Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4
УДК 51-72+531.64+539.311+539.87
MSC 74G65, 74N99, 74P99

Множество всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды. Ч. 1. Существование состояний равновесия двухфазной термоупругой среды*

Е. А. Ефимов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Российская Федерация, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9
Институт проблем машиноведения Российской академии наук,
Российская Федерация, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В. О., 61

Для цитирования: *Ефимов Е. А.* Множество всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды. Ч. 1. Существование состояний равновесия двухфазной термоупругой среды // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2024. Т. 11 (69). Вып. 4. С. 706–717. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.407

Настоящая статья является первой частью работы, посвященной исследованию множества всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды. Под состоянием равновесия двухфазной упругой среды понимается упорядоченная пара: поле перемещений и пространственное распределение фаз, доставляющие глобальный минимум функционалу свободной энергии. Для термоупругих сред плотности свободной энергии получаются добавлением к плотностям энергии деформаций слагаемых, связанных с температурными напряжениями каждой из фаз, и слагаемых, связанных с энергиями каждой из фаз в ненапряженном состоянии при нулевых тензорах коэффициентов температурных напряжений. При нулевых граничных условиях Дирихле на поле перемещений, при некоторых ограничениях на тензоры модулей упругости, тензоры деформаций, обеспечивающие ненапряженное состояние каждой из фаз при начальной температуре, и тензоры коэффициентов температурных напряжений в работе доказана разрешимость задачи о равновесии двухфазной термоупругой среды и дано описание множества всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды.

Ключевые слова: двухфазная термоупругая среда, функционал свободной энергии, плотность свободной энергии, пространственное распределение фаз, состояние равновесия.

1. Введение. Многофазная упругая среда — это упругая среда, обладающая способностью менять свой фазовый состав под воздействием напряжений и температуры. Далее рассматриваются среды, допускающие однофазные и двухфазные состояния.

Пусть двухфазная упругая среда занимает непустую ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$; $\mathcal{F}^{\pm}\colon \mathbb{R}^{m\times m} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ — такие функции, что для любого допустимого поля перемещений $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и любого значения температуры $\theta \in \mathbb{R}$ функции $\mathcal{F}^{\pm}(\nabla u, \theta)$ являются плотностями свободной энергии каждой из фаз; тогда функ-

*Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ИПМаш РАН (тема № 124041500009-8).

ционал свободной энергии двухфазной упругой среды определяется равенством

$$I\left[u,\chi,\theta\right]=\int\limits_{\Omega}\left\{\chi\mathcal{F}^{+}\left(\nabla u,\theta\right)+\left(1-\chi\right)\mathcal{F}^{-}\left(\nabla u,\theta\right)\right\}\,dx,\qquad u\in\mathbb{X},\quad \chi\in\mathbb{Z}',\quad \theta\in\mathbb{R};$$

где $\mathbb{X}$ — множество допустимых полей перемещений[1],

$$\mathbb{Z}'=\left\{\chi\in L_{\infty}\left(\Omega\right):\ \text{при почти всех } x\in\Omega\quad \chi^{2}\left(x\right)=\chi\left(x\right)\right\}$$

— множество допустимых пространственных распределений фаз. Подразумевается, что для пространственного распределения фаз $\chi\in\mathbb{Z}'$ в тех точках $x\in\Omega$, для которых $\chi\left(x\right)=1$, расположена фаза «+», а в тех точках $x\in\Omega$, для которых $\chi\left(x\right)=0$, расположена фаза «−».

Под состоянием равновесия двухфазной упругой среды при температуре $\theta\in\mathbb{R}$ понимается решение вариационной задачи

$$I\left[u_{\theta},\chi_{\theta},\theta\right]=\inf_{\substack{u\in\mathbb{X}\\ \chi\in\mathbb{Z}'}} I\left[u,\chi,\theta\right],\qquad u_{\theta}\in\mathbb{X},\quad \chi_{\theta}\in\mathbb{Z}'. \tag{1}$$

В отличие от композитных сред, в (1) пространственное распределение фаз $\chi\in\mathbb{Z}'$ не фиксировано: равновесное пространственное распределение фаз $\chi_{\theta}\in\mathbb{Z}'$ (как и равновесное поле перемещений $u_{\theta}\in\mathbb{X}$) получается минимизацией функционала I при температуре $\theta\in\mathbb{R}$.

Сформулированный подход к определению состояний равновесия двухфазной упругой среды содержится, например, в [1]. Общий вид плотности свободной энергии термоупругой среды дан в [2].

Целью настоящей работы является изучение зависимости множества всех состояний равновесия двухфазной изотропной термоупругой среды от температуры.

2. Постановка задачи и формулировка результатов. Прежде чем сформулировать постановку задачи, введем необходимые обозначения. В пространстве $\mathbb{R}^{m\times m}$ со скалярным произведением и нормой

$$\left\langle\alpha,\beta\right\rangle=\operatorname{tr}\left(\alpha\beta^{*}\right),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}^{m\times m};\qquad \left|M\right|=\left\langle M,M\right\rangle^{\frac{1}{2}},\quad M\in\mathbb{R}^{m\times m}$$

введем подпространство

$$\mathbb{R}^{m\times m}_{s}=\left\{M\in\mathbb{R}^{m\times m}:\ M^{*}=M\right\}$$

и зафиксируем два линейных отображения $A^{\pm}\colon\mathbb{R}^{m\times m}_{s}\longrightarrow\mathbb{R}^{m\times m}_{s}$ со свойствами

