 (2007).
12. Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. The Maximum Principle for Optimal Control Problems with State Constraints by RV Gamkrelidze: Revisited. *J. Optimization Theory and Applications* **149**, 474–493 (2011).
13. Арутюнов А. В., Карамзин Д. Ю., Перейра Ф. Об условиях отсутствия скачка решения сопряженной системы принципа максимума в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. *Труды Института математики и механики УрО РАН* **20** (4), 29–37 (2014).
14. Гамкrelидзе Р. В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. *Известия Академии наук СССР. Серия математическая* **24**, 315–356 (1960).
15. Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. R. V. Gamkrelidze's Maximum Principle for Optimal Control Problems with Bounded Phase Coordinates and Its Relation to Other Optimality Conditions. *Doklady Mathematics* **83** (1), 131–135 (2011).
16. Нгуен Тхань Банг. Метод последовательных приближений для решения одной задачи оптимального управления. *Автоматика и телемеханика* **6**, 29–39 (1969).
17. Aseev S. The Pontryagin Maximum Principle for Optimal Control Problem with an Asymptotic Endpoint Constraint Under Weak Regularity Assumptions. *Journal of Mathematical Sciences* **270** (04), 1–16 (2023).
18. Болтянский В. Г. *Математические методы оптимального управления*. Тбилиси, Тбилисский государственный университет (2013).
19. Лемак С. С., Морозов В. М., Попеленский М. Ю. *Механика управляемых систем. Сборник задач*. Александров В. В., Болотин Ю. В. (ред.). Москва, МАКС Пресс (2013).
20. Александров В. В., Болтянский В. Г., Лемак С. С. *Оптимизация динамики управляемых систем*. Москва, Изд-во Моск. ун-та (2000).
21. Lemak S. S., Belousova M. D. The brachistochrone problem with constraints on the curvature of the trajectory. *IFAC-PapersOnLine* **54** (13), 437–442 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.10.487>
22. Лемак С. С., Белоусова М. Д., Альников В. В. Задача динамической имитации полета летательного аппарата на робототехническом стенде. *Мехатроника, автоматизация, управление* **23** (4), 546–554 (2022). <https://dx.doi.org/10.17587/mau.23.546-554>
23. Lemak S. S., Chertopolokhov V. A., Makarov M. A. Set of dynamic restrictions imposed on robotic arm-based motion simulator phase coordinates. *Journal of Physics: Conference Series* **1864** (1), 012133–012133 (2021). <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1864/1/012133>

Статья поступила в редакцию 23 января 2024 г.;
доработана 25 апреля 2024 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Белоусова Маргарита Дмитриевна — мл. науч. сотр.; <https://orcid.org/0000-0003-3535-5752>, bmargaretd@yandex.ru

Кудряшов Илья Анатольевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.; <https://orcid.org/0009-0009-1889-6232>, ilya.kudryashov.85@gmail.com

Лемак Степан Степанович — д-р физ.-мат. наук, проф.; <https://orcid.org/0000-0002-2242-6956>, lemaks2004@mail.ru

On the problem of constructing a manipulator control during motion cueing of an aircraft flight*

M. D. Belousova, I. A. Kudryashov, S. S. Lemak

Lomonosov Moscow State University,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

For citation: Belousova M. D., Kudryashov I. A., Lemak S. S. On the problem of constructing a manipulator control during motion cueing of an aircraft flight. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 693–705. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.406> (In Russian)

For high-quality pilot training, there is a need to use simulators that allow to carry out training in conditions that are closest to real ones. The simulator is supposed to be based on a six-joint robot manipulator with sequentially connected links and operator's cabin on its end. The stand mathematical support includes motion cueing algorithms, consisting of two phases: the motion simulation phase and the phase of return from the working area boundary to its center. During the motion imitation phase, the manipulator's end effector must move in such a way that the accelerations acting on the operator's sensitive masses coincide in direction and magnitude, if it is possible, with those that would act on him during a real flight. Moreover, motion cueing algorithms may differ for particular maneuvers, because in order to construct high-quality motion cueing algorithms, it is often necessary to take into account the performed movement peculiarities. During the returning phase, the values of velocities and accelerations acting on the operator should not exceed threshold values to not disrupt the presence effect. To build motion cueing algorithms, it is also necessary to determine the manipulator working area. This paper presents some results of work on the motion cueing algorithms construction: a description of the manipulator working area, a solution to the problem of returning the manipulator end effector to the working area center in the presence of restrictions on the developed acceleration magnitude.

Keywords: motion cueing, optimal control, Pontryagin's maximum principle, synthesis of optimal control, multi-link manipulator, kinematic control.