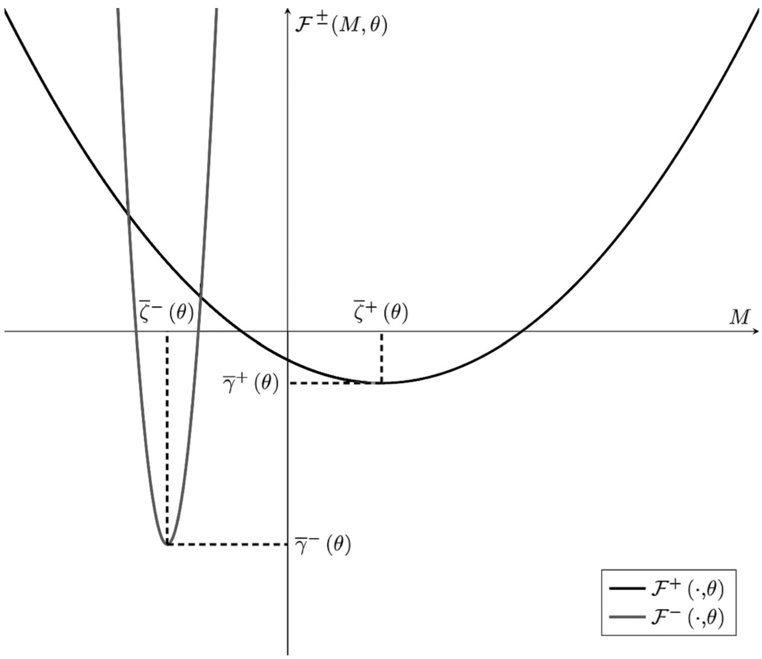
$$\text{для любых } \xi,\eta\in\mathbb{R}^{m\times m}_{s}\quad \left\langle A^{\pm}\xi,\eta\right\rangle=\left\langle\xi,A^{\pm}\eta\right\rangle; \tag{2}$$

$$\begin{gathered}\text{существует } \nu\in\left(0;1\right) \text{ такое, что для любого } \xi\in\mathbb{R}^{m\times m}_{s}\\ \nu\left|\xi\right|^{2}\leqslant\left\langle A^{\pm}\xi,\xi\right\rangle\leqslant\nu^{-1}\left|\xi\right|^{2}.\end{gathered} \tag{3}$$

Положим

$$\begin{gathered}F^{\pm}\left(M\right)=\left\langle A^{\pm}\left(M^{s}-\zeta^{\pm}\right),M^{s}-\zeta^{\pm}\right\rangle,\quad M\in\mathbb{R}^{m\times m};\\ \text{где}\\ M^{s}=\frac{1}{2}\left(M+M^{*}\right),\quad M\in\mathbb{R}^{m\times m};\qquad \zeta^{\pm}\in\mathbb{R}^{m\times m}_{s}.\end{gathered} \tag{4}$$

[1]Конкретизация будет дана далее.



Графики функций $\mathcal{F}^{\pm}(\cdot,\theta)$.

Для поля перемещений $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ функция $\nabla u^s\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times m}_s$ задает соответствующий ему тензор малых деформаций, а функции $F^{\pm}(\nabla u)\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (в квадратичном приближении) задают плотности энергии деформаций каждой из фаз. В (4) величины $\zeta^{\pm}$ играют роль тензоров деформаций, обеспечивающих ненапряженное состояние каждой из фаз при начальной температуре, а величины $2A^{\pm}$ определяют тензоры модулей упругости каждой из фаз.

Для термоупругих сред плотности свободной энергии $\mathcal{F}^{\pm}(\nabla u,\theta)$ получаются добавлением к плотностям энергии деформаций $F^{\pm}(\nabla u)$ слагаемых, связанных с температурными напряжениями каждой из фаз, и слагаемых, связанных с энергиями каждой из фаз в ненапряженном состоянии при нулевых тензорах коэффициентов температурных напряжений:

$$\mathcal{F}^{\pm}(M,\theta) = F^{\pm}(M) - 2\left\langle M^s,\beta^{\pm}\right\rangle\theta + \gamma^{\pm}(\theta), \qquad M\in\mathbb{R}^{m\times m}, \quad \theta\in\mathbb{R};$$

где

$$\beta^{\pm}\in\mathbb{R}^{m\times m}_s, \qquad \gamma^{\pm}\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}.$$

На рисунке жирной кривой изображен график функции $\mathcal{F}^{+}(\cdot,\theta)$, а серой — график функции $\mathcal{F}^{-}(\cdot,\theta)$ в случае $m=1$ при

$$A^{+}=\frac{1}{7}; \qquad \zeta^{+}=2; \qquad \beta^{+}=3; \qquad \gamma^{+}(\theta) = -3+12\theta+5\theta^2, \quad \theta\in\mathbb{R};$$
$$A^{-}=12; \qquad \zeta^{-}=-4; \qquad \beta^{-}=-11; \qquad \gamma^{-}(\theta) = -9+14\theta-3\theta^2, \quad \theta\in\mathbb{R},$$

для значения температуры $\theta=\frac{1}{18}$. Выбор значений параметров каждой из фаз $\pm$ и температуры для приведенных графиков обусловлен исключительно соображениями наглядности.

Глобальные (и единственные локальные) минимайзеры $\overline{\zeta}^{\pm}(\theta)$ функций $\mathcal{F}^{\pm}(\cdot,\theta)$ являются тензорами деформаций фазы $\pm$ соответственно в ненапряженном состоянии, а наименьшие значения плотностей свободной энергии $\overline{\gamma}^{\pm}(\theta) = \mathcal{F}^{\pm}\left(\overline{\zeta}^{\pm}(\theta),\theta\right)$ каждой из фаз являются энергиями в ненапряженном состоянии и называются химическими энергиями.

В качестве множества допустимых полей перемещений возьмем

$$\mathbb{X} = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega;\mathbb{R}^m). \tag{5}$$

Принадлежность поля перемещений u множеству $\mathbb{X}$ означает, что оно удовлетворяет граничному условию $u|_{\partial\Omega} = 0$ и непрерывно при переходе через границу раздела фаз.

Будем рассматривать двухфазную термоупругую среду при следующих условиях:

$$A^{\pm} = a^{\pm}\mathrm{id} + b^{\pm}\mathrm{i}\langle\cdot,\mathrm{i}\rangle; \tag{6}$$

$$\begin{gathered} a^{\pm} + b^{\pm}m > 0; \\ a^{\pm} > 0, \quad \text{при } m > 1; \end{gathered} \tag{7}$$

$$[A\zeta] = c\mathrm{i}, \quad c \in \mathbb{R}; \tag{8}$$

$$a^{+} = a^{-}; \tag{9}$$

$$[\beta] = \varkappa\mathrm{i}, \quad \varkappa \in \mathbb{R}; \tag{10}$$

где id — единичный оператор в пространстве $\mathbb{R}^{m\times m}_s$; i — единичная $m\times m$-матрица; $[\alpha] = \alpha^{+} - \alpha^{-}$. Очевидно, что операторы (6) удовлетворяют условию (2); также очевидно, что операторы (6) удовлетворяют условию (3) тогда и только тогда, когда параметры $a^{\pm}, b^{\pm}$ удовлетворяют условию (7). Параметры $a^{\pm}, b^{\pm}$, задающие операторы $A^{\pm}$ формулами (6), связаны с параметрами Ламе $\mu^{\pm}, \lambda^{\pm}$ равенствами:

$$\mu^{\pm} = a^{\pm}, \qquad \lambda^{\pm} = 2b^{\pm}.$$

При условии (9) будем использовать обозначение $a = a^{\pm}$.

Введем следующие обозначения:

$$\alpha(Q,c) = \frac{c}{(a^{-}+b^{-})Q + (a^{+}+b^{+})(1-Q)}, \qquad Q\in[0;1], \quad c\in\mathbb{R};$$

$$\begin{aligned} G\left(Q,t,\zeta^{+},\zeta^{-}\right) &= \\ &= Qt + Q\left\langle A^{+}\zeta^{+},\zeta^{+}\right\rangle + (1-Q)\left\langle A^{-}\zeta^{-},\zeta^{-}\right\rangle - \frac{\mathrm{tr}\,[A\zeta]}{m}\alpha\left(Q,\frac{\mathrm{tr}\,[A\zeta]}{m}\right)Q(1-Q), \\ &\qquad Q\in[0;1], \quad t\in\mathbb{R}, \quad \zeta^{+},\zeta^{-}\in\mathbb{R}^{m\times m}_s; \end{aligned}$$

$$\overline{\zeta}^{\pm}(\theta) = \zeta^{\pm} + \left(A^{\pm}\right)^{-1}\beta^{\pm}\theta, \quad \theta\in\mathbb{R}; \tag{11}$$

$$\overline{c}(\theta) = c + \varkappa\theta, \quad \theta\in\mathbb{R};$$

$$\overline{\gamma}^{\pm}(\theta) = \left\langle A^{\pm}\zeta^{\pm},\zeta^{\pm}\right\rangle - \left\langle A^{\pm}\overline{\zeta}^{\pm}(\theta),\overline{\zeta}^{\pm}(\theta)\right\rangle + \gamma^{\pm}(\theta), \quad \theta\in\mathbb{R}; \tag{12}$$

$$\overline{t}(\theta) = [\overline{\gamma}(\theta)] \ \left(= [\langle A\zeta,\zeta\rangle] - \left[\left\langle A\overline{\zeta}(\theta),\overline{\zeta}(\theta)\right\rangle\right] + [\gamma(\theta)]\right), \quad \theta\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

При условиях (8), (10)

$$\left[A\overline{\zeta}\left(\theta\right)\right] = \overline{c}\left(\theta\right)\mathrm{i}. \tag{14}$$

Отметим, что условия (8), (10) необходимы для того, чтобы тензор $\left[A\overline{\zeta}\left(\theta\right)\right]$ был шаровым. Более точно, из условия

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\quad\exists c'\in\mathbb{R}:\qquad\left[A\overline{\zeta}\left(\theta\right)\right] = c'\mathrm{i},$$

где $\overline{\zeta}^{\pm}\left(\theta\right)$ определяются равенствами (11), следуют соотношения:

$$\exists c\in\mathbb{R}:\qquad[A\zeta] = c\mathrm{i},\qquad\exists\varkappa\in\mathbb{R}:\qquad[\beta] = \varkappa\mathrm{i}.$$

В самом деле, поскольку $\left[A\overline{\zeta}\left(0\right)\right] = [A\zeta]$, $\left[A\overline{\zeta}\left(1\right)\right] = [A\zeta] + [\beta]$, приходим к выводу, что

$$[A\zeta] = c\mathrm{i},\quad\text{где } c = c'|_{\theta=0};\qquad[\beta] = \varkappa\mathrm{i},\quad\text{где } \varkappa = c'|_{\theta=1} - c'|_{\theta=0}.$$