References

1. Ishlinskij A. Yu., Aleksandrov V. V., Sadovnichij V. A., Glazkov Yu. N., Voronin L. I. *Mathematical problems of dynamic simulation of aerospace flights*. Moscow, Moscow University Press (1995). (In Russian)
2. Alexandrov V., Lemak S. Algorithms of dynamic piloted flight simulator stand based on a centrifuge with a controlled cardan suspension. *Journal of Mathematical Sciences* **253** (6), 768–777 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05268-8>
3. Automated Solutions Australia. FANUC M-2000iA/900L. Available at: <https://automatedsolutions.com.au/fanuc-robots-australia/fanuc-m-2000ia-900l/> (accessed: January 24, 2024).
4. Ganin P. E., Kobrin A. I. Algorithms for kinematic control of multi-link manipulation robots based on a fuzzy neural network. *Bulletin of BSTU named after V. G. Shukhov* **6**, 87–97 (2021). (In Russian)
5. Chelnokov Yu. N. Application of the Theory of Kinematic Motion Control of a Rigid Body. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravlenie* **18** (8), 532–542 (2017). (In Russian)
6. Orlov V. I. *Vestibular function*. St. Petersburg, Nauka Publ. (1998). (In Russian)
7. Pontryagin L. S., Boltyanskij V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The mathematical theory of optimal processes*. Moscow, Fizmatlit Publ. (1969). (In Russian)
8. Milyutin A. A., Dmitruk A. V., Osmolovskij N. P. *The principle of maximum in optimal management*. Moscow, Centr prikladnyh issledovaniy mekhmata Moscow University Publ. (2004). (In Russian)

*Supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the the Program of “Supersonic” (agreement no. 075-15-2022-331).

9. Gabasov R., Kirillova F. M. *Constructive optimization methods. P. 2. Management tasks*. Minsk, Izdatel'stvo "Universitetskoe" Publ. (1984). (In Russian)
10. Gabasov R., Kirillova F. M., Vo T. T. H. Optimal real-time control of a multidimensional dynamic object. *Avtomatika i telemekhanika* **1**, 121–135 (2015). (In Russian)
11. Karamzin D. Yu. The maximum principle in the control problem at limited phase coordinates. *Avtomatika i telemekhanika* **1**, 26–38 (2007). (In Russian)
12. Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. The Maximum Principle for Optimal Control Problems with State Constraints by RV Gamkrelidze: Revisited. *J. Optimization theory and applications* **149**, 474–493 (2011).
13. Arutyunov A. V., Karamzin D. Yu., Perejra F. On the conditions for the absence of a jump in the solution of the conjugate system of the maximum principle in optimal control problems with phase constraints. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN* **20** (4), 29–37 (2014). (In Russian)
14. Gamkrelidze R. V. Optimal control processes with limited phase coordinates. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya matematicheskaya* **24**, 315–356 (1960). (In Russian)
15. Arutyunov A., Karamzin D., Pereira F. R. V. Gamkrelidze's maximum principle for optimal control problems with bounded phase coordinates and its relation to other optimality conditions. *Doklady Mathematics* **83** (1), 131–135 (2011).
16. Nguen Tkhan' Bang. A method of successive approximations for solving a single optimal control problem. *Avtomatika i telemekhanika* **6**, 29–39 (1969). (In Russian)
17. Aseev S. The pontryagin maximum principle for optimal control problem with an asymptotic endpoint constraint under weak regularity assumptions. *Journal of Mathematical Sciences* **270** (04), 1–16 (2023).
18. Boltyanskij V. G. *Mathematical methods of optimal control*. Tbilisi, Tbilisi State University Publ. (2013). (In Russian)
19. Lemak S. S., Morozov V. M., Popelenskij M. Yu. Mechanics of controlled systems. Collection of tasks. Aleksandrov V. V., Bolotin Yu. V. (eds). Moscow, MAKS Press (2013). (In Russian)
20. Aleksandrov V. V., Boltyanskij V. G., Lemak S. S. *Optimization of the dynamics of managed systems*. Moscow, Moscow University Press (2000). (In Russian)
21. Lemak S. S., Belousova M. D. The brachistochrone problem with constraints on the curvature of the trajectory. *IFAC-PapersOnLine* **54** (13), 437–442 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2021.10.487>
22. Lemak S. S., Belousova M. D., Al'chikov V. V. The task of dynamic simulation of the flight of an aircraft on a robotic stand. *Mekhatronika, avtomatizaciya, upravlenie* **23** (4), 546–554 (2022). <https://dx.doi.org/10.17587/mau.23.546-554> (In Russian)
23. Lemak S. S., Chertopolokhov V. A., Makarov M. A. Set of dynamic restrictions imposed on robotic arm-based motion simulator phase coordinates. *Journal of Physics: Conference Series* **1864** (1), 012133–012133 (2021). <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1864/1/012133>

Received: January 23, 2024

Revised: April 25, 2024

Accepted: May 23, 2024

Authors' information:

Margarita D. Belousova — <https://orcid.org/0000-0003-3535-5752>, bmargaretd@yandex.ru

Ilya A. Kudryashov — <https://orcid.org/0009-0009-1889-6232>, ilya.kudryashov.85@gmail.com

Stepan S. Lemak — <https://orcid.org/0000-0002-2242-6956>, lemaks2004@mail.ru