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *При условиях* (5), (6)–(10) *для любого* $\theta\in\mathbb{R}$ *задача* (1) *разрешима и множество всех ее решений совпадает с множеством всех решений задачи*

$$\operatorname{div}u_\theta = \alpha\left(Q_\theta,\overline{c}\left(\theta\right)\right)\left(\chi_\theta - Q_\theta\right),\quad\nabla u_\theta^a = 0,\quad\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega\chi_\theta\,dx = Q_\theta;\qquad u_\theta\in\mathbb{X},\quad\chi_\theta\in\mathbb{Z}'; \tag{15}$$

где

$$M^a = \frac{1}{2}\left(M - M^*\right),\quad M\in\mathbb{R}^{m\times m};$$

а число $Q_\theta\in[0;1]$ *— равновесная объемная доля фазы «+» — любое решение задачи*

$$G\left(Q_\theta,\overline{t}\left(\theta\right),\overline{\zeta}^+\left(\theta\right),\overline{\zeta}^-\left(\theta\right)\right) = \min_{Q\in[0;1]}G\left(Q,\overline{t}\left(\theta\right),\overline{\zeta}^+\left(\theta\right),\overline{\zeta}^-\left(\theta\right)\right),\quad Q_\theta\in[0;1]. \tag{16}$$

При дополнительных ограничениях $\zeta^\pm = \lambda^\pm\mathrm{i}$, $b^\pm = b$, $\gamma^\pm\left(\theta\right)\equiv 0$ результат, аналогичный теореме 1, получен в [3]. Наша цель — избавиться от этих ограничений. Для удобства изложения разобьем доказательство теоремы 1 на ряд этапов.

3. Сведение задачи о равновесии двухфазной термоупругой среды к задаче о равновесии двухфазной упругой среды без температурных напряжений. Для этой модели плотности свободной энергии определяются равенствами:

$$\overline{\mathcal{F}}^+\left(M,t\right) = F^+\left(M\right) + t,\quad\overline{\mathcal{F}}^-\left(M,t\right) = F^-\left(M\right);\qquad M\in\mathbb{R}^{m\times m},\quad t\in\mathbb{R},$$

а функционал свободной энергии определяется равенством

$$\overline{I}\left[u,\chi,t\right] = \int\limits_\Omega\left\{\chi\overline{\mathcal{F}}^+\left(\nabla u,t\right) + \left(1-\chi\right)\overline{\mathcal{F}}^-\left(\nabla u,t\right)\right\}dx,\qquad u\in\mathbb{X},\quad\chi\in\mathbb{Z}',\quad t\in\mathbb{R}.$$

Как и в [3], сведем задачу (1) к задаче

$$I\left[\overline{u}_t,\overline{\chi}_t,t\right] = \inf_{\substack{u\in\mathbb{X}\\ \chi\in\mathbb{Z}'}}I\left[u,\chi,t\right],\qquad\overline{u}_t\in\mathbb{X},\quad\overline{\chi}_t\in\mathbb{Z}'. \tag{17}$$

Временно включим тензоры деформаций $\zeta^{\pm} \in \mathbb{R}_s^{m\times m}$, обеспечивающие ненапряженное состояние каждой из фаз, в аргументы функционала $\overline{I}$; таким образом,

$$I\left[u,\chi,\theta\right] = \int\limits_{\Omega} \left\{\chi\left(\left\langle A^{+}\left(\nabla u^{s} - \zeta^{+}\right), \nabla u^{s} - \zeta^{+}\right\rangle - 2\left\langle \nabla u^{s}, \beta^{+}\right\rangle \theta + \gamma^{+}\left(\theta\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \left(1-\chi\right)\left(\left\langle A^{-}\left(\nabla u^{s} - \zeta^{-}\right), \nabla u^{s} - \zeta^{-}\right\rangle - 2\left\langle \nabla u^{s}, \beta^{-}\right\rangle \theta + \gamma^{-}\left(\theta\right)\right)\right\} dx,$$
$$u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad \theta \in \mathbb{R};$$

$$\overline{I}\left[u,\chi,t,\zeta^{+},\zeta^{-}\right] = \int\limits_{\Omega} \left\{\chi\left(\left\langle A^{+}\left(\nabla u^{s} - \zeta^{+}\right), \nabla u^{s} - \zeta^{+}\right\rangle + t\right) + \right.$$
$$\left. + \left(1-\chi\right)\left\langle A^{-}\left(\nabla u^{s} - \zeta^{-}\right), \nabla u^{s} - \zeta^{-}\right\rangle\right\} dx,$$
$$u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad t \in \mathbb{R}, \quad \zeta^{+},\zeta^{-} \in \mathbb{R}_s^{m\times m}.$$

Поскольку

$$\left\langle A^{\pm}\left(M^{s} - \zeta^{\pm}\right), M^{s} - \zeta^{\pm}\right\rangle - 2\left\langle M^{s}, \beta^{\pm}\right\rangle \theta + \gamma^{\pm}\left(\theta\right) =$$
$$= \left\langle A^{\pm}\left(M^{s} - \overline{\zeta}^{\pm}\left(\theta\right)\right), M^{s} - \overline{\zeta}^{\pm}\left(\theta\right)\right\rangle + \overline{\gamma}^{\pm}\left(\theta\right),$$

приходим к выводу, что

$$I\left[u,\chi,\theta\right] = \overline{I}\left[u,\chi,\overline{t}\left(\theta\right),\overline{\zeta}^{+}\left(\theta\right),\overline{\zeta}^{-}\left(\theta\right)\right] + \left|\Omega\right| \overline{\gamma}^{-}\left(\theta\right),$$

откуда следует, что множество всех решений задачи (1) совпадает с множеством всех решений задачи (17) с параметрами (11), (13).

4. Зависимость множества всех состояний равновесия двухфазной изотропной упругой среды без температурных напряжений от температуры.

Предложение 1. *При условиях* (5), (6)–(8) *имеет место следующее представление функционала* $\overline{I}$*:*

$$\overline{I}\left[u,\chi,t\right] = \int\limits_{\Omega} \left(a^{+}\chi + a^{-}\left(1-\chi\right)\right)\left(\operatorname{tr}\left(\nabla u^{2}\right) - \operatorname{tr}^{2}\left(\nabla u\right)\right) dx +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \left(a^{+}\chi + a^{-}\left(1-\chi\right)\right)\left|\nabla u^{a}\right|^{2} dx + \int\limits_{\Omega} \left(\left(a^{+}+b^{+}\right)\chi + \left(a^{-}+b^{-}\right)\left(1-\chi\right)\right) \times$$
$$\times \left(\operatorname{div} u - \alpha\left(Q,c\right)\left(\chi - Q\right)\right)^{2} dx + \left|\Omega\right| G\left(Q,t,\zeta^{+},\zeta^{-}\right); \quad \text{\textit{где}} \quad Q = \frac{1}{\left|\Omega\right|}\int\limits_{\Omega} \chi\, dx.$$

Утверждение предложения 1 при условии $\zeta^{\pm} = \lambda^{\pm}\mathrm{i}$ (более сильном, чем условие (8)) доказано в [4]. Доказательство предложения 1 полностью повторяет доказательство утверждения предложения 1 при условии $\zeta^{\pm} = \lambda^{\pm}\mathrm{i}$, приведенное в [4]. Тем не менее для полноты изложения выведем предложение 1 из аналогичного утверждения в [4].

Доказательство. Воспользуемся легко проверяемым равенством

$$\overline{I}\,[u,\chi,t] = \Lambda\,[u,\chi] + |\Omega|\left\{Qt + Q\left\langle A^+\zeta^+,\zeta^+\right\rangle + (1-Q)\left\langle A^-\zeta^-,\zeta^-\right\rangle\right\},$$

где

$$\Lambda\,[u,\chi] = \int\limits_\Omega \left\{\left\langle\left(\chi A^+ + (1-\chi)\,A^-\right)\nabla u^s,\nabla u^s\right\rangle - 2\chi\left\langle\nabla u^s,[A\zeta]\right\rangle\right\}dx.$$

Временно включим тензоры деформаций $\zeta^\pm \in \mathbb{R}^{m\times m}_s$, обеспечивающие ненапряженное состояние каждой из фаз, в аргументы функционалов I, Λ. Положим

$$\lambda^+ = \frac{c}{a^+ + b^+ m},\quad \lambda^- = 0;\qquad \zeta'^\pm = \lambda^\pm \mathrm{i}.$$

Имеем: $[A\zeta'] = c\mathrm{i} = [A\zeta]$,

$$\begin{aligned}
&\overline{I}\left[u,\chi,t,\zeta'^+,\zeta'^-\right] - |\Omega|\left\{Qt + Q\left\langle A^+\zeta'^+,\zeta'^+\right\rangle + (1-Q)\left\langle A^-\zeta'^-,\zeta'^-\right\rangle\right\} = \\
&= \Lambda\left[u,\chi,\zeta'^+,\zeta'^-\right] = \int\limits_\Omega \left\{\left\langle\left(\chi A^+ + (1-\chi)\,A^-\right)\nabla u^s,\nabla u^s\right\rangle - 2\chi\left\langle\nabla u^s,[A\zeta']\right\rangle\right\}dx = \\
&= \int\limits_\Omega \left\{\left\langle\left(\chi A^+ + (1-\chi)\,A^-\right)\nabla u^s,\nabla u^s\right\rangle - 2\chi\left\langle\nabla u^s,[A\zeta]\right\rangle\right\}dx = \Lambda\left[u,\chi,\zeta^+,\zeta^-\right] = \\
&= \overline{I}\left[u,\chi,t,\zeta^+,\zeta^-\right] - |\Omega|\left\{Qt + Q\left\langle A^+\zeta^+,\zeta^+\right\rangle + (1-Q)\left\langle A^-\zeta^-,\zeta^-\right\rangle\right\};
\end{aligned}$$

кроме того, поскольку утверждение предложения 1 справедливо [4] для тензоров деформаций $\zeta'^\pm \in \mathbb{R}^{m\times m}_s$, обеспечивающих ненапряженное состояние каждой из фаз,

$$\begin{aligned}
&\overline{I}\left[u,\chi,t,\zeta'^+,\zeta'^-\right] = \int\limits_\Omega \left(a^+\chi + a^-(1-\chi)\right)\left(\mathrm{tr}\left(\nabla u^2\right) - \mathrm{tr}^2(\nabla u)\right)dx + \\
&+ \int\limits_\Omega \left(a^+\chi + a^-(1-\chi)\right)|\nabla u^a|^2\,dx + \int\limits_\Omega \left(\left(a^+ + b^+\right)\chi + \left(a^- + b^-\right)(1-\chi)\right)\times \\
&\times\left(\operatorname{div} u - \alpha\,(Q,c)\,(\chi - Q)\right)^2 dx + \\
&+ |\Omega|\left\{Qt + Q\left\langle A^+\zeta'^+,\zeta'^+\right\rangle + (1-Q)\left\langle A^-\zeta'^-,\zeta'^-\right\rangle - c\alpha\,(Q,c)\,Q\,(1-Q)\right\}.
\end{aligned}$$

Получаем равенство

$$\begin{aligned}
&\overline{I}\left[u,\chi,t,\zeta^+,\zeta^-\right] = \int\limits_\Omega \left(a^+\chi + a^-(1-\chi)\right)\left(\mathrm{tr}\left(\nabla u^2\right) - \mathrm{tr}^2(\nabla u)\right)dx + \\
&+ \int\limits_\Omega \left(a^+\chi + a^-(1-\chi)\right)|\nabla u^a|^2\,dx + \int\limits_\Omega \left(\left(a^+ + b^+\right)\chi + \left(a^- + b^-\right)(1-\chi)\right)\times \\
&\times\left(\operatorname{div} u - \alpha\,(Q,c)\,(\chi - Q)\right)^2 dx + \\
&+ |\Omega|\left\{Qt + Q\left\langle A^+\zeta^+,\zeta^+\right\rangle + (1-Q)\left\langle A^-\zeta^-,\zeta^-\right\rangle - c\alpha\,(Q,c)\,Q\,(1-Q)\right\},
\end{aligned}$$

которое совпадает с утверждением предложения 1. □

Следствие. *При условиях* (5), (6)–(9) *функционал* $\overline{I}$ *представляется в виде*

$$\overline{I}\,[u,\chi,t]=a\int\limits_{\Omega}|\nabla u^a|^2\,dx+$$

$$+\int\limits_{\Omega}\left(\left(a+b^+\right)\chi+\left(a+b^-\right)(1-\chi)\right)\left(\operatorname{div}u-\alpha\,(Q,c)\,(\chi-Q)\right)^2\,dx+|\Omega|\,G\left(Q,t,\zeta^+,\zeta^-\right).$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться предложением 1 и равенством

$$\int\limits_{\Omega}\left(\operatorname{tr}\left(\nabla u^2\right)-\operatorname{tr}^2\left(\nabla u\right)\right)\,dx=0,$$

которое сначала проверяется для функций $u\in C_0^\infty\left(\Omega;\mathbb{R}^m\right)$ интегрированием по частям, а затем по непрерывности распространяется на весь класс $\mathbb{X}$. $\square$

Для того, чтобы дать описание множества всех решений задачи (17), нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. (см. [5]) *Для любых* $\alpha\in\mathbb{R}$, $Q\in[0;1]$ *система уравнений*

$$\operatorname{div}v=\alpha\,(\chi-Q)\,,\quad \nabla v^a=0,\quad \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\chi\,dx=Q;\qquad v\in\mathbb{X},\quad \chi\in\mathbb{Z}',$$

разрешима.

Доказательство леммы 1 дано в [5].

Из следствия к предложению 1 и леммы 1 непосредственно вытекает теорема.

Теорема 2. *При условиях* (5), (6)–(9) *для любого* $t\in\mathbb{R}$ *задача* (17) *разрешима и множество всех ее решений совпадает с множеством всех решений задачи*

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\overline{u}_t=\alpha\left(\overline{Q}_t,c\right)\left(\overline{\chi}_t-\overline{Q}_t\right),\quad \nabla\overline{u}_t^a=0,\quad \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega}\overline{\chi}_t\,dx=\overline{Q}_t;\\ \overline{u}_t\in\mathbb{X},\quad \overline{\chi}_t\in\mathbb{Z}',\end{gathered}\tag{18}$$

где $\overline{Q}_t$ *— любое решение задачи,*

$$G\left(\overline{Q}_t,t,\zeta^+,\zeta^-\right)=\min_{Q\in[0;1]}G\left(Q,t,\zeta^+,\zeta^-\right),\quad \overline{Q}_t\in[0;1]\,.\tag{19}$$

Аналогичный результат при дополнительном предположении $\zeta^\pm=\lambda^\pm\mathrm{i}$ получен в [5].

5. Доказательство теоремы 1. Воспользуемся тем, что множество всех решений задачи (1) совпадает с множеством всех решений задачи (17) с параметрами (11), (13) (при подстановке $\overline{\zeta}^\pm(\theta)$ вместо $\zeta^\pm$ соответственно в (4) и $\overline{t}\,(\theta)$ вместо t). В силу (14), набор параметров $\left(A^+,\overline{\zeta}^+(\theta)\,,A^-,\overline{\zeta}^-(\theta)\right)$ удовлетворяет условиям (6)–(9) (при подстановке $\overline{\zeta}^\pm(\theta)$ вместо $\zeta^\pm$ соответственно и $\overline{c}\,(\theta)$ вместо c), следовательно, он удовлетворяет условиям теоремы 2. Подставляя $\overline{t}\,(\theta)$ вместо t и $\overline{c}\,(\theta)$ вместо c в

(18), получаем (15) с $u_\theta = \overline{u}_{\overline{t}(\theta)}$, $\chi_\theta = \overline{\chi}_{\overline{t}(\theta)}$, $Q_\theta = \overline{Q}_{\overline{t}(\theta)}$; подставляя $\overline{t}\,(\theta)$ вместо t и $\overline{\zeta}^\pm\,(\theta)$ вместо $\zeta^\pm$ соответственно в (19), получаем (16) с $Q_\theta = \overline{Q}_{\overline{t}(\theta)}$.

6. Сведение задачи о равновесии двухфазной термоупругой среды с аффинными граничными условиями к задаче о равновесии двухфазной термоупругой среды с нулевыми граничными условиями. В качестве множества допустимых полей перемещений можно взять

$$\mathbb{X}_{u_0,\varepsilon} = \left\{u \in W_2^1\,(\Omega;\mathbb{R}^m):\ u\,(x) = u_0 + \varepsilon x, \quad \text{при } x \in \partial\Omega\right\}; \qquad u_0 \in \mathbb{R}^m, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{20}$$

Принадлежность поля перемещений u множеству $\mathbb{X}_{u_0,\varepsilon}$ означает, что оно удовлетворяет условию $u\,(x) = u_0 + \varepsilon x$ на границе области Ω и непрерывно при переходе через границу раздела фаз.

Сведем задачу (1) с граничными условиями (20) к задаче (1) с граничными условиями (5). Для этого включим тензоры деформаций $\zeta^\pm \in \mathbb{R}_s^{m\times m}$, обеспечивающие ненапряженное состояние каждой из фаз при начальной температуре, в аргументы функций $F^\pm$; тензоры деформаций $\zeta^\pm \in \mathbb{R}_s^{m\times m}$, обеспечивающие ненапряженное состояние каждой из фаз при начальной температуре, функции $\gamma^\pm\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ в аргументы функций $\mathcal{F}^\pm$ и функционала I:

$$F^\pm\left(M,\zeta^\pm\right) = \left\langle A^\pm\left(M^s - \zeta^\pm\right), M^s - \zeta^\pm\right\rangle, \qquad M \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad \zeta^\pm \in \mathbb{R}_s^{m\times m};$$

$$\begin{gathered}\mathcal{F}^\pm\left[M,\theta,\zeta^\pm,\gamma^\pm\right] = F^\pm\left(M,\zeta^\pm\right) - 2\left\langle M^s,\beta^\pm\right\rangle\theta + \gamma^\pm\,(\theta),\\ M \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \zeta^\pm \in \mathbb{R}_s^{m\times m}, \quad \gamma^\pm\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}I\left[u,\chi,\theta,\zeta^+,\zeta^-,\gamma^+,\gamma^-\right] = \int\limits_\Omega \left\{\chi\mathcal{F}^+\left[\nabla u,\theta,\zeta^+,\gamma^+\right] + (1-\chi)\,\mathcal{F}^-\left[\nabla u,\theta,\zeta^-,\gamma^-\right]\right\}dx,\\ u \in W_2^1\,(\Omega;\mathbb{R}^m), \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad \theta \in \mathbb{R}, \quad \zeta^\pm \in \mathbb{R}_s^{m\times m}, \quad \gamma^\pm\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.\end{gathered}$$

Для функции $u \in \mathbb{X}_{u_0,\varepsilon}$

$$\begin{gathered}F^\pm\left(\nabla u,\zeta^\pm\right) = F^\pm\left(\nabla v,\widehat{\zeta}^\pm\right), \quad \mathcal{F}^\pm\left[\nabla u,\theta,\zeta^\pm,\gamma^\pm\right] = \mathcal{F}^\pm\left[\nabla v,\theta,\widehat{\zeta}^\pm,\widehat{\gamma}^\pm\right];\\ I\left[u,\chi,\theta,\zeta^+,\zeta^-,\gamma^+,\gamma^-\right] = I\left[v,\chi,\theta,\widehat{\zeta}^+,\widehat{\zeta}^-,\widehat{\gamma}^+,\widehat{\gamma}^-\right];\end{gathered}$$

где

$$v\,(x) = u\,(x) - \{u_0 + \varepsilon x\}, \quad x \in \Omega; \qquad v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1\,(\Omega;\mathbb{R}^m); \tag{21}$$

$$\widehat{\zeta}^\pm = \zeta^\pm - \varepsilon^s; \qquad \widehat{\gamma}^\pm\,(\theta) = \gamma^\pm\,(\theta) - 2\left\langle\varepsilon^s,\beta^\pm\right\rangle\theta. \tag{22}$$

Таким образом, приходим к выводу, что пара $(u,\chi) \in \mathbb{X}_{u_0,\varepsilon} \times \mathbb{Z}'$ является решением задачи (1) с граничными условиями (20) тогда и только тогда, когда пара (v,χ) является решением задачи (1) с граничными условиями (5) с параметрами (22), где v задается формулой (21). Как видно из (22), условие (8), накладываемое на параметры $\widehat{\zeta}^{\pm}$, имеет вид

$$[A(\zeta - \varepsilon^s)] = c\mathrm{i}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Во второй части статьи, посвященной исследованию зависимости множества всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды от температуры, при дополнительном условии

$$[\gamma(\theta)] = \gamma_0 + 2\gamma_1\theta + \gamma_2\theta^2, \quad \theta \in \mathbb{R}; \qquad \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$$

будет исследована зависимость множества всех состояний равновесия двухфазной термоупругой среды от температуры. Как видно из (22),

$$\left\{\exists \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}\colon \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad [\gamma(\theta)] = \gamma_0 + 2\gamma_1\theta + \gamma_2\theta^2\right\} \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow \left\{\exists \widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2 \in \mathbb{R}\colon \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad [\widehat{\gamma}(\theta)] = \widehat{\gamma}_0 + 2\widehat{\gamma}_1\theta + \widehat{\gamma}_2\theta^2\right\},$$

при этом параметры $\widehat{\gamma}_0, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2$ связаны с параметрами $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ соотношениями

$$\widehat{\gamma}_0 = \gamma_0, \quad \widehat{\gamma}_1 = \gamma_1 - \langle \varepsilon^s, [\beta] \rangle, \quad \widehat{\gamma}_2 = \gamma_2.$$

Таким образом, замена нулевых граничных условий (5) на аффинные (20) не выводит функции, задающие энергии каждой из фаз в ненапряженном состоянии при нулевых тензорах коэффициентов температурных напряжений, из рассматриваемого класса.

7. Заключение. В работе при некоторых ограничениях на параметры двухфазной термоупругой среды доказана разрешимость вариационной задачи о состояниях равновесия и дано описание множества всех ее решений. Как и в случае двухфазной упругой среды без температурных напряжений, в случае двухфазной термоупругой среды ключевым объектом в описании множества всех глобальных минимайзеров функционала свободной энергии является равновесная доля фазы «+», которая задается как точка глобального минимума некоторой непрерывной функции на отрезке $[0;1]$, а равновесные поле перемещений и пространственное распределение фаз восстанавливаются как решение некоторой вспомогательной системы уравнений.

Автор выражает благодарность В. Г. Осмоловскому, В. А. Кучеру и А. Б. Фрейдину за ценные замечания, повлиявшие на постановку задачи и интерпретацию результатов.

Литература

1. Гринфельдт М. А. *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений.* Москва, Наука (1990).

2. Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. *Математические модели термомеханики.* Москва, Физматлит (2002).

3. Osmolovskii V. G. Computation of the entropy of a two-phase elastic medium in the problem of thermoelasticity. *Journal of Mathematical Sciences* **175** (3), 349–362 (2011). https://doi.org/10.1007/s10958-011-0350-6

4. Осмоловский В. Г. Квазивыпуклая оболочка для однородной изотропной двухфазовой упругой среды и решения исходной и релаксированной задач. *Проблемы математического анализа* **70**, 161–170 (2013). https://doi.org/10.1007/s10958-013-1316-7

5. Osmolovskii V. G. Exact Solutions to the Variational Problem of the Phase Transition Theory in Continuum Mechanics. *Journal of Mathematical Sciences* **120** (2), 1167–1190 (2004). https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000014845.60594.5f

Статья поступила в редакцию 15 января 2024 г.;
доработана 20 мая 2024 г.;
рекомендована к печати 23 мая 2024 г.

Контактная информация:

Ефимов Егор Анатольевич — аспирант, стажер-исследователь;
https://orcid.org/0009-0006-0220-0235, egorefimov256@gmail.com

The set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. Part 1: existence of equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium*

E. A. Efimov

St. Petersburg State University, 7–9, Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034, Russian Federation
Institute of Problems in Mechanical Engineering of the Russian Academy of Sciences,
61, Bolshoi pr. V. O., St. Petersburg, 199178, Russian Federation

For citation: Efimov E. A. The set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. Part 1: existence of equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*, 2024, vol. 11 (69), issue 4, pp. 706–717. https://doi.org/10.21638/spbu01.2024.407 (In Russian)

This article is the first part of the work devoted to the study of the set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium. The equilibrium state of a two-phase elastic medium is understood as an ordered pair: a displacement field and a spatial phase distribution which provide the free energy functional with a global minimum. For thermoelastic media, the free energy densities are obtained by adding to the strain energy densities the terms associated with the temperature stresses of each phase and the terms associated with the energies of each phase in the unstressed state at zero strestemperature tensors. Under zero Dirichlet boundary conditions on the displacement field and certain restrictions on the elasticity tensors, the strain tensors providing each phase with the unstressed state at the initial temperature and the stress-temperature tensors, the solvability of the problem of the equilibrium of a two-phase thermoelastic medium is proved and the description of the set of all equilibrium states of a two-phase thermoelastic medium is given.

Keywords: two-phase thermoelastic medium, free energy functional, free energy density, spatial phase distribution, equilibrium state.

References

1. Grinfel'd M. A. *Methods of continuum mechanics in the theory of phase transitions.* Moscow, Nauka Publ. (1990). (In Russian)

2. Zarubin V. S., Kuvyrkin G. N. *Mathematical models of thermomechanics.* Moscow, Fizmatlit Publ. (2002). (In Russian)

3. Osmolovskii V. G. Computation of the entropy of a two-phase elastic medium in the problem of thermoelasticity. *Journal of Mathematical Sciences* **175** (3), 349–362 (2011). https://doi.org/10.1007/s10958-011-0350-6

*The research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme no. 124041500009-8).

4. Osmolovskii V. G. Quasiconvex Hull of Energy Densities in a Homogeneous Isotropic Two-Phase Elastic Medium and Solutions of the Original and Relaxed Problems. *Problems in Mathematical Analysis* **70**, 161–170 (2013). (In Russian) [Eng. transl.: *Journal of Mathematical Sciences* **191** (2), (2013). https://doi.org/10.1007/s10958-013-1316-7].

5. Osmolovskii V. G. Exact Solutions to the Variational Problem of the Phase Transition Theory in Continuum Mechanics. *Journal of Mathematical Sciences* **120** (2), 1167–1190 (2004). https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000014845.60594.5f

Received: January 15, 2024
Revised: May 20, 2024
Accepted: May 23, 2024

Author's information:

Egor A. Efimov — https://orcid.org/0009-0006-0220-0235, egorefimov256@gmail.com